

Κεφάλαιο 1

Κινηματική στερεού σώματος

Ο χειρισμός αντικειμένων και εργαλείων από ένα ρομποτικό βραχίονα σημαίνει ότι το ρομπότ πρέπει να είναι ικανό να τοποθετεί και να προσανατολίζει κατάλληλα το άκρο του στο χώρο εργασίας π.χ. για να βιδώσει ένα καπάκι, το ρομπότ θα πρέπει να κρατά το καπάκι με τον κατάλληλο προσανατολισμό. Επομένως στην ρομποτική είναι πρωταρχικά αναγκαίο να μπορούμε να περιγράψουμε θέσεις και προσανατολισμούς αντικειμένων, εργαλείων αλλά και του ίδιου του ρομπότ στον Καρτεσιανό χώρο, δηλαδή στον γνωστό τρισδιάστατο χώρο στον οποίο το ρομπότ εργάζεται. Η μελέτη της κινηματικής των ρομπότ έχει την βάση της στην μελέτη της κίνησης ενός στερεού σώματος η οποία περιλαμβάνει την μαθηματική περιγραφή της θέσης και του προσανατολισμού του στερεού σώματος σε κάθε χρονική στιγμή.

Με τον όρο στερεό σώμα εννοούμε ένα μη παραμορφώσιμο σώμα, δηλαδή, ένα στερεό σώμα ορίζεται σαν ένα σύνολο σωματιδίων των οποίων η απόσταση μεταξύ τους (για οποιοδήποτε δύο σωματίδια) παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη από τις κινήσεις του σώματος ή τις δυνάμεις που εφαρμόζονται πάνω στο σώμα.

1.1 Θέση σημείου του σώματος και ελεύθερα ανύσματα

Η κίνηση ενός σωματιδίου ή σημείου στον Ευκλείδειο χώρο περιγράφεται από την θέση του σημείου κάθε χρονική στιγμή αναφορικά με ένα αδρανειακό Καρτεσιανό πλαίσιο συντεταγμένων έστω $\{A\}$. Ειδικότερα, η τριάδα $\mathbf{p} = (x, y, z) \in \mathcal{R}^3$ των συντεταγμένων της θέσης του σημείου εκφράζει την προβολή της θέσης του σημείου στους άξονες του αδρανειακού πλαισίου. Η τροχιά του σημείου περιγράφεται από την παραμετροποιημένη καμπύλη $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{R}^3$. Η μαθηματική περιγραφή της θέσης ενός σημείου του

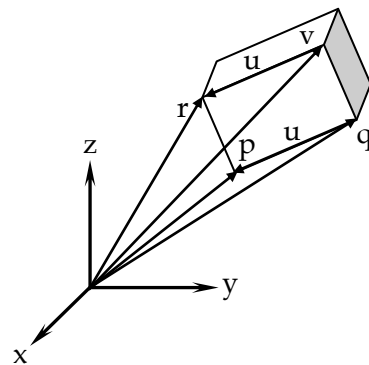
σώματος γίνεται είτε με το άνυσμα στήλη $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^3$ είτε με το ανυσματικό άθροισμα

$$p = x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z} \text{ όπου } \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ τα μοναδιαία ανύσματα του πλαισίου}$$

αναφοράς.

Η κίνηση ενός στερεού σώματος είναι η κίνηση του συνόλου των σωματιδίων ή σημείων που αποτελούν το σώμα έτσι ώστε αν p και q είναι δύο οποιαδήποτε σημεία του σώματος καθώς το σώμα κινείται οι θέσεις των σημείων p και q ικανοποιούν την σχέση $\|p(t) - q(t)\| = \|p(0) - q(0)\| = \text{σταθ.}$ όπου $\|\cdot\|$ το Ευκλείδειο μέτρο ή η νόρμα ενός ανύσματος. Το αποτέλεσμα της κίνησης είναι η μετατόπισή του στερεού σώματος σε μία νέα θέση και έναν νέο προσανατολισμό.

Αν p και q είναι δύο οποιαδήποτε σημεία του σώματος τότε το άνυσμα $u \in \mathcal{R}^3$ που συνδέει τα p και q ορίζεται σαν το κατευθυνόμενο τμήμα γραμμής που συνδέει τα δύο σημεία, δηλαδή $u = p - q \in \mathcal{R}^3$. Παρόλο που τόσο τα σημεία p και q όσο και το άνυσμα $u \in \mathcal{R}^3$ περιγράφονται από τις τριάδες των συντεταγμένων τους, η εννοιολογική διαφορά τους



είναι σημαντική.

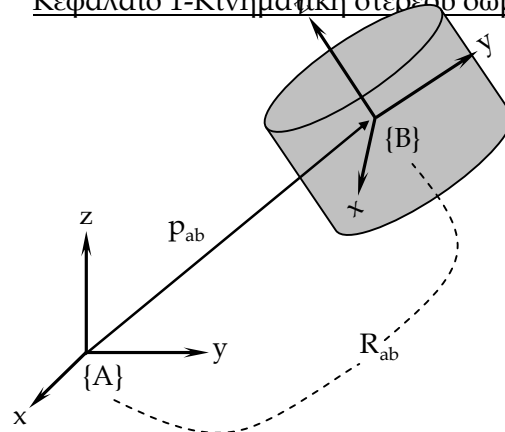
Σχήμα 1.1

Το άνυσμα $u \in \mathcal{R}^3$ που ορίζεται σαν την διαφορά των θέσεων δύο σημείων έχει διεύθυνση και μέτρο αλλά δεν είναι προσαρτημένο στο σώμα, εφόσον μπορεί να υπάρχουν και άλλες δυάδες σημείων του σώματος που να συνδέονται από το ίδιο άνυσμα έστω π.χ. οι θέσεις των σημείων του σώματος r και v είναι τέτοιες ώστε $r - v = u \in \mathcal{R}^3$ (σχήμα 1.1). Τα ανύσματα αυτά αποκαλούνται πολλές φορές ελεύθερα εφόσον μπορούν να τοποθετηθούν στον χώρο ελεύθερα χωρίς να αλλάξουν. Σε αντίθεση, τα ανύσματα που περιγράφουν θέσεις σημείων αλλάζουν με την μετατόπιση του στερεού σώματος και δεν πρέπει να συγχέονται με τα ελεύθερα ανύσματα.

1.2 Περιγραφή της θέσης και του προσανατολισμού ενός στερεού σώματος.

Η θέση και ο προσανατολισμός ενός στερεού σώματος στο χώρο αναφορικά με ένα αδρανειακό Καρτεσιανό πλαίσιο συντεταγμένων $\{A\}$ γίνεται με την περιγραφή της θέσης και του προσανατολισμού ενός Καρτεσιανού πλαισίου συντεταγμένων $\{B\}$ το οποίο στερεώνουμε σε ένα αυθαίρετο σημείο του σώματος, π.χ. στο κέντρο του σώματος (σχήμα 1.2). Το άνυσμα θέσης της αρχής του πλαισίου $\{B\}$ στο αδρανειακό πλαίσιο $\{A\}$ $p_{ab} \in \mathcal{R}^3$ περιγράφει

την θέση του στερεού σώματος και ο πίνακας στροφής R_{ab} του πλαισίου {B} σε σχέση με το πλαίσιο {A} τον προσανατολισμό του. Ο πίνακας στροφής R_{ab} είναι ένας πίνακας 3×3 ενώ η κατασκευή και οι ιδιότητές του περιγράφονται στην επόμενη παράγραφο.



Σχήμα 1.2

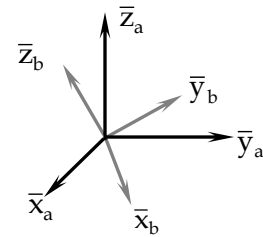
Επομένως, μια μορφή περιγραφής της

θέσης και του προσανατολισμού του στερεού σώματος στο χώρο αποτελείται από το ζεύγος (p_{ab}, R_{ab})

Σχόλιο: Στον διπλό δείκτη 'ab' που εμφανίζεται στον συμβολισμό της θέσης και του προσανατολισμού του σώματος το πρώτο στοιχείο είναι το Καρτεσιανό πλαίσιο αναφοράς στο οποίο γίνεται η περιγραφή ενώ το δεύτερο στοιχείο είναι το πλαίσιο που περιγράφεται.

1.2-1 Πίνακας στροφής

Ο πίνακας στροφής R_{ab} κατασκευάζεται από τα μοναδιαία ανύσματα του {B} έστω $\bar{x}_b, \bar{y}_b, \bar{z}_b$ εκφρασμένα στο {A}. Οι συντεταγμένες αυτών των ανυσμάτων στο {A} βρίσκονται από τις προβολές του κάθε μοναδιαίου ανύσματος πάνω στους τρεις άξονες του {A} (σχήμα 1.3). Η προβολή αυτή εκφράζεται με το εσωτερικό γινόμενο κάθε μοναδιαίου ανύσματος του {B} με κάθε μοναδιαίο άνυσμα του {A} έστω $\bar{x}_a, \bar{y}_a, \bar{z}_a$. Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε τα $\bar{x}_b, \bar{y}_b, \bar{z}_b$ στο {A}:



Σχήμα 1.3

$$x_{ab} := \begin{bmatrix} \bar{x}_a \cdot \bar{x}_b \\ \bar{y}_a \cdot \bar{x}_b \\ \bar{z}_a \cdot \bar{x}_b \end{bmatrix}, y_{ab} := \begin{bmatrix} \bar{x}_a \cdot \bar{y}_b \\ \bar{y}_a \cdot \bar{y}_b \\ \bar{z}_a \cdot \bar{y}_b \end{bmatrix}, z_{ab} := \begin{bmatrix} \bar{x}_a \cdot \bar{z}_b \\ \bar{y}_a \cdot \bar{z}_b \\ \bar{z}_a \cdot \bar{z}_b \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας στροφής κατασκευάζεται από τις παραπάνω τρεις στήλες

$$R_{ab} = [x_{ab} \quad y_{ab} \quad z_{ab}]$$

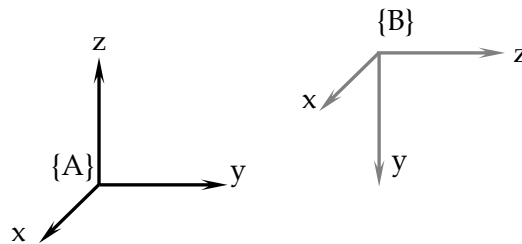
Κάθε στοιχείο του πίνακα στροφής είναι επομένως το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των μοναδιαίων ανυσμάτων (ή των αξόνων) του {A} και του {B}, δηλ. τα στοιχεία του πίνακα στροφής είναι τα $\cos \theta_{ij}, i = x_a, y_a, z_a \quad j = x_b, y_b, z_b$.

Στα εσωτερικά γινόμενα ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα και επομένως από τον ορισμό του πίνακα στροφής παρατηρούμε ότι $R_{ab} = (R_{ba})^T$. Δηλαδή ο προσανατολισμός του πλαισίου

{B} ως προς το {A} είναι ο ανάστροφος του προσανατολισμού του {A} ως προς το {B}. Επομένως κάθε γραμμή του πίνακα στροφής εκφράζει την προβολή κάθε μοναδιαίου άνυσματος του {A} $\bar{x}_a, \bar{y}_a, \bar{z}_a$ πάνω στους τρεις άξονες του πλαισίου {B}.

Παράδειγμα 1.1

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα πλαίσια {A} και {B}. Να βρεθεί ο πίνακας στροφής R_{ab} που περιγράφει τον προσανατολισμό του {B} ως προς το {A}.



Απάντηση: Για να βρούμε τον πίνακα στροφής R_{ab} απαιτείται ο υπολογισμός των x_{ab}, y_{ab}, z_{ab} . Σε αυτή την περίπτωση τα δύο πλαίσια συντεταγμένων έχουν παράλληλους άξονες ιδιότητα που μας επιτρέπει τον εύκολο υπολογισμό των x_{ab}, y_{ab}, z_{ab} . Πράγματι, από

το σχήμα λαμβάνουμε ότι $x_{ab} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ το οποίο εκφράζει το μοναδιαίο άνυσμα x του

πλασίου {B} εκφρασμένο στο πλαίσιο {A}. Με τον ίδιο τρόπο λαμβάνουμε ότι $y_{ab} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

και $z_{ab} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Επομένως, ο πίνακας στροφής R_{ab} είναι:

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2-2 Ιδιότητες του πίνακα στροφής

Έστω $R \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ είναι ένας πίνακας στροφής με στήλες $r_1, r_2, r_3 \in \mathfrak{R}^3$. Κάθε στήλη του πίνακα στροφής εκφράζει ένα μοναδιαίο άνυσμα ενός Καρτεσιανού πλαισίου

συντεταγμένων. Οι στήλες ενός πίνακα στροφής έχουν επομένως μέτρο μονάδα και είναι κάθετες μεταξύ τους, άρα ικανοποιούν τους εξής περιορισμούς:

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_j = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq j \\ 1, & \text{if } i = j \end{cases} \quad (1.1)$$

Η (1.1) γράφεται συνοπτικά ως εξής:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$$

Από αυτήν συνάγεται ότι $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ και $|\mathbf{R}| = \pm 1$.

Από την γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα δίνεται από την σχέση $|\mathbf{R}| = \mathbf{r}_1^T (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$ και εφόσον το σύστημα συντεταγμένων είναι δεξιόστροφο, $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1$. Επομένως, η ορίζουσα ενός πίνακα στροφής $|\mathbf{R}| = +1$. Οι ορθογώνιοι πίνακες με ορίζουσα -1 περιγράφουν την ανάκλαση ενός στερεού σώματος.

Ορισμός 1: Το σύνολο όλων των ορθογωνίων πινάκων διάστασης 3 με ορίζουσα +1 αποτελεί την ειδική ορθογώνια ομάδα η οποία συμβολίζεται με $SO(3)$ (Special Orthogonal) και η οποία περιγράφει τον χώρο των στροφών ενός στερεού σώματος:

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3} : \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}, |\mathbf{R}| = 1\}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

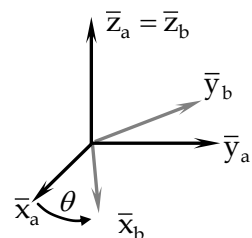
1. Είναι προφανές ότι ο μοναδιαίος πίνακας 3x3 εκφράζει την έλλειψη στροφής δηλαδή την μηδενική στροφή, $\mathbf{I}_3 \in SO(3)$.
2. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί από την ιδιότητα $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ ότι ο αντίστροφος του πίνακα στροφής ισούται με τον ανάστροφό του. Επομένως $\mathbf{R}_{ab}^{-1} = \mathbf{R}_{ab}^T = \mathbf{R}_{ba}$

1.2-3 Βασικοί πίνακες στροφής

Αν το πλαίσιο $\{B\}$ έχει προκύψει από στροφή του $\{A\}$, κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα z (σχήμα 1.4) ή γύρω από τον x ή y τότε ο πίνακας στροφής είναι αντίστοιχα:

$$Rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ -s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Rot(y, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}, Rot(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Οι πίνακες αυτοί είναι πίνακες βασικών στροφών και μία σύνθετη στροφή μπορεί να προέλθει από την κατάλληλη σύνθεση βασικών στροφών.



Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

$$Rot(i, \theta)^{-1} = Rot(i, -\theta) \quad i = x, y, z \quad (1.3)$$

Σχήμα 1.4

$$Rot(i, \theta_1)Rot(i, \theta_2) = Rot(i, \theta_1 + \theta_2) \quad i = x, y, z$$

1.2-4 Μετασχηματισμός συντεταγμένων της θέσης ενός σημείου με τον πίνακα στροφής

Ένας πίνακας στροφής χρησιμεύει στον μετασχηματισμό των συντεταγμένων ενός σημείου από ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο. Έστω η θέση ενός σημείου q στο πλαίσιο $\{B\}$ $q_b = [x_b \ y_b \ z_b]^T$ (σχ. 1.5) την οποία θέλουμε να εκφράσουμε στο $\{A\}$. Δηλαδή ζητάμε το

$$q_a = [x_a \ y_a \ z_a]^T$$

Οι συντεταγμένες του q_a δίνονται από τα εσωτερικά

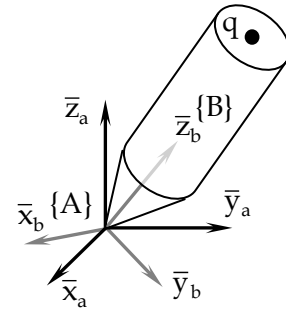
γινόμενα $x_a = \bar{x}_a \cdot q_b$, $y_a = \bar{y}_a \cdot q_b$, $z_a = \bar{z}_a \cdot q_b$ και αντικαθιστώντας το q_b στην μορφή του ανυσματικού αθροίσματος $q_b = x_b \bar{x}_b + y_b \bar{y}_b + z_b \bar{z}_b$ βρίσκουμε ότι

$q_a = [x_{ab} \ y_{ab} \ z_{ab}] q_b$. Τελικά:

$$q_a = R_{ab} q_b \quad (1.4)$$

Επομένως, ο πίνακας στροφής R_{ab} μετασχηματίζει τις συντεταγμένες ενός σημείου από ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο διαφορετικού προσανατολισμού.

Σχόλιο: Ο δείκτης που εμφανίζεται στον συμβολισμό της θέσης ενός σημείου όπως π.χ. στις θέσεις q_a , q_b είναι το Καρτεσιανό πλαίσιο αναφοράς στο οποίο γίνεται η περιγραφή του σημείου.



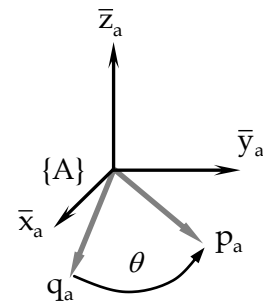
Σχήμα 1.5

1.2-5 Στροφή της θέσης ενός σημείου

Έστω η θέση ενός σημείου $q_a = [x_a \ y_a \ z_a]^T$ και ένας πίνακας στροφής R , π.χ. $R = Rot(z, \theta)$. Το αποτέλεσμα της εφαρμογής της στροφής R στην θέση q_a , είναι η νέα θέση

$$p_a = Rq_a \quad (1.5)$$

που έχει προέλθει από την στροφή του q_a κατά θ γύρω από τον άξονα z (σχ. 1.6). Μπορούμε να φανταστούμε τα q_a , p_a σαν την αρχική και την τελική θέση ενός σημείου του σώματος μετά από μία πεπερασμένη στροφή.



Σχήμα 1.6

1.2-6 Σύνθεση πινάκων στροφής

Έστω η θέση ενός σημείου p_a που προέρχεται από στροφή της θέσης ενός σημείου q_a κατά γωνία θ_1 γύρω από τον άξονα z ενός αδρανειακού πλαισίου και κατόπιν από στροφή κατά θ_2 γύρω από τον άξονα x του αδρανειακού πλαισίου. Η νέα θέση μετά την πρώτη στροφή σύμφωνα με την (1.5) θα είναι $q'_a = Rot(z, \theta_1)q_a$ η οποία με την επόμενη στροφή δίνει το άνυσμα της τελικής θέσης $p_a = Rot(x, \theta_2)q'_a \Rightarrow p_a = Rot(x, \theta_2)Rot(z, \theta_1)q_a$. Επομένως η σύνθετη στροφή δίνεται από την σχέση $R = Rot(x, \theta_2)Rot(z, \theta_1)$.

Έστω τώρα ο προσανατολισμός ενός πλαισίου $\{B\}$ ως προς το πλαίσιο $\{A\}$ ο οποίος έχει προέλθει από σύνθετη στροφή του $\{B\}$ ως εξής. Αρχικά το πλαίσιο $\{B\}$ ταυτίζεται με το πλαίσιο $\{A\}$. Από την αρχική αυτή θέση στρέφουμε το $\{B\}$ γύρω από τον άξονα z του $\{A\}$ κατά γωνία θ_1 και έπειτα γύρω από τον άξονα x του $\{A\}$ κατά γωνία θ_2 . Κάθε μοναδιαίο άνυσμα του πλαισίου $\{B\}$ εκτελεί την σύνθετη στροφή $Rot(x, \theta_2)Rot(z, \theta_1) = R_{ab}$ η οποία και αποτελεί τον τελικό προσανατολισμό του $\{B\}$. Επομένως, καταλήγουμε στον εξής κανόνα σύνθεσης στροφών:

Πρώτος κανόνας σύνθεσης στροφών: *Η σύνθετη στροφή που ορίζεται από μια σειρά στροφών γύρω από τους άξονες του αδρανειακού πλαισίου σχηματίζεται με τον κατά σειρά πολλαπλασιασμό από αριστερά με τον πίνακα της αντίστοιχης βασικής στροφής.*

Έστω τώρα ο προσανατολισμός ενός πλαισίου $\{B\}$ ως προς το πλαίσιο $\{A\}$ ο οποίος έχει προέλθει από σύνθετη στροφή του $\{B\}$ ως εξής. Αρχικά το πλαίσιο $\{B\}$ ταυτίζεται με το πλαίσιο $\{A\}$. Από την αρχική αυτή θέση στρέφουμε το $\{B\}$ γύρω από τον άξονα z του $\{A\}$ που συμπίπτει με τον άξονα z του $\{B\}$ κατά γωνία θ_1 και έπειτα γύρω από τον (νέο) άξονα x του

{B} κατά γωνία θ_2 . Για να βρούμε την σύνθετη στροφή θεωρούμε τις αντίθετες βασικές στροφές με το {B} ακίνητο στην τελική του θέση και το {A} να περιστρέφεται γύρω από τους ακίνητους άξονες του {B}. Δηλαδή, με άμεση εφαρμογή του πρώτου κανόνα σύνθεσης στροφών βρίσκουμε ότι $R_{ba} = \text{Rot}(x, -\theta_2)\text{Rot}(z, -\theta_1)$. Τέλος αντιστρέφουμε και βρίσκουμε τον προσανατολισμό του {B} με χρήση της (1.3) $R_{ab} = R_{ba}^{-1} = \text{Rot}(z, \theta_1)\text{Rot}(x, \theta_2)$. Έτσι, καταλήγουμε στον εξής κανόνα σύνθεσης στροφών:

Δεύτερος κανόνας σύνθεσης στροφών: *Η σύνθετη στροφή που ορίζεται από μια σειρά στροφών γύρω από τους άξονες του κινούμενου πλαισίου σχηματίζεται με τον κατά σειρά πολλαπλασιασμό από δεξιά με τον πίνακα της αντίστοιχης βασικής στροφής.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Ο προσανατολισμός του πλαισίου {B} που προέκυψε από στροφές γύρω από τους άξονες του κινούμενου πλαισίου και δίνεται π.χ. όπως παραπάνω από το γινόμενο $\text{Rot}(z, \theta_1)\text{Rot}(x, \theta_2)$, θα μπορούσε να προέλθει από σύνθετη στροφή ως προς τους άξονες του αδρανειακού πλαισίου, δηλαδή, από την αρχική θέση στρέφουμε το {B} γύρω από τον άξονα x του {A} κατά γωνία θ_2 και έπειτα γύρω από τον άξονα z του {A} κατά γωνία θ_1 . Επομένως, σε μια σύνθετη στροφή, η σειρά των στροφών από δεξιά προς τα αριστερά ορίζει στροφές γύρω από τους άξονες του αδρανειακού συστήματος και η σειρά των στροφών από αριστερά προς τα δεξιά ορίζει στροφές γύρω από τους άξονες του κινούμενου πλαισίου.

Στην σύνθεση στροφών είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι η **αντιμεταθετική ιδιότητα δεν ισχύει**. Αν αντιμεταθέσουμε τις στροφές από τις οποίες προήλθε π.χ. η θέση $p_a = \text{Rot}(x, \theta_2)\text{Rot}(z, \theta_1)q_a$ δηλαδή αν στρέψουμε την θέση q_a κατά θ_2 γύρω από τον άξονα x του αδρανειακού πλαισίου και κατόπιν κατά γωνία θ_1 γύρω από τον άξονα z του αδρανειακού πλαισίου η θέση που προκύπτει $\text{Rot}(z, \theta_1)\text{Rot}(x, \theta_2)q_a$ είναι διαφορετική από την p_a .

Αν τώρα ένα πλαίσιο {C} έχει προσανατολισμό R_{bc} ως προς ένα πλαίσιο {B} και το {B} έχει προσανατολισμό R_{ab} ως προς ένα πλαίσιο {A} τότε ο προσανατολισμός του {C} ως προς {A} βρίσκεται από την σχέση:

$$R_{ac} = R_{ab}R_{bc} \tag{1.6}$$

Πράγματι, αν η θέση ενός σημείου είναι γνωστή στο πλαίσιο {C}, έστω q_c , τότε σύμφωνα με την (1.4), η έκφραση του σημείου αυτού στο πλαίσιο {A} είναι $q_a = R_{ac}q_c$ και στο πλαίσιο {B} $q_b = R_{bc}q_c$. Επιπλέον, η θέση q_b εκφρασμένη στο πλαίσιο {A} δίνεται από την σχέση $q_a = R_{ab}q_b$ και αντικαθιστώντας την q_b βρίσκουμε $q_a = R_{ab}R_{bc}q_c$ η οποία σε συνδυασμό με την $q_a = R_{ac}q_c$ δίνει την σχέση σύνθεσης $R_{ac} = R_{ab}R_{bc}$.

1.3 Εναλλακτικοί τρόποι περιγραφής προσανατολισμού

Ο προσανατολισμός ενός πλαισίου {B} ως προς ένα πλαίσιο {A} μπορεί να περιγραφεί με άλλους τρόπους εκτός από τον πίνακα στροφής. Οι τρόποι αυτοί εμπλέκουν τρεις μόνο παραμέτρους και ονομάζονται τοπικές παραμετροποιήσεις ενός προσανατολισμού. Πράγματι, τα εννέα στοιχεία του πίνακα στροφής λόγω των ιδιοτήτων του πίνακα στροφής υπόκεινται στους έξι περιορισμούς (1.1) και επομένως μόνο τρία από τα στοιχεία αυτά είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Οι τοπικές παραμετροποιήσεις περιέχουν **ιδιάζοντα σημεία**, δηλαδή **σε κάποιες τιμές του πίνακα στροφής αντιστοιχούν άπειρες τιμές των παραμέτρων προσανατολισμού**.

1.3-1 Γωνίες περιστροφής γύρω από τους άξονες του ακίνητου πλαισίου αναφοράς

Αν θεωρήσουμε ότι αρχικά το πλαίσιο {B} ταυτίζεται με το πλαίσιο {A} και το στρέψουμε γύρω από τον άξονα x του {A} κατά γωνία γ , έπειτα το στρέψουμε γύρω από τον άξονα y του {A} κατά γωνία β και μετά γύρω από τον άξονα z του {A} κατά γωνία α , καταλήγουμε σε ένα πλαίσιο με προσανατολισμό $R_{ab}(\gamma, \beta, \alpha)$. Εφόσον όλες οι στροφές είναι βασικές στροφές που γίνονται γύρω από τους κύριους άξονες του ακίνητου συστήματος, η σύνθετη στροφή βρίσκεται εύκολα με τον κατά σειρά πολλαπλασιασμό από αριστερά με τον πίνακα της αντίστοιχης βασικής στροφής, δηλαδή:

$$R_{ab}(\gamma, \beta, \alpha)_{XYZ} = \text{Rot}(z, \alpha)\text{Rot}(y, \beta)\text{Rot}(x, \gamma)$$

$$R_{ab}(\gamma, \beta, \alpha)_{XYZ} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Οι τρεις γωνίες μπορούν να περιγράψουν πλήρως τον προσανατολισμό και καλούνται γωνίες XYZ γύρω από σταθερούς άξονες. Διαφορετικά διατεταγμένα σύνολα αξόνων περιστροφής (π.χ. ZYZ) καταλήγουν σε άλλες παραμετροποιήσεις αυτής της κατηγορίας. Αυτός ο τρόπος περιγραφής του προσανατολισμού δεν είναι δόκιμος στην Ρομποτική.

1.3-2 Γωνίες Euler

Ο τρόπος περιγραφής του προσανατολισμού με τρεις γωνίες Euler είναι ο συνηθέστερος στα βιομηχανικά ρομπότ και βρίσκεται ως εξής. Αν θεωρήσουμε ότι αρχικά το πλαίσιο {B} ταυτίζεται με το πλαίσιο {A} και το στρέψουμε γύρω από τον άξονα z του {B} κατά γωνία α (η γύρω από τον άξονα z του {A} που συμπίπτει με τον άξονα z του {B} στην αρχή), έπειτα το στρέψουμε γύρω από τον (νέο) άξονα y του {B} κατά γωνία β και μετά γύρω από τον (νέο) άξονα x του {B} κατά γωνία γ , καταλήγουμε σε ένα πλαίσιο με προσανατολισμό $R_{ab}(\alpha, \beta, \gamma)$. Εφόσον όλες οι στροφές είναι βασικές στροφές που γίνονται γύρω από τους κύριους άξονες του κινούμενου συστήματος η σύνθετη στροφή βρίσκεται με τον κατά σειρά πολλαπλασιασμό από δεξιά με τον πίνακα της αντίστοιχης βασικής στροφής, δηλαδή:

$$R_{ab}(\alpha, \beta, \gamma)_{ZYX} = \text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, \beta) \text{Rot}(x, \gamma).$$

Οι τρεις γωνίες μπορούν να περιγράψουν πλήρως τον προσανατολισμό και καλούνται γωνίες Euler ZYX. Γενικά, οι γωνίες Euler αντιστοιχούν σε βασικές στροφές γύρω από τους κύριους άξονες του κινούμενου συστήματος. Οι γωνίες **Euler ZYX λέγονται επίσης και γωνίες roll, pitch, yaw**. Παρατηρείστε ότι καταλήγουν στον ίδιο πίνακα στροφής με τις (γ, β, α) XYZ γύρω από σταθερούς άξονες (1.7). Αναλυτικά:

$$R_{ab}(\alpha, \beta, \gamma)_{ZYX} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Ένα **ιδιάζον σημείο** στην περιγραφή με γωνίες **Euler ZYX** είναι ο προσανατολισμός στον οποίο αντιστοιχεί η $\beta = -\pi/2$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι γωνίες της μορφής $(\alpha, -\pi/2, \gamma)$ δίνουν πίνακα στροφής

$$R_{ab}(\alpha, -\frac{\pi}{2}, \gamma)_{ZYX} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\alpha + \gamma) & -\cos(\alpha + \gamma) \\ 0 & \cos(\alpha + \gamma) & -\sin(\alpha + \gamma) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \psi & -\cos \psi \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Η ιδιάζουσα αυτή περίπτωση σημαίνει ότι σε ένα μεταβαλλόμενο προσανατολισμό $R(t)$, η συνεχής και ομαλή απεικόνιση των γωνιών Euler ZYX σαν συνάρτηση του προσανατολισμού R μπορεί να χαθεί στο σημείο ψ διότι υπάρχουν άπειρες λύσεις για τις γωνίες α, γ που ικανοποιούν την σχέση $\psi = \alpha + \gamma$

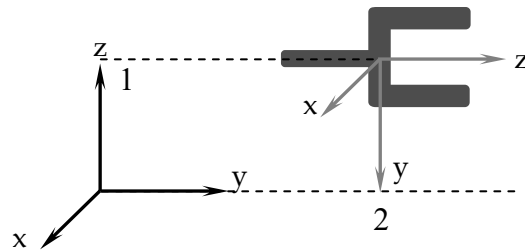
Άλλες συνήθεις παραμετροποιήσεις γωνιών Euler χρησιμοποιούν διαφορετικά διατεταγμένα σύνολα αξόνων περιστροφής και η πιο συνηθισμένη είναι η περιγραφή με γωνίες **Euler ZYZ**: $R_{ab}(\alpha, \beta, \gamma)_{ZYZ} = \text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, \beta) \text{Rot}(z, \gamma)$ και αναλυτικά :

$$R_{ab}(\alpha, \beta, \gamma)_{ZYZ} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Ιδιάζον σημείο στην περιγραφή με γωνίες Euler ZYZ είναι ο προσανατολισμός $R=I$. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι γωνίες της μορφής $(\alpha, 0, -\alpha)$ δίνουν $R_{ab}(\alpha, 0, -\alpha)_{ZYZ} = I$ και άρα υπάρχουν άπειρες περιγραφές για τον μοναδιαίο προσανατολισμό. Επομένως σε ένα μεταβαλλόμενο προσανατολισμό $R(t)$ η συνεχής και ομαλή απεικόνιση των γωνιών Euler ZYZ σαν συνάρτηση του προσανατολισμού R μπορεί να χαθεί στο σημείο $R=I$.

Παράδειγμα 1.2

Περιγράψτε την θέση και τον προσανατολισμό της αρπάγης του ρομπότ στο σχήμα με: (i) το άνυσμα θέσης και τις γωνίες στροφής γύρω από τους σταθερούς XYZ άξονες, (ii) το άνυσμα θέσης και τις ZYZ γωνίες Euler, (iii) το άνυσμα θέσης και τον πίνακα στροφής.

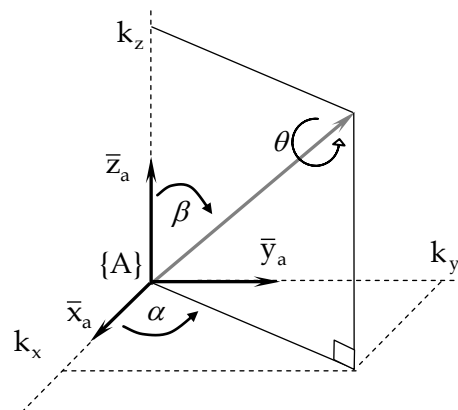


Απάντηση:

$$(i) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, (-90^\circ \ 0 \ 0), (ii) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, (90^\circ \ 90^\circ \ -90^\circ), (iii) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3-3 Γωνία στροφής γύρω από ισοδύναμο άξονα.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Euler κάθε προσανατολισμός $R \in SO(3)$ μπορεί να εκφραστεί από μία στροφή γύρω από έναν κατάλληλο σταθερό άξονα $k \in \mathfrak{R}^3$ κατά μία γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$. Έστω $k = [k_x \ k_y \ k_z]^T$ είναι ένα μοναδιαίο άνυσμα εκφρασμένο στο πλαίσιο $\{A\}$ γύρω από το οποίο θέλουμε να στραφούμε κατά γωνία θ (σχήμα 1.7).



Σχήμα 1.7

Ο ευκολότερος τρόπος για να παράγουμε τον πίνακα στροφής $R_{k,\theta}$ είναι να στρέψουμε το άνυσμα k ώστε να ταυτιστεί με έναν από τους κύριους άξονες του $\{A\}$ έστω τον z , μετά να στραφούμε κατά γωνία θ και έπειτα να

στρέψουμε τον k πίσω στην θέση του. Σύμφωνα με το σχήμα η ταύτιση του k με τον z γίνεται με μία στροφή γύρω από τον z κατά $-\alpha$ ακολουθούμενη με μία στροφή γύρω από τον y κατά γωνία $-\beta$. Καθώς όλες οι στροφές γίνονται γύρω από τους άξονες του σταθερού πλαισίου $\{A\}$ ο πίνακας στροφής δίνεται από την παρακάτω σύνθεση βασικών στροφών:

$$R_{k,\theta} = \text{Rot}(z,\alpha)\text{Rot}(y,\beta)\text{Rot}(z,\theta)\text{Rot}(y,-\beta)\text{Rot}(z,-\alpha)$$

Μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι: $\sin\alpha = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \cos\alpha = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}},$

$$\sin\beta = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \cos\beta = k_z$$

και αντικαθιστώντας αυτά τα μεγέθη στην παραπάνω έκφραση μετά από πράξεις μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$R_{k,\theta} = \begin{bmatrix} k_x^2 v_\theta + c_\theta & k_x k_y v_\theta - k_z s_\theta & k_x k_z v_\theta + k_y s_\theta \\ k_x k_y v_\theta + k_z s_\theta & k_y^2 v_\theta + c_\theta & k_y k_z v_\theta - k_x s_\theta \\ k_x k_z v_\theta - k_y s_\theta & k_y k_z v_\theta + k_x s_\theta & k_z^2 v_\theta + c_\theta \end{bmatrix} \text{ όπου } v_\theta = 1 - c_\theta \quad (1.6)$$

Έστω ένας πίνακας $R \in SO(3)$ με στοιχεία (r_{ij}) , τότε στην ισοδύναμη έκφραση άξονα-γωνίας, ο άξονας περιστροφής k και η γωνία θ , αποδεικνύεται ότι δίνονται από τις σχέσεις:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\text{Tr}(\mathbf{R}) - 1}{2}\right), k = \frac{1}{2 \sin\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

όπου $\text{Tr}(\mathbf{R})$ είναι το ίχνος του πίνακα R , δηλαδή $\text{Tr}(\mathbf{R}) = r_{11} + r_{22} + r_{33}$.

Παρατηρούμε ότι στην εύρεση του θ θα μπορούσαν να επιλεγούν τιμές $\theta \pm 2\pi n$ ή $-\theta \pm 2\pi n$ και επομένως η αντιστοιχία του πίνακα στροφής με την έκφραση άξονα-γωνίας δεν είναι μοναδική. Εάν στις προηγούμενες σχέσεις επιλεχθεί σαν γωνία η $2\pi - \theta$ τότε ο άξονας που βρίσκουμε είναι ο $-k$. Επίσης, αν $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, $\text{Tr}(\mathbf{R}) = 3$, και άρα $\theta = 0$ και ο k μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα. Επομένως:

1. Η περιγραφή ενός προσανατολισμού με μια γωνία γύρω από ισοδύναμο άξονα **δεν είναι μοναδική**: $R_{k,\theta} = R_{-k,-\theta}$.
2. **Ιδιάζοντα σημεία**: Για $R_{k,\theta} = \mathbf{I}$, $\theta = 0$, και τότε ο άξονας περιστροφής k μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα.

Παράδειγμα 1.3

Ένα πλαίσιο {B} έχει προέλθει από ένα πλαίσιο {A} με δύο στροφές ως προς άξονες που ορίζονται με τον εξής τρόπο: η πρώτη στροφή γίνεται γύρω από ένα γενικευμένο άξονα k κατά γωνία θ και η δεύτερη στροφή γύρω από τον άξονα z του κινούμενου πλαισίου κατά γωνία φ. Ο γενικευμένος άξονας k προκύπτει από την στροφή του άξονα y του {A} γύρω από τον z κατά γωνία ψ. Βρείτε τον προσανατολισμό R_{ab} συναρτήσει των γωνιών ψ, θ, φ.

Απάντηση: Ο γενικευμένος άξονας k προκύπτει από την στροφή του άξονα y του {A} με

μοναδιαίο άνυσμα $\bar{y}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ γύρω από τον z κατά γωνία ψ και επομένως δίνεται από την

σχέση:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_\psi \\ c_\psi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$$

Θέτουμε στην (1.6) τις συντεταγμένες του k και βρίσκουμε ότι η πρώτη στροφή γύρω από τον άξονα k κατά γωνία θ δίνεται από την σχέση:

$$R(\psi, \theta) = \begin{bmatrix} s_\psi^2 v_\theta + c_\theta & -s_\psi c_\psi v_\theta & c_\psi s_\theta \\ -s_\psi c_\psi v_\theta & c_\psi^2 v_\theta + c_\theta & s_\psi s_\theta \\ -c_\psi s_\theta & -s_\psi s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}$$

Εφόσον η δεύτερη στροφή ορίζεται γύρω από τον άξονα z του κινούμενου πλαισίου κατά γωνία φ ο τελικός προσανατολισμός R_{ab} θα δίνεται από την σχέση:

$$R_{ab}(\psi, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} s_\psi^2 v_\theta + c_\theta & -s_\psi c_\psi v_\theta & c_\psi s_\theta \\ -s_\psi c_\psi v_\theta & c_\psi^2 v_\theta + c_\theta & s_\psi s_\theta \\ -c_\psi s_\theta & -s_\psi s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.4 Ομογενής μετασχηματισμός ενός στερεού σώματος

Η περιγραφή της θέσης και του προσανατολισμού ενός στερεού σώματος στο χώρο αποτελείται από το ζεύγος $(\mathbf{p}_{ab}, R_{ab})$ όπου $\mathbf{p}_{ab} \in \mathcal{R}^3$ είναι η θέση του σημείου της αρχής του πλαισίου {B} στο πλαίσιο {A} και R_{ab} ο προσανατολισμός του {B} σε σχέση με το πλαίσιο {A}.

Ορισμός 2: Το σύνολο των θέσεων ενός στερεού σώματος στον τρισδιάστατο χώρο ορίζει τον **μορφικό χώρο ενός στερεού σώματος** και προκύπτει από το Καρτεσιανό γινόμενο των

χώρων \mathfrak{R}^3 και $SO(3)$. Ο χώρος αυτός αποτελεί μία ειδική Ευκλείδεια ομάδα η οποία συμβολίζεται με $SE(3)$ (Special Euclidean):

$$SE(3) = \{(\mathbf{p}, \mathbf{R}): \mathbf{p} \in \mathfrak{R}^3, \mathbf{R} \in SO(3)\} = \mathfrak{R}^3 \times SO(3)$$

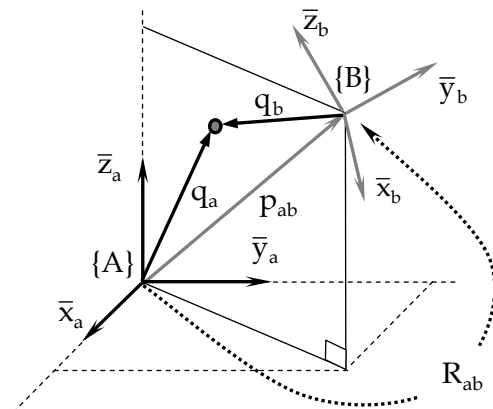
Έστω $\mathbf{q}_b = [x_b \ y_b \ z_b]^T$ η θέση ενός σημείου q στο πλαίσιο $\{B\}$ (Σχήμα 1.7) την οποία θέλουμε να εκφράσουμε στο $\{A\}$ όταν γνωρίζουμε ότι τα δύο πλαίσια σχετίζονται από το ζεύγος θέσης προσανατολισμού $(\mathbf{p}_{ab}, \mathbf{R}_{ab})$. Εύκολα διαπιστώνεται (σχ. 1.8) ότι το ζητούμενο $\mathbf{q}_a = [x_a \ y_a \ z_a]^T$ δίνεται από την πρόσθεση του \mathbf{p}_{ab} και του \mathbf{q}_b σύμφωνα με την σύμβαση που ισχύει για την εκτέλεση αλγεβρικών πράξεων μεταξύ των συντεταγμένων ανυσμάτων.

Η σύμβαση εκτέλεσης αλγεβρικών πράξεων μεταξύ ανυσμάτων απαιτεί όλα τα ανύσματα να περιγράφονται στο ίδιο Καρτεσιανό πλαίσιο αναφοράς. Στην περίπτωση των ελεύθερων ανυσμάτων για τα οποία ορίζονται μόνο το μέτρο και η κατεύθυνσή τους και όχι η απόλυτη θέση τους στον χώρο, η σύμβαση αυτή απαιτεί την περιγραφή σε παράλληλα συστήματα συντεταγμένων δηλαδή σε πλαίσια με άξονες παράλληλους με το πλαίσιο αναφοράς.

Επομένως η ζητούμενη θέση $\mathbf{q}_a = [x_a \ y_a \ z_a]^T$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση μετασχηματισμού:

$$\mathbf{q}_a = \mathbf{R}_{ab}\mathbf{q}_b + \mathbf{p}_{ab} \quad (1.8)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός δεν είναι καθαρά γραμμικός λόγω της ύπαρξης του όρου πόλωσης \mathbf{p}_{ab} στην (1.8) αλλά συγγενικός του γραμμικού και ονομάζεται γραμμικός με πόλωση (linear affine). Γενικά, αν $\mathbf{R} \in SO(3)$, ο μετασχηματισμός $\mathbf{q} = \mathbf{R}\mathbf{q} + \mathbf{p}$, ορίζει μία κίνηση στερεού σώματος.



Σχήμα 1. 8

Η σχέση (1.8) περιγράφεται συνοπτικά από την **ομογενή έκφρασή** της:

$$\mathbf{q}_a = \mathbf{g}_{ab}\mathbf{q}_b \quad (1.9)$$

όπου $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b \in \mathcal{R}^4$ είναι η ομογενής έκφραση της θέσης σημείων η οποία έχει σαν τέταρτο στοιχείο την μονάδα $\mathbf{q}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_b \\ 1 \end{bmatrix}$, και ο τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{g}_{ab} \in SE(3)$ διάστασης 4 συντίθεται από το ζεύγος $(\mathbf{p}_{ab}, \mathbf{R}_{ab})$ σε ειδική δομή και ονομάζεται **πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού**.

$$\mathbf{g}_{ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ab} & \mathbf{p}_{ab} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

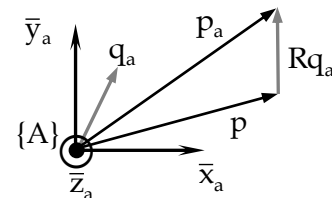
1. Τα σύμβολα με έντονο τύπο π.χ. $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b \in \mathcal{R}^4$ στην (1.9), θα αναπαριστούν εφεξής θέση σημείων σε ομογενή έκφραση. Οι συντεταγμένες τους ονομάζονται ομογενείς συντεταγμένες και έχουν σαν τέταρτο στοιχείο τους την μονάδα.
2. Ο ομογενής μετασχηματισμός που εισάγεται εδώ είναι ειδική περίπτωση του ομογενούς μετασχηματισμού που χρησιμοποιείται ευρέως στην Γραφική με Υπολογιστές ο οποίος έχει την μορφή:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ \mathbf{f}_{1 \times 3} & s_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{περιστροφή} & \text{μεταφορά} \\ \text{προοπτική} & \text{κλίμακα} \end{bmatrix}$$

3. Όπως συνάγεται από την (1.9) ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού \mathbf{g}_{ab} μετασχηματίζει τις συντεταγμένες ενός σημείου από ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο.

4. Έστω η θέση ενός σημείου (σχήμα 1.9),

$\mathbf{q}_a = [x_a \ y_a \ z_a]^T$ και ένας πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$. Το αποτέλεσμα της εφαρμογής του \mathbf{g} στο σημείο \mathbf{q}_a , δηλαδή η $\mathbf{g}\mathbf{q}_a$ είναι



Σχήμα 1.9

το νέο σημείο $\mathbf{p}_a = \mathbf{g}\mathbf{q}_a$ σε ομογενείς συντεταγμένες ή το νέο σημείο $\mathbf{p}_a = \mathbf{R}\mathbf{q}_a + \mathbf{p}$ που έχει προέλθει από την στροφή του \mathbf{q}_a κατά \mathbf{R} και μεταφορά του κατά \mathbf{p} . (Στο παράδειγμα του σχήματος η στροφή \mathbf{R} γίνεται γύρω από τον z έτσι ώστε το \mathbf{q}_a να παραλληλιστεί με τον άξονα y .)

5. Ένας ομογενής μετασχηματισμός μεταφοράς (μηδενικής στροφής) έχει την δομή

$\mathbf{g}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$ όπου \mathbf{I}_3 ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης τρία.

6. Ένας ομογενής μετασχηματισμός στροφής (μηδενικής μεταφοράς) έχει την δομή

$$\mathbf{g}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης τέσσερα $\mathbf{I}_4 \in SE(3)$ είναι ένας ομογενής μετασχηματισμός που αφήνει αμετάβλητο το άνυσμα στο οποίο δρα δηλαδή είναι ένας μετασχηματισμός μηδενικής μετατόπισης (μηδενικής μεταφοράς και στροφής).

8. Η γενική μορφή ενός ομογενούς μετασχηματισμού $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$ δίνεται από την σύνθεση μιας στροφής και μίας μεταφοράς, δηλαδή, $\mathbf{g} = \mathbf{g}_p \mathbf{g}_r$ η οποία για την υλοποίησή της μπορεί να οριστεί είτε στο αδρανειακό είτε στο κινούμενο πλαίσιο.

9. Η ομογενής έκφραση $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^4$ ενός ελεύθερου ανύσματος έχει σαν τέταρτο στοιχείο της το μηδέν. Ένα ελεύθερο άνυσμα ορίζεται από την διαφορά των θέσεων δύο σημείων (π.χ. $\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{q} \in \mathcal{R}^4$). Το αποτέλεσμα της εφαρμογής ενός ομογενούς μετασχηματισμού \mathbf{g} στο ελεύθερο άνυσμα \mathbf{u} , είναι ένα νέο ελεύθερο άνυσμα $\mathbf{g}\mathbf{u}$ που έχει προέλθει από την στροφή του \mathbf{u} κατά \mathbf{R} .

Η διαφορά του τετάρτου στοιχείου στην ομογενή έκφραση των θέσεων σημείων και των ελεύθερων ανυσμάτων επιβάλλει κάποιους απλούς κανόνες σύνταξης:

1. Το άθροισμα ή η διαφορά ελεύθερων ανυσμάτων είναι ελεύθερα ανύσματα.
2. Το άθροισμα ενός ελεύθερου ανύσματος και μιας θέσης σημείου είναι θέση σημείου.
3. Η διαφορά μεταξύ δύο θέσεων σημείων είναι ελεύθερο άνυσμα.
4. Το άθροισμα δύο θέσεων σημείων δεν έχει νόημα.

Παράδειγμα 1.4

Έστω \mathbf{g}_p ένας ομογενής μετασχηματισμός καθαρής μετατόπισης και \mathbf{g}_r ένας ομογενής μετασχηματισμός καθαρής στροφής.

(i) Είναι ο $\mathbf{g}_r \mathbf{g}_p$ ομογενής μετασχηματισμός στερεού σώματος;

(ii) Είναι ο $\mathbf{g}_r \mathbf{g}_p - \mathbf{g}_p \mathbf{g}_r$ ομογενής μετασχηματισμός στερεού σώματος;

$$\text{Απάντηση: (i) } \mathbf{g}_r \mathbf{g}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R}\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \text{ είναι ομογενής μετασχηματισμός}$$

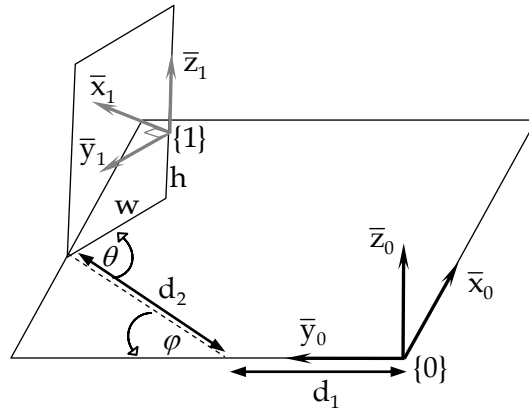
στερεού σώματος με στροφή \mathbf{R} και μετατόπιση κατά το εστραμμένο άνυσμα $\mathbf{R}\mathbf{p}$.

$$(ii) \mathbf{g}_r \mathbf{g}_p - \mathbf{g}_p \mathbf{g}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R}\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}\mathbf{p} - \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ δεν είναι ομογενής μετασχηματισμός}$$

στερεού σώματος εφόσον ο μηδενικός πίνακας δεν είναι πίνακας στροφής και το στοιχείο (4,4) του πίνακα είναι μηδέν αντί για ένα που απαιτείται από την ειδική δομή των ομογενών μετασχηματισμών.

Παράδειγμα 1.5:

Θέλουμε να βρούμε τον ομογενή μετασχηματισμό \mathbf{g}_{01} που εκφράζει την θέση και τον προσανατολισμό του πόμολου μιας πόρτας στο οποίο έχουμε προσαρτήσει το πλαίσιο {1} ως προς το ακίνητο πλαίσιο του δωματίου {0} συναρτήσει των παραμέτρων που δίνονται στο σχήμα. Η πόρτα έχει πλάτος w και το πόμολο βρίσκεται σε ύψος h από το πάτωμα.



Απάντηση: Με απλή τριγωνομετρία βρίσκεται το άνωσμα της αρχής του {1}

$$\mathbf{p}_{01} = \begin{bmatrix} d_2 \sin \phi + w \sin(\theta - \phi) \\ d_1 + d_2 \cos \phi - w \cos(\theta - \phi) \\ h \end{bmatrix}$$

Για τον προσανατολισμό παρατηρούμε ότι το πλαίσιο {1} προέρχεται από στροφή του {0} γύρω από το z κατά γωνία $\theta - \phi$. Επομένως,

$$\mathbf{R}_{01} = \begin{bmatrix} \cos(\theta - \phi) & -\sin(\theta - \phi) & 0 \\ \sin(\theta - \phi) & \cos(\theta - \phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και επομένως } \mathbf{g}_{01} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{01} & \mathbf{p}_{01} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

1.4-1 Αντιστροφή του πίνακα ομογενούς μετασχηματισμού

Ο αντιστροφος του $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$ βρίσκεται εύκολα ότι δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{g}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in \text{SE}(3) \tag{1.11}$$

Επομένως, είναι σαφές ότι $\mathbf{g}_{ab}^{-1} = \mathbf{g}_{ba}$.

1.4-2 Σύνθεση πινάκων ομογενούς μετασχηματισμού

Αν η γενικευμένη θέση ενός πλαισίου {C} περιγράφεται από τον ομογενή μετασχηματισμό g_{bc} ως προς ένα πλαίσιο {B} και η γενικευμένη θέση του {B} περιγράφεται από τον ομογενή μετασχηματισμό g_{ab} ως προς ένα πλαίσιο {A} η γενικευμένη θέση του {C} ως προς {A} βρίσκεται με χρήση της (1.10) από την σχέση:

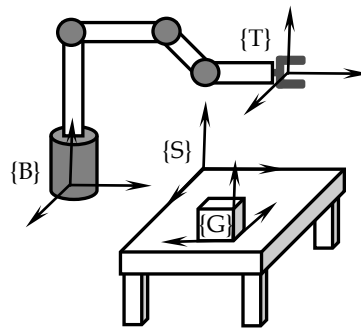
$$g_{ac} = g_{ab}g_{bc} = \begin{bmatrix} R_{ab}R_{bc} & R_{ab}p_{bc} + p_{ab} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

Παρόμοια με την σύνθεση στροφών σε μια σύνθεση ομογενών μετασχηματισμών, η **αντιμεταθετική ιδιότητα δεν ισχύει**.

Στις εφαρμογές της ρομποτικής είναι συνηθισμένη η εύρεση ενός άγνωστου μετασχηματισμού από την επίλυση εξισώσεων που έχουν δημιουργηθεί με κατάλληλη σύνθεση ομογενών μετασχηματισμών. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα δίνεται παρακάτω.

Παράδειγμα 1.6

Στο σχήμα παρουσιάζεται ένα ρομπότ και ο πάγκος εργασίας πάνω στον οποίο υπάρχει μια κύβος. Επίσης έχουν ορισθεί τα πλαίσια {B} στη βάση του ρομπότ, {T} στο άκρο της αρπάγης του ρομπότ, {S} στην άκρη από το πάγκο εργασίας, {G} του κύβου. Έστω ότι γνωρίζουμε την θέση και τον προσανατολισμό του άκρου της αρπάγης ως προς τη βάση του ρομπότ, δηλαδή τον g_{bt} , του πάγκου εργασίας ως προς τη βάση του ρομπότ g_{bs} , και του κύβου ως προς τον πάγκο εργασίας g_{sg} . Να υπολογιστεί η θέση και ο προσανατολισμός του κύβου ως προς το εργαλείο του βραχίονα.



Απάντηση: Μπορούμε να εκφράσουμε την θέση και τον προσανατολισμό του κύβου ως προς τη βάση του ρομπότ από δύο δρόμους, μέσω του ρομπότ και μέσω του πάγκου εργασίας. Έτσι δημιουργούμε μία εξίσωση ομογενών μετασχηματισμών την οποία λύνουμε για τον άγνωστο μετασχηματισμό:

$$g_{bt}g_{tg} = g_{bs}g_{sg} \Rightarrow g_{tg} = g_{bt}^{-1}g_{bs}g_{sg}$$

Παράδειγμα 1.7

Αν η γενική μορφή του μετασχηματισμού ενός στερεού σώματος δίνεται από την σύνθεση των μετασχηματισμών $g = g_{p1}g_r g_{p2}g_r^{-1}$ όπου g_{p1} , g_{p2} μετασχηματισμοί μεταφοράς και g_r μετασχηματισμός στροφής δείξτε ότι ο g είναι μία μεταφορά για οποιαδήποτε g_{p1} , g_{p2} και g_r .

Απάντηση: Εστω $g_{p1} = \begin{bmatrix} I_3 & p1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $g_{p2} = \begin{bmatrix} I_3 & p2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $g_r = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Τότε $g_r^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$g_{p1}g_r = \begin{bmatrix} R & p1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ και } g_{p2}g_r^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & p2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και άρα } g = g_{p1}g_rg_{p2}g_r^{-1} = \begin{bmatrix} I_3 & Rp_2 + p1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι ομογενής μετασχηματισμός μεταφοράς.

1.4-3 Μετασχηματισμός βίδας: Μια ειδική περίπτωση

Έστω $g_p(k,a)$ ένας ομογενής μετασχηματισμός μεταφοράς σε απόσταση a κατά μήκος ενός μοναδιαίου άξονα k . Έστω $g_r(k,\theta)$ ένας ομογενής μετασχηματισμός στροφής γύρω από τον μοναδιαίο άξονα k κατά γωνία θ . Η σύνθεση των δύο αυτών μετασχηματισμών λέγεται **μετασχηματισμός βίδας**. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι στην περίπτωση του μετασχηματισμού βίδας ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα μεταξύ μεταφοράς και στροφής, δηλαδή $g_p(k,a)g_r(k,\theta) = g_r(k,\theta)g_p(k,a)$.

Η στροφή και η μεταφορά γύρω και κατά μήκος ενός μοναδιαίου άξονα λέγεται **κίνηση βίδας** και συμβολίζεται ως εξής:

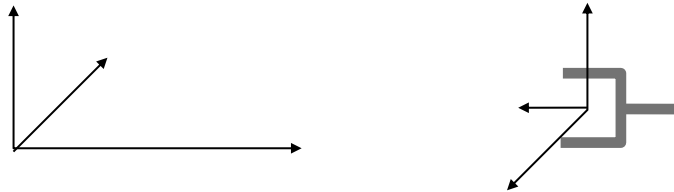
$$\text{Screw}(k,a,\theta) = g_p(k,a)g_r(k,\theta) = g_r(k,\theta)g_p(k,a).$$

Ασκήσεις κινηματικής στερεού σώματος

Άσκηση 1η

Βρείτε την θέση που προκύπτει από την στροφή της θέσης p_a γύρω από τον άξονα z κατά 30° και μετά από μία στροφή γύρω από τον x πάλι κατά 30° . Διαπιστώστε ότι το αποτέλεσμα είναι διαφορετικό αν η θέση p_a στραφεί πρώτα γύρω από τον x και μετά γύρω από τον z και επομένως διαπιστώστε ότι δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων στροφής.

Άσκηση 2η



Στο σχήμα φαίνονται το πλαίσιο {2} της αρπάγης ενός ρομπότ και το πλαίσιο {1} ενός αντικειμένου, το οποίο έχει προέλθει από στροφή του αδρανειακού πλαισίου αναφοράς {A} γύρω από τον άξονα των x κατά θ_1 . Βρείτε τις Z,Y,X γωνίες Euler της αρπάγης του ρομπότ.

Άσκηση 3η

Ένα αντικείμενο {B} τοποθετείται σε μια θέση που περιγράφεται από τον ομογενή μετασχηματισμό g_{ub} όπου {U} το χωρικό πλαίσιο αναφοράς. Ο ομογενής μετασχηματισμός g_{ur} περιγράφει το πλαίσιο της βάσης {R} ενός ρομπότ ως προς το {U}. Να βρεθεί ο ομογενής μετασχηματισμός g_{rh} που επιτρέπει την ταύτιση του πλαισίου {H} της αρπάγης του ρομπότ με αυτό του αντικειμένου {B}. Δίνονται:

$$g_{ub} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g_{ur} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Να παρασταθεί γραφικά το σημείο αρχής του {B} στο {U}, το σημείο αρχής του {R} στο {U} και βρείτε με πρόσθεση ή αφαίρεση των κατάλληλων ανυσμάτων την αρχή του {B} στο {R}. Πώς θα ελέγξετε αν το αποτέλεσμα σας είναι σωστό ;

Άσκηση 4η

Αποδείξτε ότι στην περίπτωση του μετασχηματισμού βίδας ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα μεταξύ μεταφοράς και στροφής, δηλαδή ότι $g_p(k,a)g_r(k,\theta) = g_r(k,\theta)g_p(k,a)$ όπου $g_p(k,a)$, $g_r(k,\theta)$ ομογενείς μετασχηματισμοί μεταφοράς και στροφής κατά μήκος και γύρω από μοναδιαίο άξονα k σε απόσταση a και γωνία θ .

Άσκηση 5η

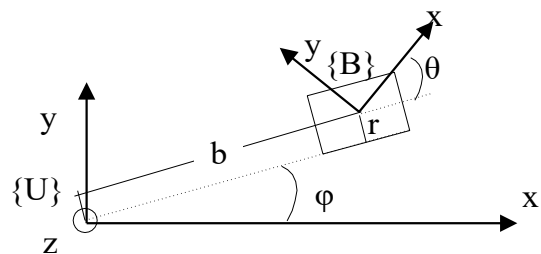
(i) Είναι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ πίνακας στροφής; Δικαιολογήστε.

(ii) Βρείτε τα στοιχεία που λείπουν από τον παρακάτω ομογενή μετασχηματισμό του πλαισίου {B} ως προς το πλαίσιο {A} και σχεδιάστε τα δύο πλαίσια.

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} ; & 0 & -1 & 0 \\ ; & 0 & 0 & 1 \\ ; & -1 & 0 & 2 \\ ; & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6η

Τα πλαίσια {B} και {U} είναι προσαρμοσμένα σε ένα αντικείμενο και στον χώρο αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα. Βρείτε την θέση και τον προσανατολισμό του αντικειμένου στο χώρο δηλαδή τον ομογενή μετασχηματισμό g_{ub} σαν συνάρτηση των παραμέτρων που δίνονται στο σχήμα.



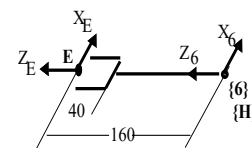
Άσκηση 7^η

Ένα ρομπότ 6 βαθμών ελευθερίας πρέπει να σηκώσει ένα αντικείμενο με τετραγωνική διατομή από μια συγκεκριμένη θέση και να το τοποθετήσει μέσα στο άνοιγμα μίας τετραγωνικής υποδοχής που βρίσκεται στην ίδια επιφάνεια σε σταθερή θέση.

Οι διαστάσεις του αντικειμένου και της υποδοχής και τα πλαίσιά τους {C} και {F} καθώς και η αρχική κατάσταση του χώρου εργασίας φαίνονται στο σχήμα. Σαν αδρανειακό σύστημα αναφοράς θεωρείται το πλαίσιο της βάσης του βραχίονα {R} που φαίνεται στο σχήμα. Επίσης στο σχήμα φαίνεται και το πλαίσιο {O} στο κέντρο του τετραγωνικού ανοίγματος της υποδοχής στην επάνω επιφάνεια της.

Στο σχήμα δεξιά φαίνεται επίσης λεπτομέρεια από το σύστημα συντεταγμένων {E} του άκρου της αρπάγης σε σχέση με το πλαίσιο {H} ≡ {6} του καρπού του ρομπότ. α) Βρείτε τους πίνακες ομογενούς μετασχηματισμού, g_{6e} , g_{re} , g_{fo} , g_{rf} .

β) Για να εκτελεστεί η εργασία αυτή πρέπει ο βραχίονας να περάσει από 4 βασικές θέσεις. Η θέση (1) όταν η αρπάγη είναι πλησίον του αντικειμένου η (2) όταν η αρπάγη έχει πιάσει το αντικείμενο η θέση (3) όταν το αντικείμενο είναι πλησίον του πλαισίου και η τελική θέση (4) με το αντικείμενο τοποθετημένο στο άνοιγμα της υποδοχής. Για να εκτελεστεί η επιθυμητή εργασία συναρμολόγησης θα δοθούν εντολές κίνησης στον βραχίονα με την μορφή των μετασχηματισμών $g_{rh}(i)$, για τις $i=1,2,3,4$ θέσεις. Για κάθε μια από τις θέσεις αυτές διατυπώστε μία εξίσωση ομογενών μετασχηματισμών που να περιέχει σαν μοναδικό άγνωστο τον ομογενή μετασχηματισμό $g_{rh}(i)$ και υπολογίστε τον.



Ό=Πιά 3