

# ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ: Σφαιρικός Καρπός



προαπαιτούμενη γνώση  
ZYZ γωνίες Euler



## Παράδειγμα II

### Υπολογισμός των γωνιών $\alpha, \beta, \gamma$ ZYZ-Euler από τον πίνακα στροφής

$$\begin{aligned} \text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, \beta) \text{Rot}(z, \gamma) = \\ R_{ab}(\alpha, \beta, \gamma)_{\text{ZYZ-EULER}} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

αν  $\sin(\beta) \neq 0 \Rightarrow \beta \neq 0, \pi$  μπορούμε να επιλέξουμε τη λύση για  $0 < \beta < \pi$

εξισώνουμε τα στοιχεία των πινάκων  $\sin(\beta) = +\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}$   $\cos(\beta) = r_{33}$

$$\beta = \text{Atan2}\left(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}\right) \quad (2.74)$$

$$\alpha = \text{Atan2}\left(\frac{r_{23}}{s_\beta}, \frac{r_{13}}{s_\beta}\right)$$

$$\gamma = \text{Atan2}\left(\frac{r_{32}}{s_\beta}, \frac{-r_{31}}{s_\beta}\right)$$

Όταν  $\sin(\beta)=0$  έχουμε ιδιάζον σημείο ( $\beta=0$  ή  $\pi$ ) και κατά σύμβαση μπορούμε να επιλέξουμε το  $\alpha=0$



Όταν  $\sin(\beta)=0$  έχουμε ιδιαίζον σημείο ( $\beta=0$  ή  $\pi$ )

Όταν  $\beta = 0$  κατά σύμβαση μπορούμε να επιλέξουμε το  $\alpha=0$

ο πίνακας ZYZ Euler γίνεται:

$$R_{ZYZ} = \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Επομένως η λύση είναι} \\ \beta = 0, \alpha = 0, \gamma = \text{Atan2}(-r_{12}, r_{11}) \end{array}$$

Όταν  $\beta = \pi$  κατά σύμβαση μπορούμε να επιλέξουμε το  $\alpha=0$

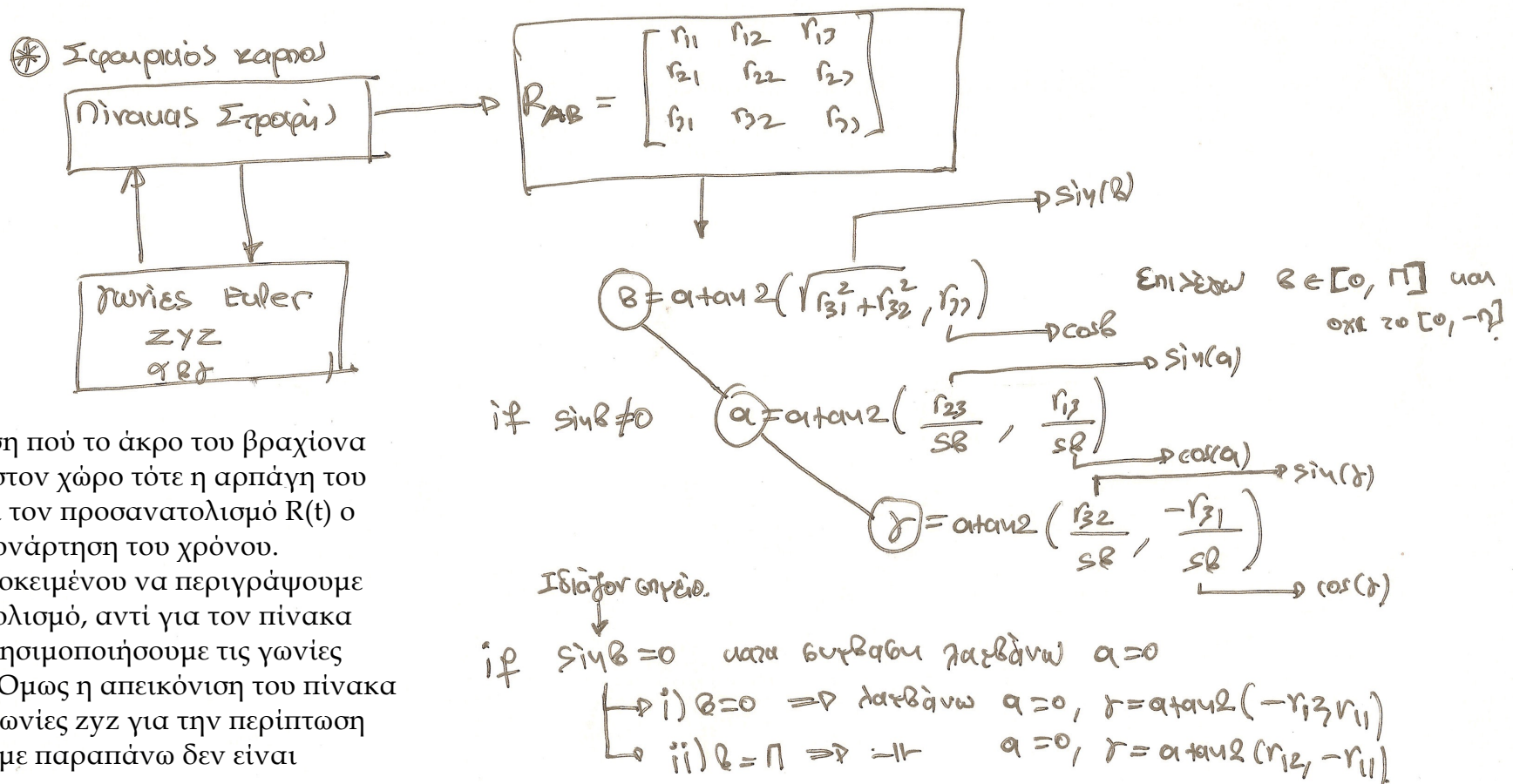
ο πίνακας ZYZ Euler γίνεται:

$$R_{ZYZ} = \begin{bmatrix} -c_\gamma & s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \beta = \pi, \alpha = 0, \gamma = \text{Atan2}(r_{12}, -r_{11})$$



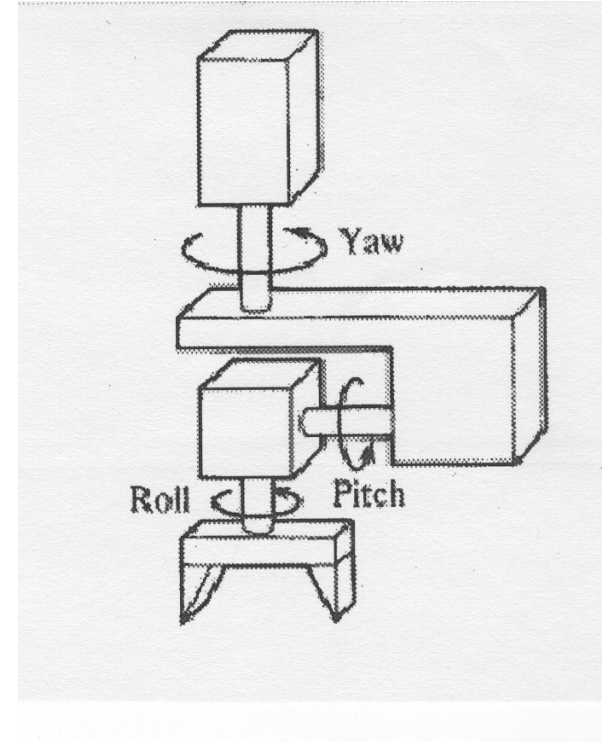
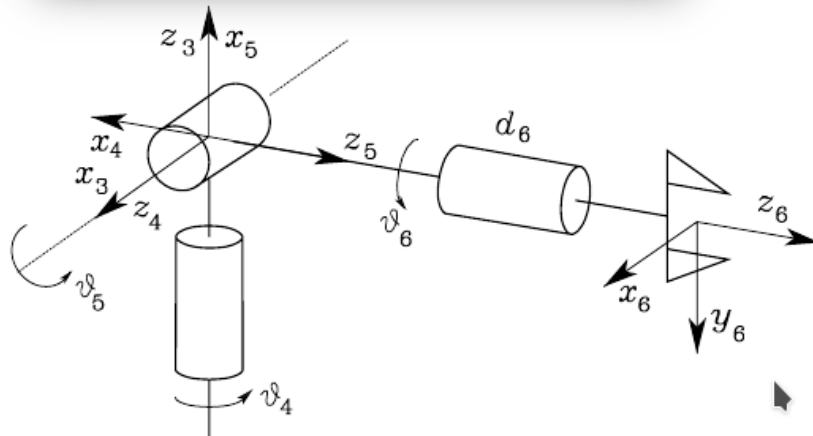
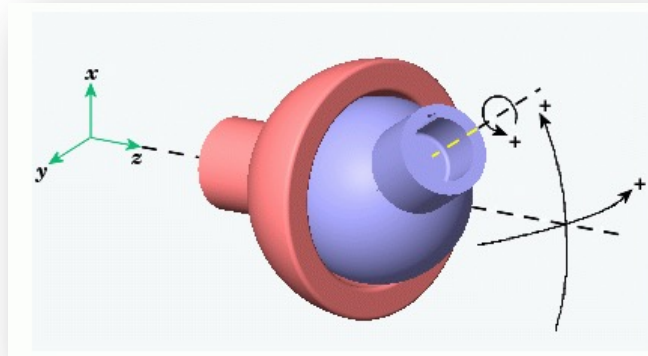
$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \alpha + \arctan 2(y, x) \\ &\downarrow \downarrow \\ &x = \cos \varphi \\ &y = \sin \varphi \end{aligned} \right\} \varphi \in [-\pi, \pi]$$

# ZYZ Euler angles #



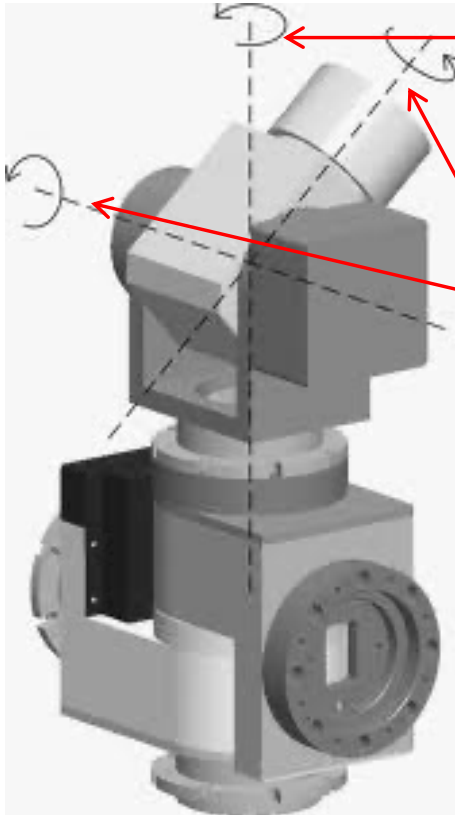
Στην περίπτωση που το άκρο του βραχίονα κινείται μέσα στον χώρο τότε η αρπάγη του ρομπότ θα έχει τον προσανατολισμό  $R(t)$  ο οποίος είναι συνάρτηση του χρόνου. Μπορούμε, προκειμένου να περιγράψουμε τον προσανατολισμό, αντί για τον πίνακα στροφής να χρησιμοποιήσουμε τις γωνίες EULER-ZYZ. Όμως η απεικόνιση του πίνακα στροφής στις γωνίες zyz για την περίπτωση που αναφέρουμε παραπάνω δεν είναι μονοσήμαντη.

# Σφαιρικός βραχίονας και σφαιρικός καρπός



- Υλοποιεί τις τρεις απαραίτητες στροφές - βαθμούς ελευθερίας που απαιτούνται προκειμένου το χειριζόμενο στερεό σώμα να μπορεί να προσανατολισθεί αυθαίρετα στον χώρο.
- Πρόβλημα: Ο μηχανολογικός σχεδιασμός : Πως διατάσσονται τρεις αρθρώσεις και τρεις κινητήρες σε ένα όσο γίνεται μικρότερο χώρο.





## 1η Περιστροφή - (Yaw)

Περιστρέφεται ολόκληρος ο καρπός

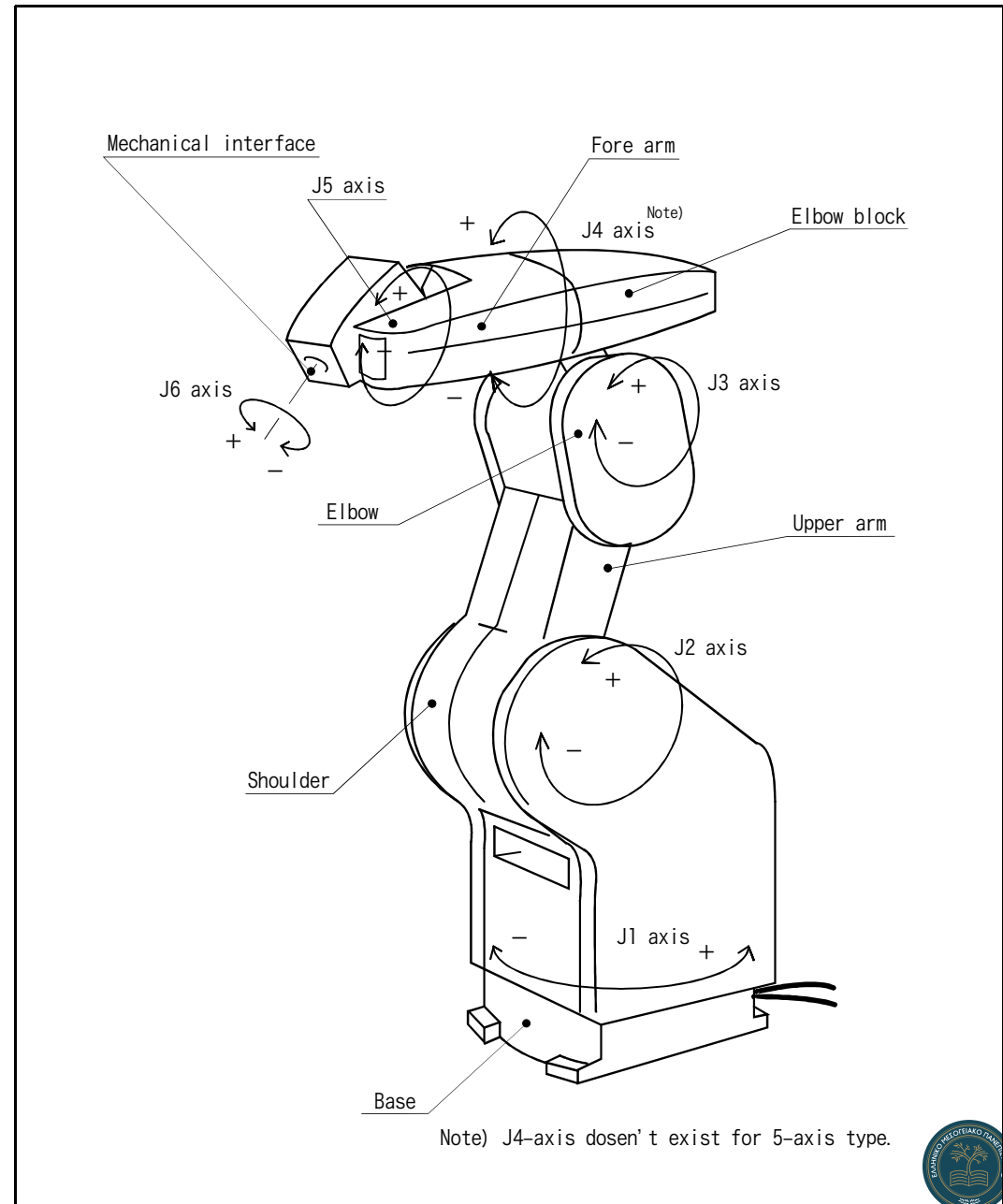
## 2η Περιστροφή - (Pitch or Bend)

Ο καρπός «σπάει».

## 3η Περιστροφή - (Roll)

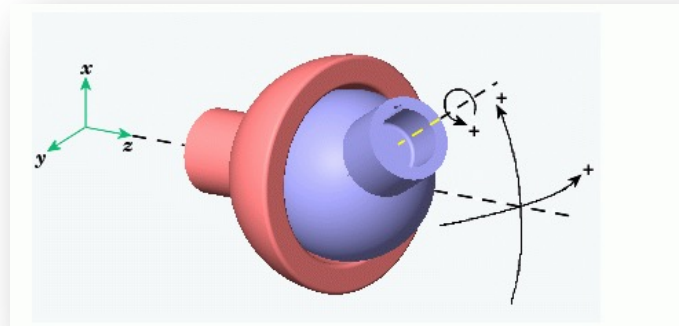
Η περιστροφή του τελικού εργαλείου μεταφέρεται με την βοήθεια ζεύγους κωνικών γραναζιών

# Ο Βραχίονας RV2A με το σφαιρικό του καρπό

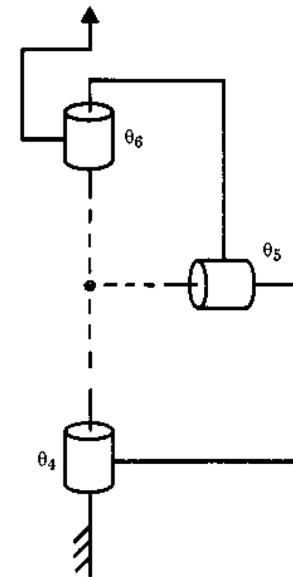




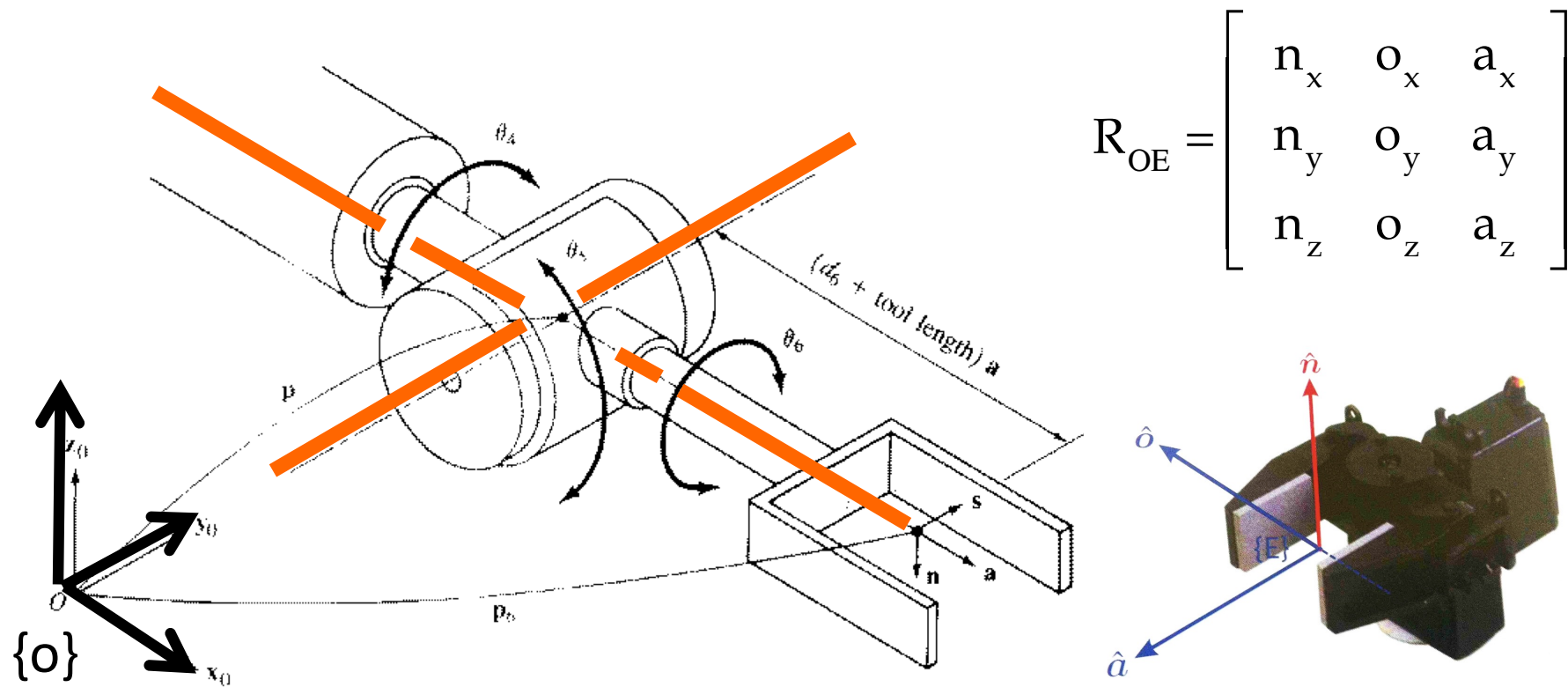
### Σφαιρικός καρπός



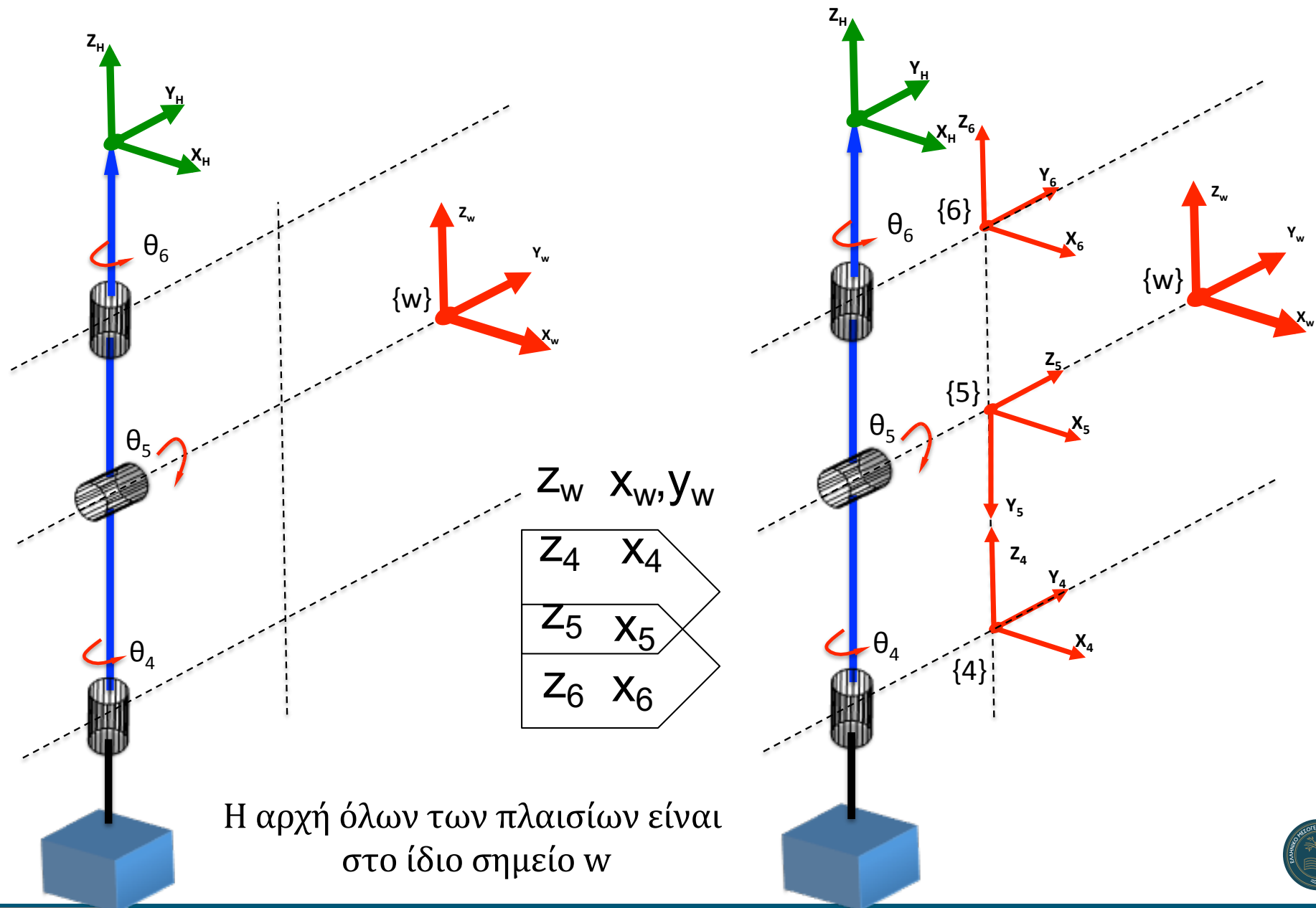
### Γωνίες ZYZ Euler



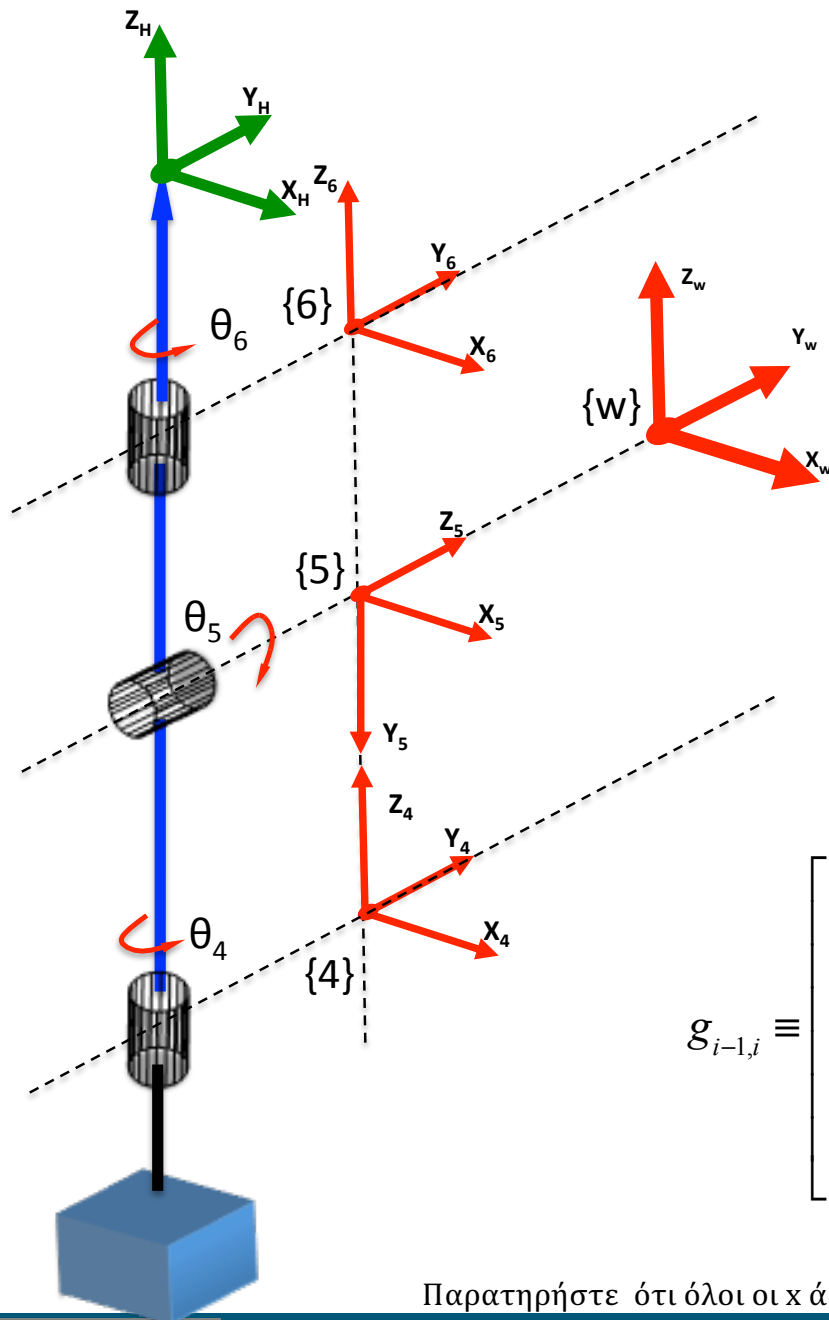
Τυπικός σφαιρικός καρπός βιομηχανικού ρομπότ



# Βήμα 1<sup>ο</sup>: Τοποθέτηση πλαισίων στους συνδέσμους



# Βήμα 1<sup>ο</sup>: Εύρεση παραμέτρων D-H (κατά Craig)



Παράμετροι σφαιρικού καρπού

	$i$	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\vartheta_i$
$\{w\} \rightarrow \{4\}$	4	0	0	0	$\vartheta_4$
$\{4\} \rightarrow \{5\}$	5	0	$-90^\circ$	0	$\vartheta_5$
$\{5\} \rightarrow \{6\}$	6	0	$+90^\circ$	0	$\vartheta_6$

$$g_{i-1,i} \equiv \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & 0 \\ s_i(c_{\alpha_{i-1}}) & c_i(c_{\alpha_{i-1}}) & -(s_{\alpha_{i-1}}) & 0 \\ s_i(s_{\alpha_{i-1}}) & c_i(s_{\alpha_{i-1}}) & (c_{\alpha_{i-1}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ if } \alpha_{i-1} = 0, \text{ and } d_i = 0$$

Παρατηρήστε ότι όλοι οι x άξονες είναι παράλληλοι, δηλαδή το ρομπότ βρίσκεται στην θέση 0



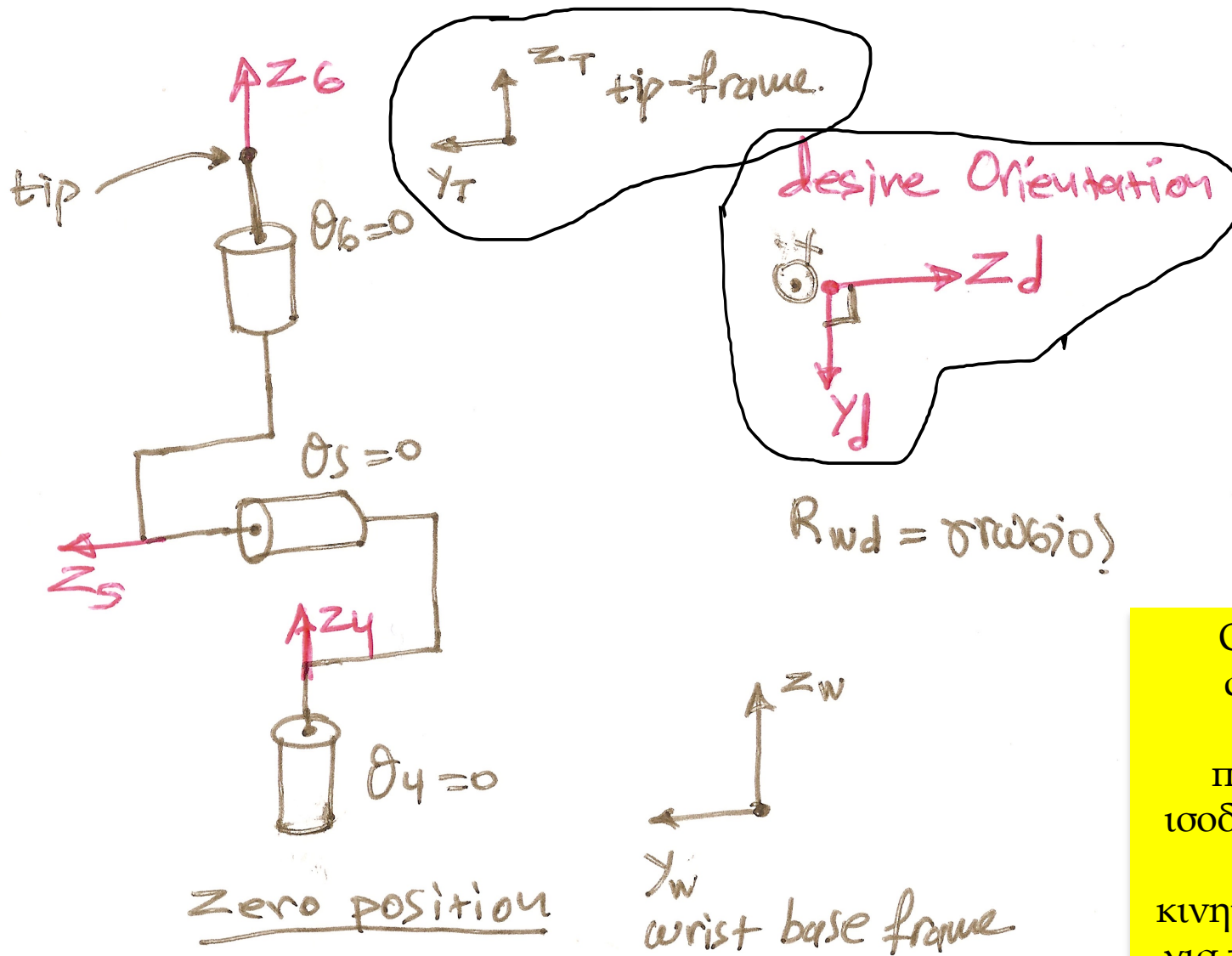
$$\begin{aligned}
 g_{w4} &= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & g_{45} &= \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_5 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & g_{56} &= \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 g_{w4}g_{45}g_{56} &= \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & 0 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{Αν θέσω } \theta_4=\alpha, \theta_5=\beta, \theta_6=\gamma \\ \text{Τι μου θυμίζει ο πίνακας στροφής ???} \end{matrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta & 0 \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta & 0 \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{Ισοδυναμεί με τον πίνακα στροφής για} \\ \text{γωνίες Euler ZYZ} \\ \text{Euler}_{ZYZ}(\alpha, \beta, \gamma) \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Δηλαδή, ο προσανατολισμός του καρπού, ως προς το πλαίσιο του καρπού, καθορίζεται από τις γωνίες  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$  οι οποίες μπορούν να αντιστοιχηθούν στις γωνίες ZYZ-EULER.

Αν είναι γνωστός ο επιθυμητός πίνακας στροφής μπορώ να βρω εύκολα τις γωνίες Euler από το πλαίσιο του καρπού  $\{w\}$  προς το άκρο και κατά συνέπεια να τις θέσω ως γωνίες  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$  στον καρπό του ρομπότ.

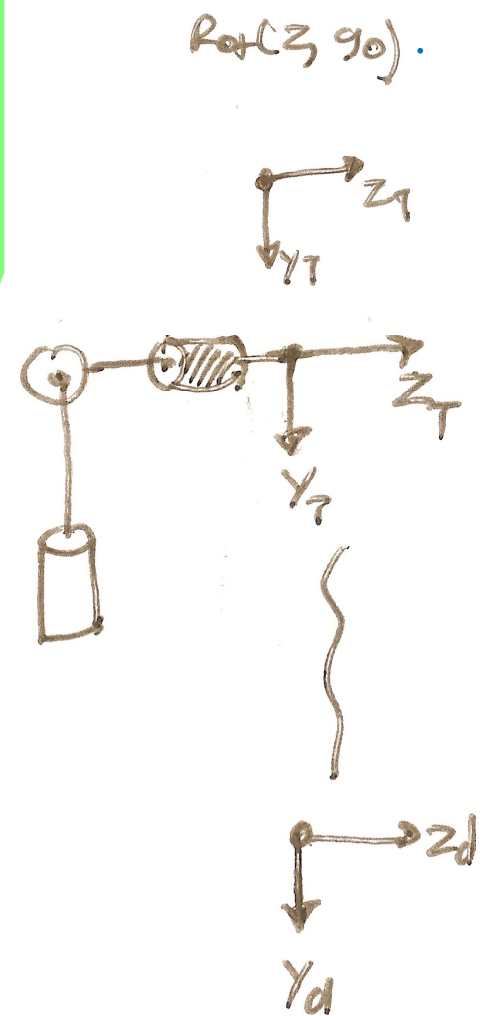
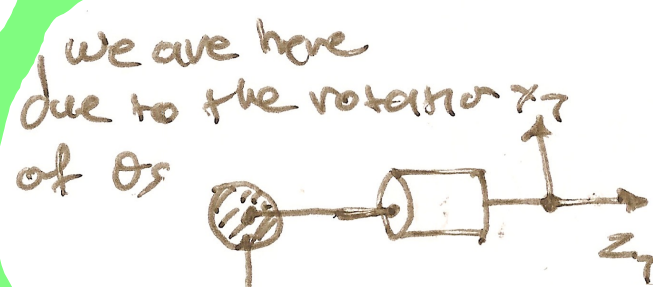
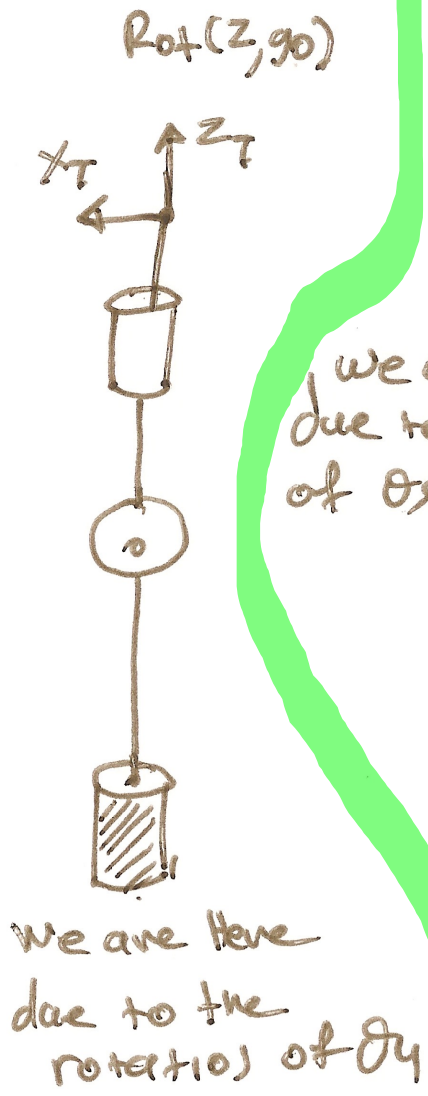
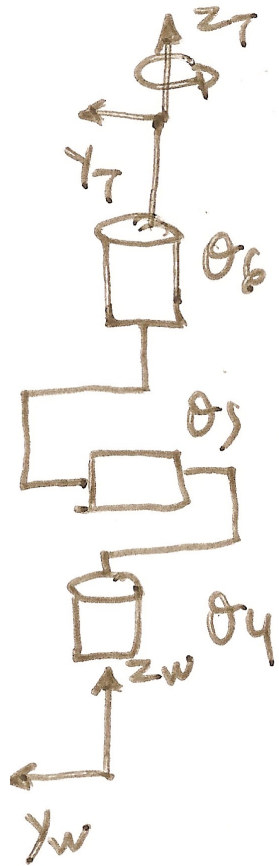


# Παράδειγμα: αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα σφαιρικού καρπού με γωνίες Euler ZYZ



Οι γωνίες ZYZ που αντιστοιχούν στον επιθυμητό προσανατολισμό  $R_d$  ισοδυναμούν με την λύση του αντίστροφου κινηματικού προβλήματος για το σφαιρικό καρπό με γωνίες αρθρώσεων  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ .

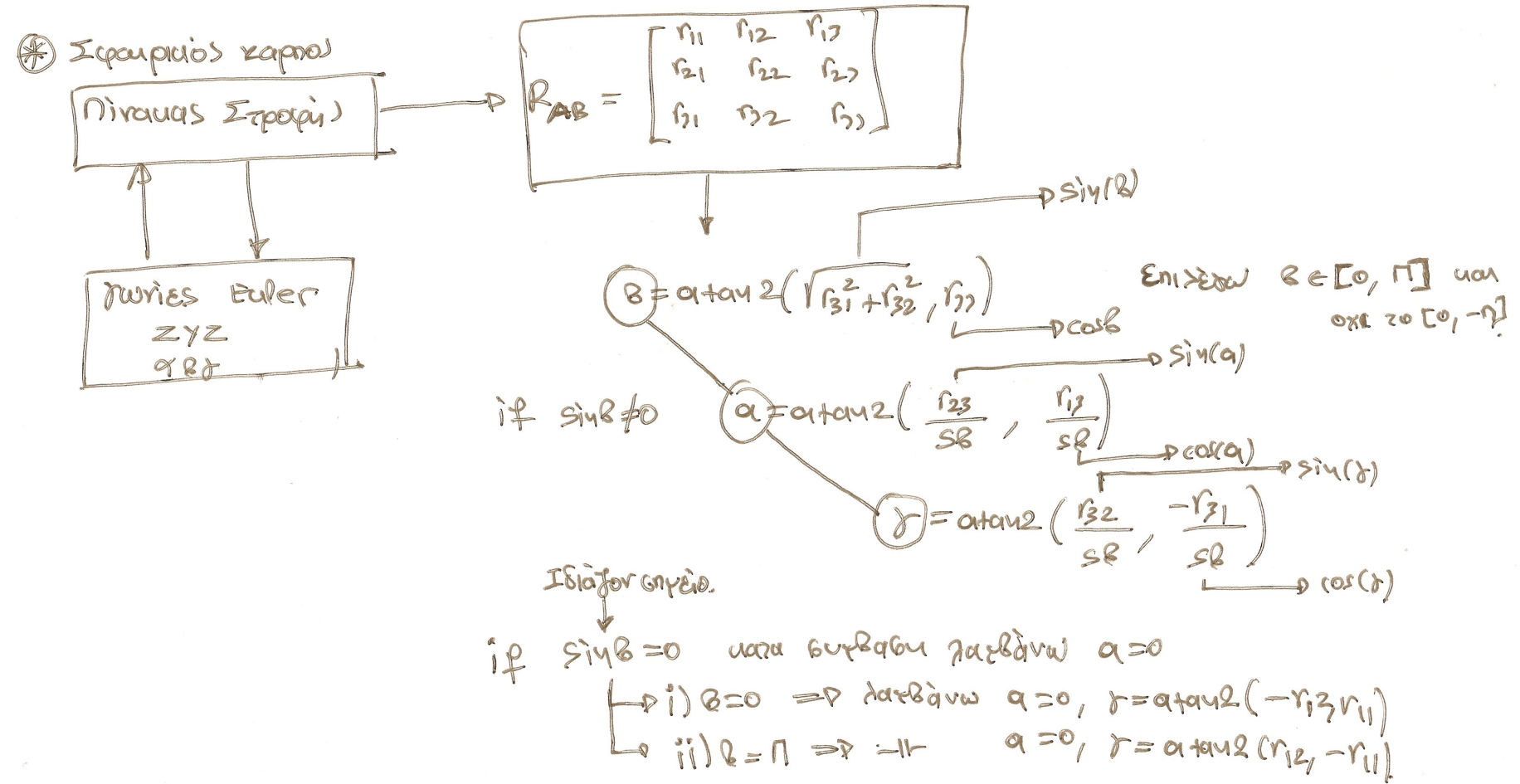
# Διαδοχικές περιστροφές των αρθρώσεων για την προσέγγιση επιθυμητού προσανατολισμού



# Πως υπολογίζονται οι $Z_\alpha Y_\beta Z_\gamma$ γωνίες Euler από τον πίνακα στροφής

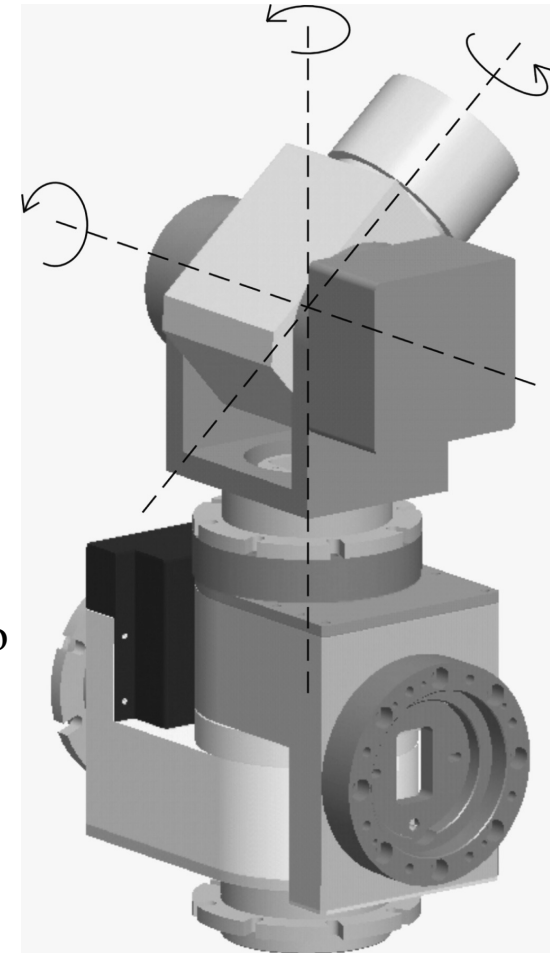
$$\left. \begin{aligned} \varphi = \alpha + \arctan 2(y, x) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{aligned} \right\} \varphi \in [-\pi, \pi]$$

# ZYZ Euler angles #

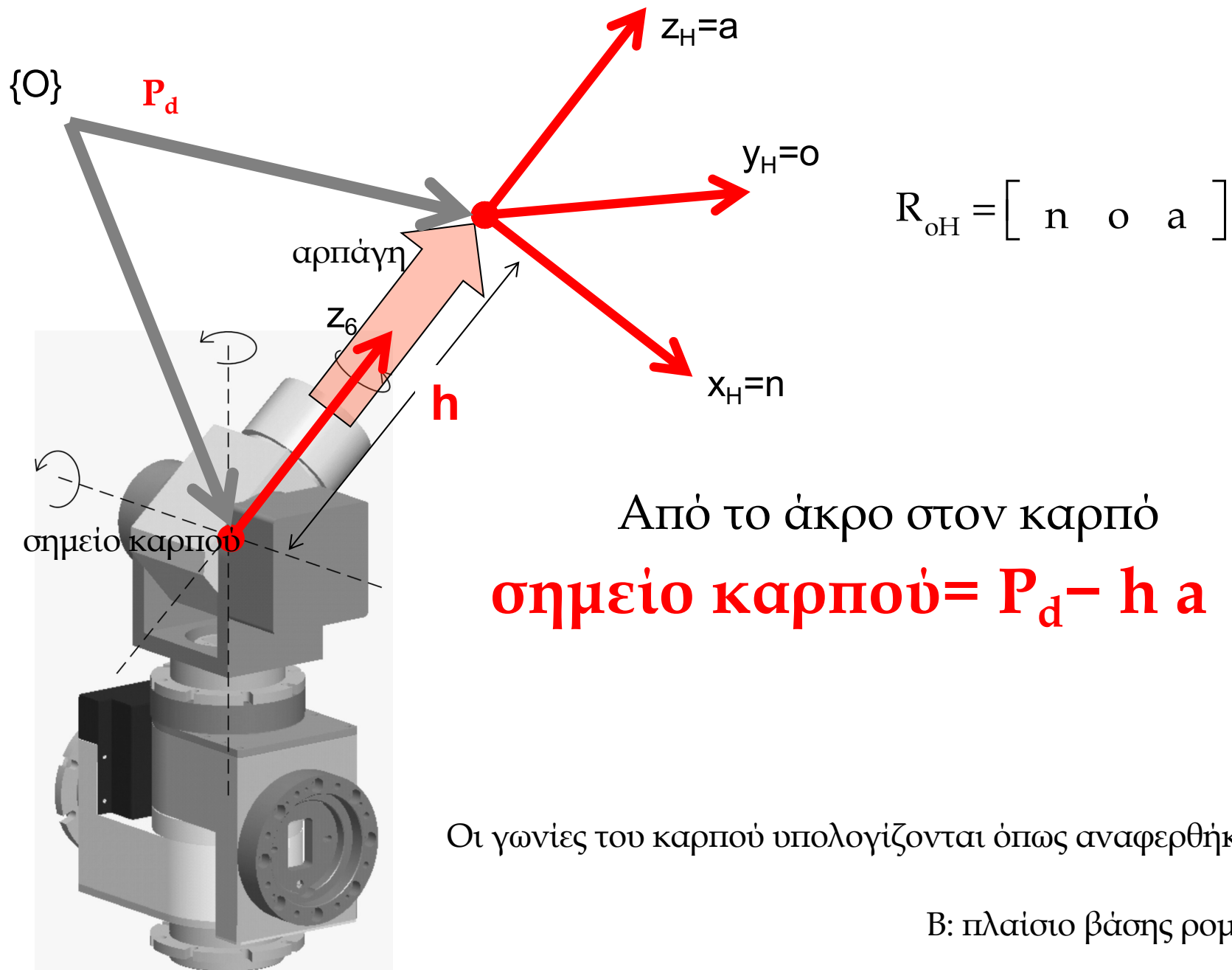


# Το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα βραχίονα με σφαιρικό καρπό

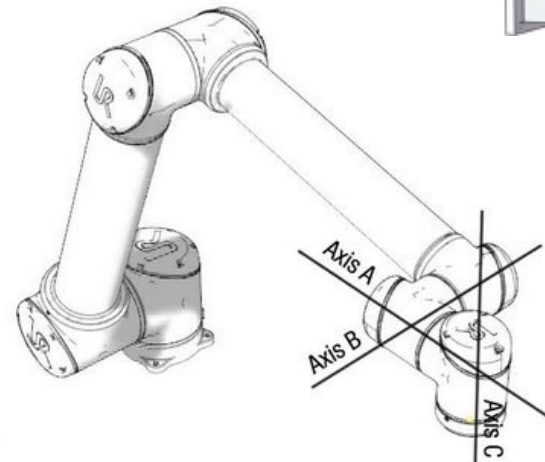
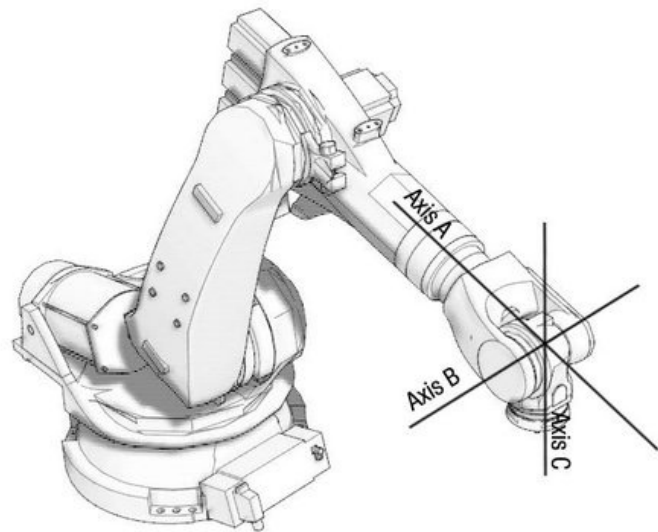
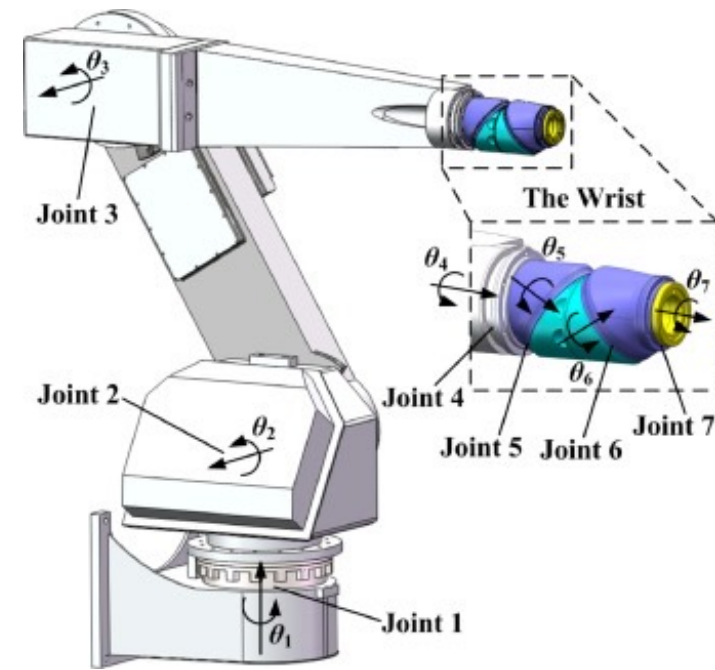
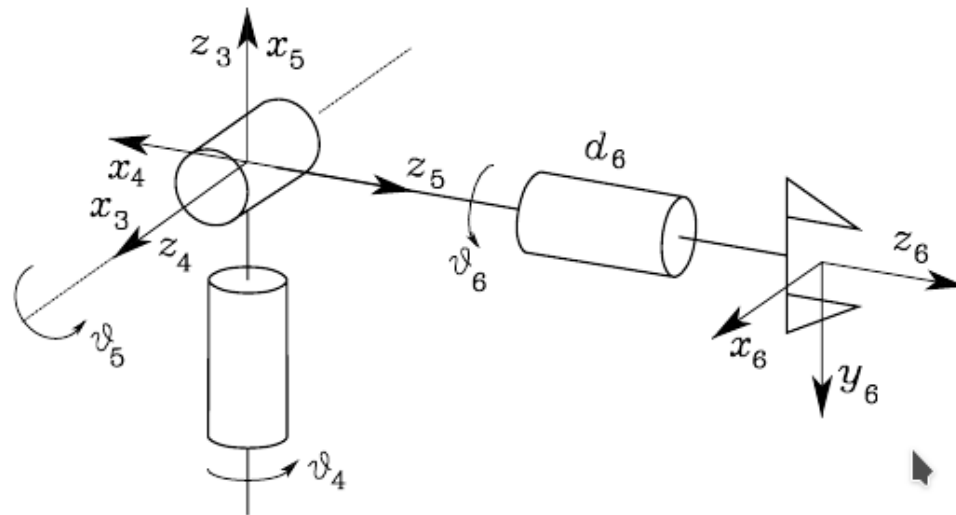
- ❑ Πολλά ρομπότ βιομηχανικού τύπου 6 βαθμών ελευθερίας έχουν ενσωματωμένο τον σφαιρικό καρπό στην κινηματική τους δομή.
- Η ιδιότητα των τριών τεμνόμενων αξόνων του καρπού μας επιτρέπει να χωρίσουμε το πρόβλημα των 6 άγνωστων μεταβλητών των αρθρώσεων σε δύο προβλήματα των 3 αγνώστων το καθένα που ονομάζονται **αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα θέσης** και **αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα προσανατολισμού**.
- ❑ Ακολουθεί ο υπολογισμός των αντίστοιχων συντεταγμένων του καρπού από τις επιθυμητές συντεταγμένες του άκρου όταν
- ❑ γνωρίζουμε τον επιθυμητό προσανατολισμό του άκρου



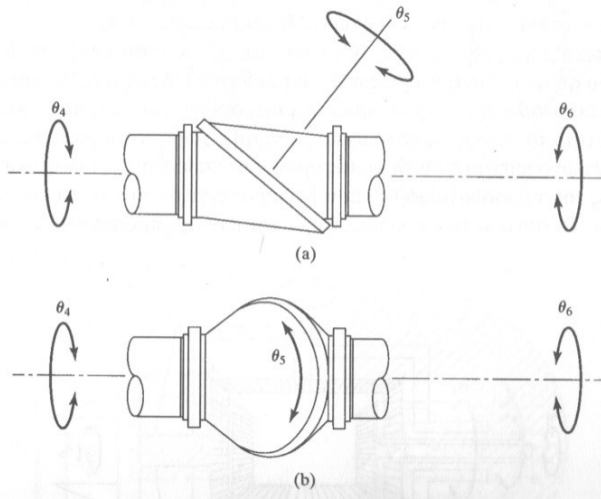
# Συντεταγμένες του καρπού από τις επιθυμητές συντεταγμένες του άκρου



# Άλλες λύσεις αντί του σφαιρικού καρπού

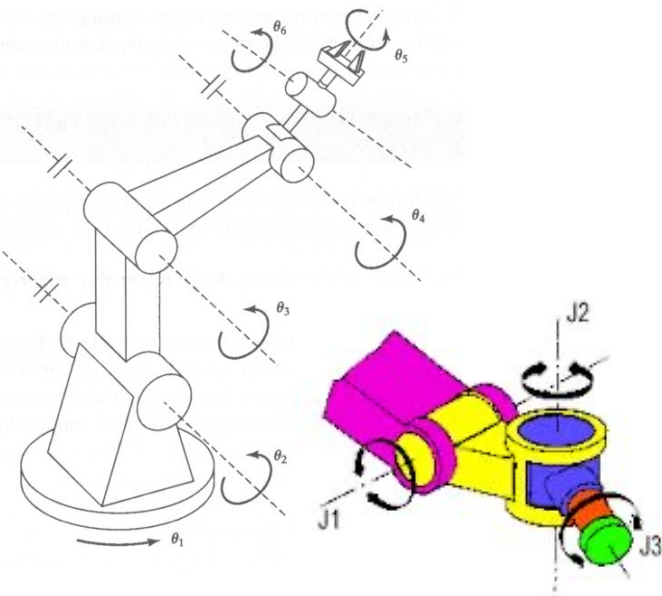


## ...δύο ακόμη σχεδιασμοί που επιδέχονται λύσεις «κλειστού» τύπου



### Ο λεγόμενος «καρπός Cincinatti - Milarcon»

Πρόκειται για παρόμοιο σχεδιασμό με τον σφαιρικό καρπό κατά το ότι οι τρεις άξονες περιστροφής τέμνονται - άρα το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα έχει λύση «κλειστού τύπου». Η διαφορά έγκειται στο ότι δεν είναι κάθετοι μεταξύ τους, πράγμα που επιτρέπει στον δεύτερο απεριόριστη περιστροφή.



Ο καρπός του διπλανού σχήματος έχει το χαρακτηριστικό ότι ο άξονας της «πρώτης» του περιστροφής είναι παράλληλος με τους άξονες των δύο «προηγούμενων» περιστροφών σε βραχίονα αρθρωτής μορφής. Και στην περίπτωση αυτή το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα έχει λύση «κλειστού τύπου».

