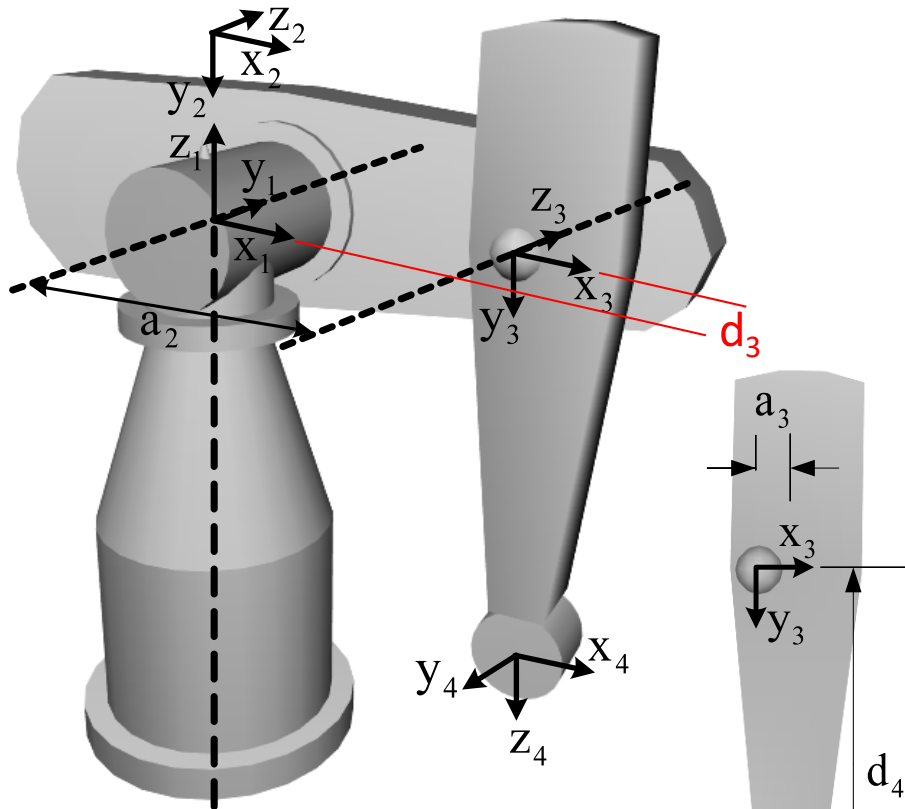


Παράδειγμα Το ευθύ κινηματικό πρόβλημα για το βιομηχανικό ρομπότ PUMA 560

Το PUMA 560 είναι ένας βραχίονας 6 βαθμών ελευθερίας με περιστροφικές αρθρώσεις.

Τα πλαίσια κάθε συνδέσμου, στο σχήμα, είναι σε θέσεις με μηδενικές γωνίες αρθρώσεων. Να βρεθούν οι κινηματικές εξισώσεις του βραχίονα .



Όταν όλα τα θ είναι // \Rightarrow ο βραχίονας είναι στην θέση 0

$\{i-1\} \rightarrow \{i\}$

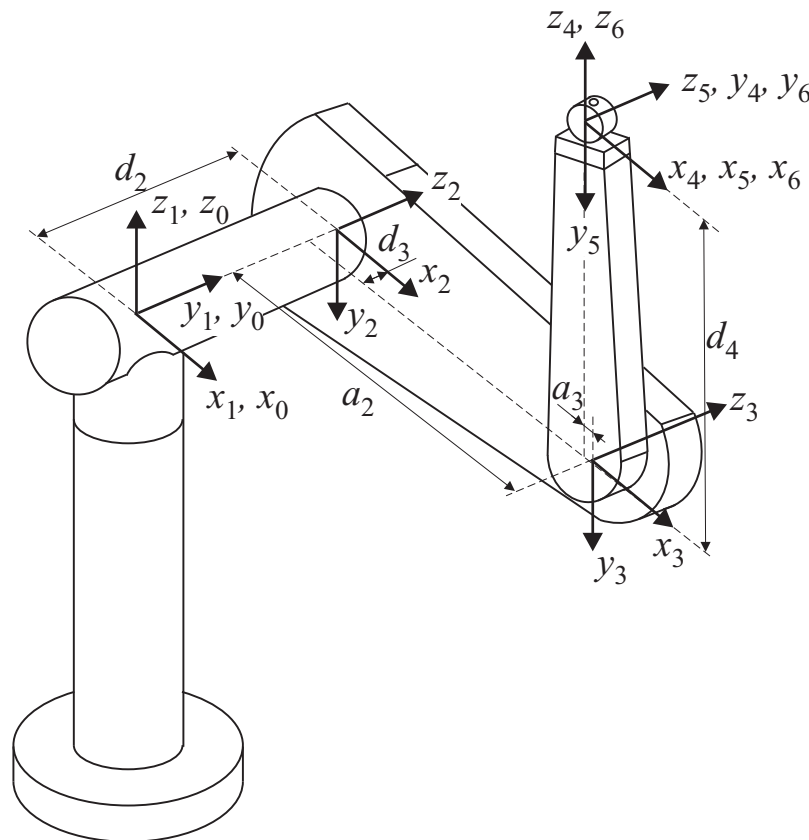
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	ϑ_i
1	0	0	0	ϑ_1
2	-90	0	0	ϑ_2
3	0	a_2	d_3	ϑ_3
4	-90	a_3	d_4	ϑ_4
5	90	0	0	ϑ_5
6	-90	0	0	ϑ_6

$$g_{i-1,i} = g_r(x, \alpha_{i-1}) g_p(x, a_{i-1}) g_r(z, \theta_i) g_p(z, d_i)$$



Δεν είναι λάθος να τοποθετήσει κάποιος τα πλαίσια με διαφορετικό τρόπο, αρκεί να ακολουθεί τις συμβάσεις που έχουμε αναφέρει π.χ. :

Τα πλαίσια κάθε συνδέσμου, στο σχήμα, είναι σε θέσεις με μηδενικές γωνίες αρθρώσεων **ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΑΠΟ ΑΥΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗΣ ΔΙΑΦΑΝΕΙΑΣ** οπότε και ο πίνακας θα είναι διαφορετικός.



{i-1} → {i}

Matrix	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
$T_1(\theta_1)$	0	0	θ_1	0
$T_2(\theta_2)$	$-\pi/2$	0	θ_2	d_2
$T_3(\theta_3)$	0	a_2	θ_3	d_3
$T_4(\theta_4)$	$\pi/2$	a_3	θ_4	d_4
$T_5(\theta_5)$	$-\pi/2$	0	θ_5	0
$T_6(\theta_6)$	$\pi/2$	0	θ_6	0

$$g_{i-1,i} = g_r(x, \alpha_{i-1}) g_p(x, a_{i-1}) g_r(z, \theta_i) g_p(z, d_i)$$

Επίσης σε αυτό το σχήμα θεωρώ ότι το πλαίσιο της δεύτερης άρθρωσης απέχει απόσταση d_2 από αυτό της πρώτης άρθρωσης (δες δεύτερη γραμμή του πίνακα). Τώρα ο πίνακας έχει περισσότερα μη μηδενικά στοιχεία στην στήλη d_i , το οποίο αυξάνει την μαθηματική πολυπλοκότητα των υπολογισμών.



D-H παράμετροι (κατά Craig)

	i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	ϑ_i
$\{i-1\} \rightarrow \{i\}$	1	0	0	0	ϑ_1
	2	-90	0	0	ϑ_2
	3	0	a_2	d_3	ϑ_3
	4	-90	a_3	d_4	ϑ_4
	5	90	0	0	ϑ_5
	6	-90	0	0	ϑ_6

$$g_{i-1,i} = g_r(x, \alpha_{i-1}) g_p(x, a_{i-1}) g_r(z, \theta_i) g_p(z, d_i)$$

$$g_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = g_{i-1,i}(q_i)$$

$$g_{01} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_{12} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_{23} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_{34} = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

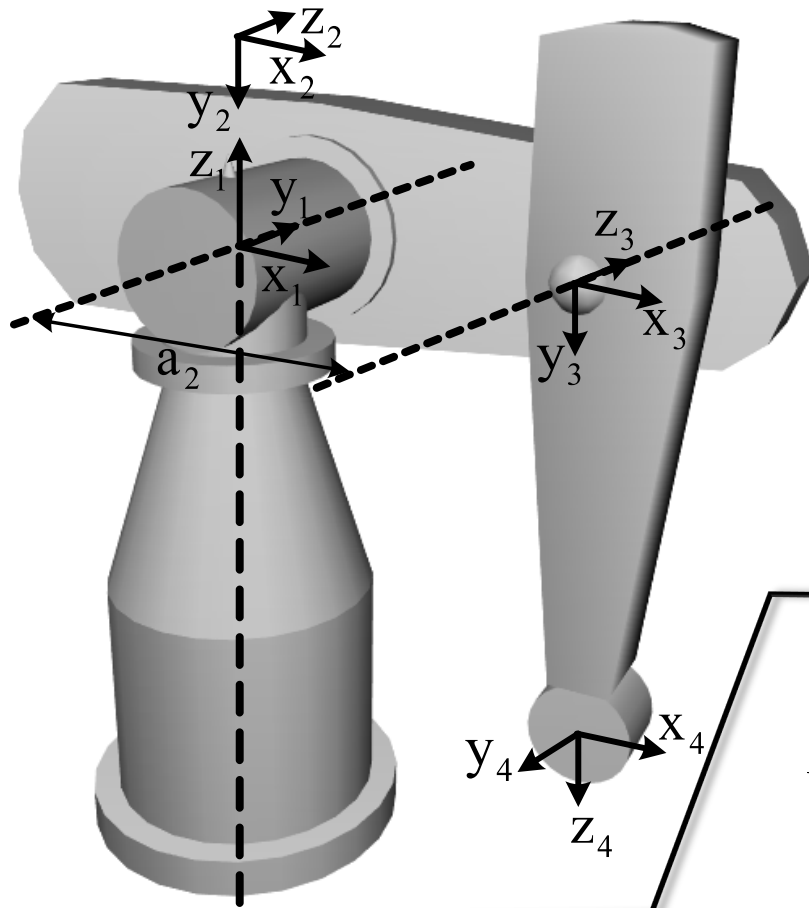
$$g_{45} = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_{56} = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_{06} = g_{01} g_{12} g_{34} g_{45} g_{56}$$

Πως βολεύει να γίνουν οι υπολογισμοί ?

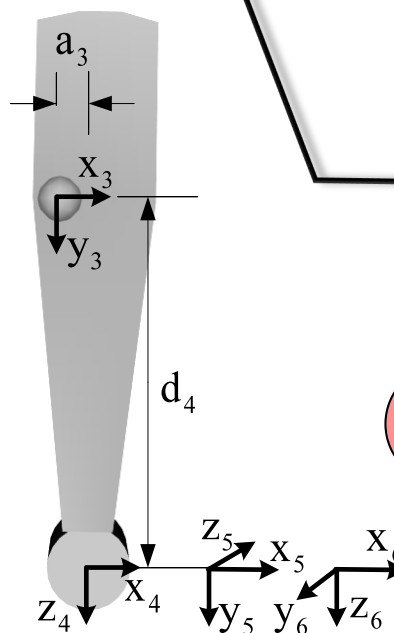




Οι άξονες των αρθρώσεων 2 και 3 είναι πάντα παράλληλοι έτσι αν πολλαπλασιάσουμε τους $g_{12}(q_2)$ και $g_{23}(q_3)$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τις τριγωνομετρικές εξισώσεις του αθροίσματος γωνιών: $C_{23}=C_2C_3-S_2S_3$, $S_{23}=C_2S_3+S_2C_3$ και να υπολογίσουμε τον g_{13} συναρτήσει των C_{23} , S_{23} :

$$g_{13} = \begin{bmatrix} C_{23} & -S_{23} & 0 & a_2 C_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -S_{23} & -C_{23} & 0 & -a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

οι άξονες 4, 5, 6 τέμνονται σε ένα σημείο (καρπός) και το σημείο αυτό αποτελεί και την αρχή των πλαισίων {4}, {5}, {6}. Άρα ενδείκνυται να υπολογίσουμε τον g_{46}



$$g_{46} = \begin{bmatrix} C_5 C_6 & -C_5 S_6 & -S_5 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ S_5 C_6 & -S_5 S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Τα στοιχεία του g_{16} δίνονται από τις εξισώσεις:

$$g_{16} = \begin{bmatrix} [{}^1r_{ij}] & {}^1p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} {}^1r_{11} \\ {}^1r_{21} \\ {}^1r_{31} \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} {}^1r_{12} \\ {}^1r_{22} \\ {}^1r_{32} \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} {}^1r_{13} \\ {}^1r_{23} \\ {}^1r_{33} \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} {}^1p_x \\ {}^1p_y \\ {}^1p_z \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} = g_{13} g_{34} g_{46}$$

$$\begin{aligned} {}^1r_{11} &= c_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - s_{23}s_5c_6 \\ {}^1r_{21} &= -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\ {}^1r_{31} &= -s_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - c_{23}s_5c_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^1r_{13} &= -c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5 \\ {}^1r_{23} &= s_4s_5 \\ {}^1r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^1r_{12} &= -c_{23}[c_4c_5c_6 + s_4s_6] + s_{23}s_5s_6 \\ {}^1r_{22} &= s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\ {}^1r_{32} &= s_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] + c_{23}s_5s_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^1p_x &= a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23} \\ {}^1p_y &= d_3 \\ {}^1p_z &= -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23} \end{aligned}$$



Τέλος τα στοιχεία του $\mathbf{g}_{06} = \mathbf{g}_{01}\mathbf{g}_{16}$ εκφράζουν τις κινηματικές εξισώσεις του ΡΥΜΑ 560 δηλαδή ορίζουν την θέση και τον προσανατολισμό του πλαισίου {6} σε σχέση με το πλαίσιο {0}, και δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\mathbf{g}_{06} = \mathbf{g}_{01}\mathbf{g}_{16} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11} & \mathbf{r}_{12} & \mathbf{r}_{13} & p_x \\ \mathbf{r}_{21} & \mathbf{r}_{22} & \mathbf{r}_{23} & p_y \\ \mathbf{r}_{31} & \mathbf{r}_{32} & \mathbf{r}_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{11} &= c_1 [c_{23} [c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6] - s_{23} s_5 c_6] + s_1 [s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6] \\ \mathbf{r}_{21} &= [s_1 [c_{23} [c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6] - s_{23} s_5 c_6] - c_1 [s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6] \\ \mathbf{r}_{31} &= -s_{23} [c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6] - c_{23} s_5 c_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{13} &= -c_1 [c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5] - s_1 s_4 s_5 \\ \mathbf{r}_{23} &= -s_1 [c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5] + c_1 s_4 s_5 \\ \mathbf{r}_{33} &= s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{12} &= c_1 [c_{23} [-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6] + s_{23} s_5 s_6] + s_1 [c_4 c_6 - s_4 c_5 s_6] \\ \mathbf{r}_{22} &= s_1 [c_{23} [-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6] + s_{23} s_5 s_6] - c_1 [c_4 c_6 - s_4 c_5 s_6] \\ \mathbf{r}_{32} &= -s_{23} [-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6] + c_{23} s_5 s_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_x &= c_1 [a_2 c_2 + a_3 c_{23} - d_4 s_{23}] - d_3 s_1 \\ p_y &= s_1 [a_2 c_2 + a_3 c_{23} - d_4 s_{23}] - d_3 c_1 \\ p_z &= -a_3 s_{23} - a_2 s_2 - d_4 c_{23} \end{aligned}$$

