ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΛΑ ΦΥΣΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

1. ΓΕΝΙΚΑ

Ένα αρκετά σημαντικό μέρος· της θεωρίας του Αυτομάτου Ελέγχου διαπραγματεύεται την ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς των συστημάτων ελέγχου. Αυτό, αρκετά απλουστευτικά, σημαίνει ανάλυση του πως ένα σύστημα μεταβαίνει από μια κατάσταση ισορροπίας σε μια άλλη, όταν παίρνει εντολή να κάνει κάτι τέτοιο, ή του πως ένα σύστημα αντιδρά στις διαταραχές που τείνουν να το απομακρύνουν από μια θέση ισορροπίας. Η "μετάβαση" γίνεται "ομαλά" όπως είναι επιθυμητό ή το σύστημα ταλαντώνεται; Στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει τρόπος να αποφευχθούν οι ταλαντώσεις;

Το πρώτο βήμα στην ανάλυση της συμπεριφοράς ενός συστήματος Αυτομάτου Ελέγχου είναι η δημιουργία του μαθηματικού του μοντέλο».

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μοντέλο ενός φυσικού συστήματος είναι μια μαθηματική παράσταση που περιγράφει τη (δυναμική) συμπεριφορά του συστήματος. Η διαδικασία για τον προσδιορισμό του μαθηματικού μοντέλου ενός συστήματος ελέγχου είναι, η εξής :

- Καθορίζομε τις εισόδους και τις εξόδους του συστήματος. Αυτές πρέπει να θεωρούνται πάντα συναρτήσεις του χρόνου.

- Γράφομε τις μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν τις φυσικές μεταβλητές του συστήματος μεταξύ τους ή με τις εισόδους και εξόδους. Οι φυσικές μεταβλητές μπορεί να είναι : δυνάμεις, επιταχύνσεις, ταχύτητες, ροπές, τάσεις, ρεύματα, ισχείς κ.λ.π. , οι δε σχέσεις που τις συνδέουν δεν είναι παρά οι νόμοι. της Φυσικής, σχεδόν πάντα δε γραμμένοι υπό μορφή διαφορικών εξισώσεων του χρόνου.

- Προσπαθούμε απαλείφοντας τις φυσικές μεταβλητές να καταλήξομε σε σχέσεις που θα συνδέουν τις εισόδους με τις εξόδους.

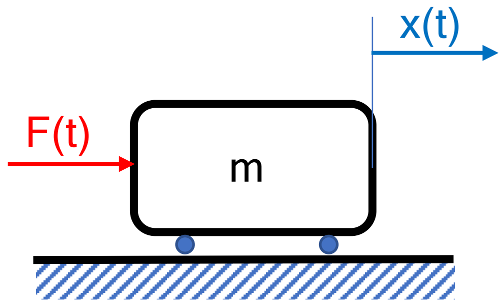
Το σύνολο αυτών των σχέσεων αποτελεί το μαθηματικό μοντέλο του φυσικού συστήματος. Στη πιο συνηθισμένη και απλή περίπτωση έχομε συστήματα με μια είσοδο και μια έξοδο, άρα και μια τέτοια σχέση που τις συνδέει, που έχει την μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης του χρόνου. Υπάρχουν βεβαίως συστήματα με περισσότερες από μια εισόδους και εξόδους, οπότε οι διαφορικές εξισώσεις είναι περισσότερες.

2. ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΠΛΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

2.1 Στοιχεία ευθύγραμμης κίνησης

Τα βασικά μηχανικά στοιχεία που εκτελούν ευθύγραμμη κίνηση είναι : η μάζα, το ελατήριο και ο αποσβεστήρας. Στην απλούστερη μορφή του ο τελευταίος είναι ένας κύλινδρος γεμάτος λάδι, μέσα στον οποίο κινείται ένα κατάλληλα διαμορφωμένο πιστόνι.

Α. Μοντέλο κίνησης μάζας που ολισθαίνει χωρίς τριβή



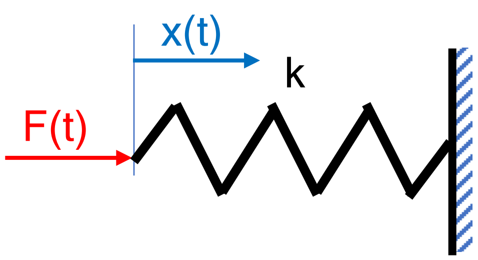
Είσοδος : Η συνισταμένη F(t) των δυνάμεων επενέργειας

Έξοδος : Η μετατόπιση x(t) κατά την διεύθυνση της συνισταμένης

Μαθηματικό Μοντέλο[1] : $\boldsymbol{F(t) = ma(t) = m\ddot{x}(t)}$

Ο Νόμος του Newton δηλαδή.

Β. Μοντέλο ελατηρίου



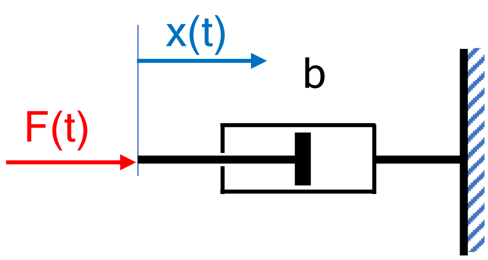
Είσοδος : Η συνισταμένη F(t) των δυνάμεων επενέργειας

Έξοδος : Η μετατόπιση x(t) κατά την διεύθυνση της συνισταμένης

Μαθηματικό Μοντέλο : $\boldsymbol{F(t) = kx(t)}$

Ο Νόμος του Hook δηλαδή. k : Σταθερά του ελατηρίου

Γ. Μοντέλο αποσβεστήρα



Είσοδος : Η συνισταμένη F(t) των δυνάμεων επενέργειας

Έξοδος : Η μετατόπιση x(t) κατά την διεύθυνση της συνισταμένης

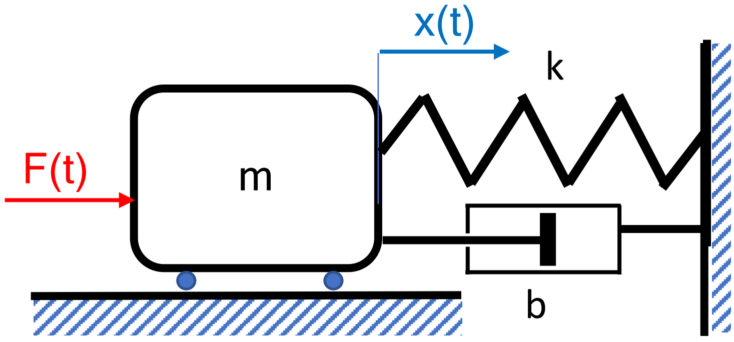
Μαθηματικό Μοντέλο : $\boldsymbol{F(t) = b\dot{x}(t)}$

b : Σταθερά του αποσβεστήρα

Τα παραπάνω βασικά μηχανικά στοιχεία μπορούν να εμφανισθούν συνδεδεμένα μεταξύ τους με πάρα πολλούς τρόπους. Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι ένας από αυτούς.

---

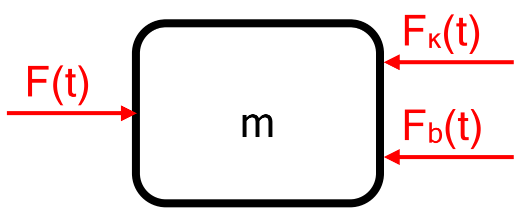
[1] Για τις παραγώγους του χρόνου θα χρησιμοποιούμε την τελίτσα (.) αντί του (‘).



Η μάζα m μπορεί να ολισθήσει χωρίς τριβή, συγκρατείται από ελατήριο και αποσβεστήρα και δέχεται δυνάμεις των οποίων η συνισταμένη F(t) είναι παράλληλη τόσο στο ελατήριο όσο και τον αποσβεστήρα. Θεωρούμε είσοδο στο σύστημα αυτή ακριβώς την συνισταμένη και έξοδο την μετατόπιση x(t) της μάζας.

Για να προσδιορίσομε το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος, θα γράψομε την εξίσωση κίνησης της μάζας. Θα πρέπει να βρούμε συνεπώς την συνισταμένη των δυνάμεων που επενεργούν σ' αυτή. Στο Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος της μάζας (σχήμα) φαίνονται οι δυνάμεις που επενεργούν κατά την διεύθυνση της δύναμης. Οι δυνάμεις $F_k(t)$ και $F_b(t)$ είναι οι δυνάμεις που δέχεται η μάζα από το ελατήριο και τον αποσβεστήρα αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ισχύει :

Διάγραμμα ελευθέρου σώματος μάζας m

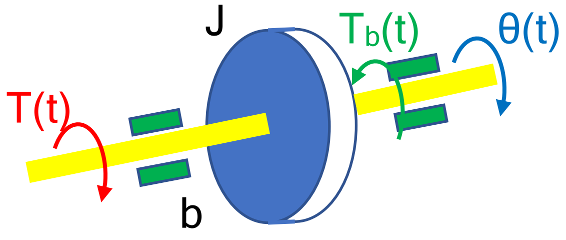


$$\sum F = m\ddot{x}(t) => F(t) - F_b(t) - F_k(t) = m\ddot{x}(t) => \boldsymbol{F(t) = m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t)}$$

Η τελευταία αυτή διαφορική εξίσωση είναι το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος.

2.2 Στοιχεία περιστροφικής κίνησης

Τα βασικά μηχανικά στοιχεία περιστροφικής κίνησης, κατ' αναλογία με αυτά της ευθύγραμμης, είναι: η περιστρεφόμενη μάζα, το περιστροφικό ελατήριο και το στοιχείο ιξώδους τριβής – το τελευταίο δεν υπάρχει ως μονάδα υπάρχει όμως πάντα η ιξώδης τριβή. Ένας συνδυασμός των παραπάνω στοιχείων που συναντούμε συχνά, είναι μια περιστρεφόμενη μάζα, στην περιστροφή της οποίας "αντιστέκεται" η ιξώδης τριβή των εδράνων στήριξης.



Αν είναι :

$T(t)$: η επιβαλλόμενη ροπή

$T_b(t)$: η ροπή εξ αιτίας της ιξώδους τριβής των εδράνων

J : η ροπή αδράνειας της μάζας

b : ο συντελεστής ιξώδους τριβής

θ(t) : η γωνία στροφής

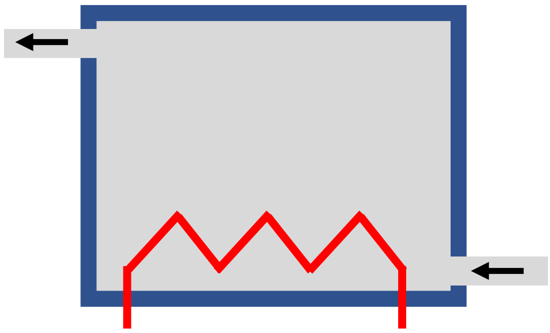
τότε ισχύει :

$$T(t) - T_b(t) = J\ddot{\theta}(t) => \boldsymbol{T(t) = J\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t)}$$

Η τελευταία αυτή διαφορική εξίσωση είναι το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος στο οποίο σιωπηλά έχομε θεωρήσει ως είσοδο την επιβαλλόμενη ροπή και έξοδο την γωνία στροφής.

3. ΕΝΑ ΑΠΛΟ ΘΕΡΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Ένα καλό παράδειγμα απλού θερμικού συστήματος είναι ένα δοχείο από το οποίο περνά ένα υγρό με σκοπό να θερμανθεί. Η θέρμανση επιτυγχάνεται με την βοήθεια ηλεκτρικής αντίστασης. Για το σύστημα κάνουμε τις εξής απλουστευτικές παραδοχές :



- Το δοχείο είναι τέλεια μονωμένο θερμικά
- Το νερό στο δοχείο έχει ομοιόμορφη θερμοκρασία, ίση με την θερμοκρασία εξόδου

Ορίζουμε τις παρακάτω μεταβλητές και παραμέτρους του συστήματος :

- q(t) : Ροή θερμότητας από την ηλεκτρική αντίσταση - ισχύς της ηλεκτρικής αντίστασης (watt)
- $q_i(t)$: Ροή θερμότητας που μεταφέρει το εισερχόμενο υγρό (watt)
- $q_o(t)$: Ροή θερμότητας που απάγει το εξερχόμενο υγρό (watt)
- Q(t) : Παροχή μάζας υγρού (Kgr/s)
- Θ(t) : Θερμοκρασία υγρού στο δοχείο (^oC)
- $Θ_i(t)$: Θερμοκρασία εισερχομένου υγρού (^oC)
- C : Θερμοχωρητικότητα του του δοχείου με το υγρό (joule/ ^oC)
- n : Ειδική θερμότητα υγρού (joule/Kgr ^oC)

Ας σημειωθεί, ότι οι μονάδες των μεγεθών που φαίνονται εδώ είναι ενδεικτικές – μπορεί να είναι οποιεσδήποτε κατάλληλες μονάδες. Ισχύει :

$q_i(t) = nQ\Theta_i(t)$ (1) και $q_o(t) = nQ\Theta(t)$ (2)

Η συνολική ροή θερμότητας προς το δοχείο είναι :

$$q(t) + q_i(t) - q_o(t)$$

… και είναι «υπεύθυνη» για την άνοδο της θερμοκρασίας του υγρού στο δοχείο, οπότε :

$$q(t) + q_i(t) - q_o(t) = C\dot{\Theta}(t) \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) αν απαλείψω τις «εσωτερικές μεταβλητές» του συστήματος $q_i(t)$ και $q_o(t)$ προκύπτει :

$$\boldsymbol{q(t) + nQ\Theta_i(t) = C\dot{\Theta}(t) + nQ\Theta(t)}$$

που αποτελεί το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος που εδώ θεωρείται ότι έχει δύο εισόδους (q, Θi) και μια έξοδο την θερμοκρασία Θ.

4. ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΠΛΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

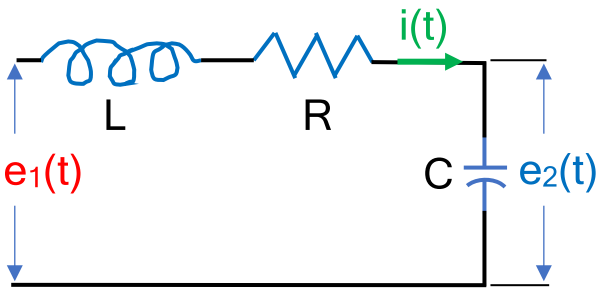
Κατ' **αναλογία προς τα απλά μηχανικά στοιχεία** - μάζα, αποσβεστήρα, ελατήριο - υπάρχουν τα αντίστοιχα απλά ηλεκτρικά στοιχεία που είναι το πηνίο, η ωμική αντίσταση και ο πυκνωτής. Για τα βασικά αυτά στοιχεία ισχύουν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις - μοντέλα που συνδέουν την εφαρμοζόμενη τάση με το ρεύμα που τα διαρρέει.

A. Πηνίο με αυτεπαγωγή L : $\boldsymbol{V_L = L\,\frac{di}{dt}}$

B. Ωμική αντίσταση R : $\boldsymbol{V_R = Ri}$

C. Πυκνωτής χωρητικότητας C: $\boldsymbol{\frac{dV_C}{dt} = (\frac{1}{C})\,i}$

Τα τρία παραπάνω βασικά ηλεκτρικά στοιχεία, συνδυαζόμενα μεταξύ, τους δίδουν ποικιλία ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Σε αυτό του ακολουθεί, είναι συνδεδεμένα σε σειρά. Ας θεωρήσομε επίσης την τάση e_1 ως είσοδο και την τάση στα άκρα του πυκνωτή e_2 ως έξοδο. Ισχύει (Νόμος Kirchoff) :



$$e_1(t) = V_L(t) + V_R(t) + e_2(t)$$

…και σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις :

$$e_1(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + e_2(t)$$

$$i(t) = C\dot{e}_2$$

Όπου i(t) το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα. Απαλείφοντας αυτό ακριβώς το ρεύμα (ως εσωτερική μεταβλητή του συστήματος) από τις προηγούμενες εξισώσεις, έχομε :

$$\boldsymbol{e_1(t) = (LC)\ddot{e}_2(t) + (RC)\dot{e}_2(t) + e_2(t)}$$

…. μια διαφορική εξίσωση του χρόνου, που αποτελεί το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος. Παρατηρήστε ότι είναι ουσιαστικά ίδια με αυτήν του μηχανικού συστήματος μάζα – ελατήριο – αποσβεστήρας που βρήκαμε σε προηγούμενη παράγραφο.

5. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Η επίλυση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, που αποτελούν το μοντέλο του συστήματος, διευκολύνεται πολύ με την χρήση του μετασχηματισμού LAPLACE. Μαθηματικές «εργασίες» όπως η παραγώγηση και η ολοκλήρωση αντικαθίστανται, με την βοήθεια του μετασχηματισμού αυτού από απλές αλγεβρικές πράξεις.

<u>Ορισμός</u>

Ο μετασχηματισμός LAPLACE μιας συνάρτησης του χρόνου f(t) **είναι μια άλλη συνάρτηση F(s)**, της μιγαδικής μεταβλητής s, τέτοια ώστε :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

Η συνάρτηση f(t) πρέπει να είναι συνεχής και ακόμη : f(t)=0 για t<0.

<u>Παράδειγμα</u> : Η εκθετική συνάρτηση, που ορίζεται ως εξής :

$$\begin{aligned} f(t) &= Ae^{-at} \quad \gamma\iota\alpha \quad t \geq 0 \\ f(t) &= 0 \quad \gamma\iota\alpha \quad t < 0 \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός LAPLACE της συνάρτησης βρίσκεται ως εξής :

$$\boldsymbol{F(s)} = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty Ae^{-at}\, e^{-st} dt = A \int_0^\infty e^{-(a+s)t}\, dt = \cdots => \boldsymbol{F(s)} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{s+a}}$$

<u>Μετασχηματισμός LAPLACE απλών συναρτήσεων</u>

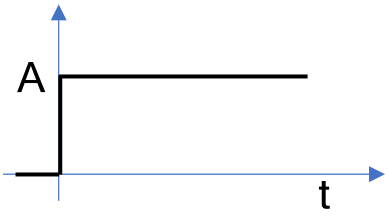
Δίδεται στη συνέχεια ο μετασχηματισμός LAPLACE μερικών συναρτήσεων που συναντά κανείς στην μελέτη των Συστημάτων Ελέγχου.

Α. Εκθετική συνάρτηση

$$\begin{aligned} f(t) &= Ae^{-at} \quad \gamma\iota\alpha \quad t \geq 0 \\ f(t) &= 0 \quad \gamma\iota\alpha \quad t < 0 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{F(s)} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{s+a}}$$

Β. Συνάρτηση βαθμίδας (step function)

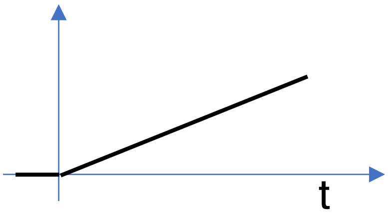


$$f(t) = u(t) = A \qquad \gamma\iota\alpha \qquad t \geq 0$$
$$f(t) = u(t) = 0 \qquad \gamma\iota\alpha \qquad t < 0$$

$$\boldsymbol{F(s)} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{s}}$$

Την συναντά κανείς- πολύ συχνά στα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου. Με την βοήθειά της παριστάνουμε μαθηματικά μεταβολές που γίνονται "ακαριαία", πρακτικά σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Το κλείσιμο ή το άνοιγμα ενός διακόπτη περιγράφεται μαθηματικά από μια τέτοια συνάρτηση, αφού αυτό δεν είναι παρά ακαριαία μεταβολή της τάσης σε ένα δίκτυο από μια τιμή σε μια άλλη.

Γ. Συνάρτηση αναρρίχησης (ramp function)

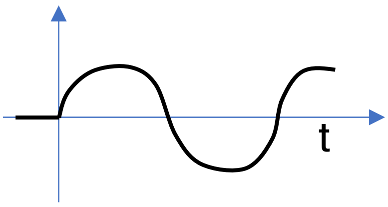


$$f(t) = At \qquad \gamma\iota\alpha \qquad t \geq 0$$
$$f(t) = 0 \qquad \gamma\iota\alpha \qquad t < 0$$

$$\boldsymbol{F(s)} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{s^2}}$$

Πολύ χρήσιμη επίσης συνάρτησης : Με την βοήθειά της παριστάνουμε μεταβολές που λαμβάνουν χώρα σταδιακά, εν προκειμένω αυξάνονται γραμμικά με το χρόνο, με ρυθμό αύξησης Α.

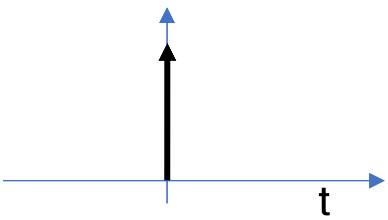
Δ. Ημιτονοειδής συνάρτηση



$$f(t) = Asin(\omega t) \qquad \gamma\iota\alpha \qquad t \geq 0$$
$$f(t) = 0 \qquad \gamma\iota\alpha \qquad t < 0$$

$$\boldsymbol{F(s)} = \frac{\boldsymbol{As}}{\boldsymbol{s^2 + \omega^2}}$$

Δ. Κρουστική συνάρτηση (impulse function)



Ορίζεται ως η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης βαθμίδας, όπως την ορίσαμε προηγουμένως :

$$f(t) = \delta(t) = \frac{d[u(t)]}{dt}$$

Όπως μπορεί να προκύψει εύκολα από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού που θα αναφέρομε στη συνέχεια, ο μετασχηματισμός LAPLACE της εν λόγω συνάρτησης είναι :

$$\boldsymbol{F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = A}$$

Η κρουστική συνάρτηση είναι ένας «παλμός» πολύ μικρής διάρκειας και πολύ μεγάλου πλάτους. Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη του παλμού είναι Α. Με την βοήθειά της παριστάνουμε μαθηματικά κρουστικά φαινόμενα, όπως ας πούμε η κρούση δύο μαζών.

Σον Πίνακα που ακολουθεί αποτυπώνεται ο μετασχηματισμός Laplace μερικών χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Μπορεί κανείς να αναζητήσει στο διαδίκτυο και άλλους πιο πλούσιους τέτοιους πίνακες.

$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{F(s)}$
$\delta(t)$	A
$u(t)$	$\frac{A}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$cos\,(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

<u>Ιδιότητες του μετασχηματισμού LAPLACE.</u>

1. Γινόμενο συνάρτησης επί πραγματικό αριθμό :

$$\mathcal{L}[Af(t)] = A\mathcal{L}[f(t)]$$

2. Άθροισμα συναρτήσεων :

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

3. Χρονική μετατόπιση συνάρτησης :

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)] = e^{-as}F(s)$$

4. Μετασχηματισμός της παραγώγου :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0-)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$$

…….. αντίστοιχα για παραγώγους ανώτερης τάξης.

5. Μετασχηματισμός ολοκληρώματος συνάρτησης :

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

6. Θεώρημα της τελικής τιμής :

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}(sF(s))$$

Με την βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, όπως αυτός ορίσθηκε παραπάνω, μια συνάρτηση του χρόνου f(t) μετασχηματίζεται σε μια συνάρτηση F(s) της μιγαδικής μεταβλητής s. Τίθεται ήδη το ερώτημα : Αν είναι γνωστή η F(s) πως μπορεί να προσδιορισθεί η αρχική συνάρτηση f(t) από την οποία προήλθε η F(s) ; Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace. Συμβολίζομε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace με το σύμβολο $\mathcal{L}^{-1}$. Έτσι :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση f(t) μπορεί να προσδιορισθεί αναλυτικά με την βοήθεια του παρακάτω ολοκληρώματος :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\lim_{T\to\infty}\int_{c-jT}^{c+jT} F(s)e^{st}ds$$

Η ολοκλήρωση που εισέρχεται στην παραπάνω σχέση είναι κοπιαστική και δεν ενδείκνυται. Ευτυχώς υπάρχει απλούστερη μέθοδος προσδιορισμού της f(t) : Με χρήση πινάκων που εμφανίζουν τον μετασχηματισμό Laplace αρκετών βασικών συναρτήσεων. Φυσικά δεν μπορούν να υπάρχουν όλες οι συναρτήσεις. Όμως τα πράγματα διευκολύνονται κάπως για την περίπτωση των συστημάτων ελέγχου, καθότι οι συναρτήσεις που εμφανίζονται σε αυτά είναι συνήθως της μορφής :

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

όπου τα A(s) και B(s) είναι πολυώνυμα του s. Μάλιστα δε ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι πάντα μεγαλύτερος ή ίσος από τον αντίστοιχο το αριθμητή. Οι συγκεκριμένες ρητές πολυωνυμικές συναρτήσεις μπορούν να αναλυθούν σε άθροισμα απλών κλασμάτων, τέτοιων που εμφανίζονται στους πίνακες του μετασχηματισμού Laplace.

Παράδειγμα

Ένας σύγχρονος τρόπος για να προσδιορίσει κανείς είτε τον μετασχημαρισμό Laplace είτε τον αντίστροφό του, είναι να χρησιμοποιήσει ειδικό λογισμικό, όπως π.χ. το MatLab.

6. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (TRANSFER FUNCTION)

Στη θεωρία αυτομάτου ελέγχου, χρησιμοποιούμε κατά κόρο τις ονομαζόμενες συναρτήσεις μεταφοράς προκειμένου να εκφράσομε την σχέση εισόδου - εξόδου σε γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα είναι εκείνο το σύστημα του οποίου το μαθηματικό μοντέλο είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση του χρόνου με σταθερούς συντελεστές. Αν σε ένα τέτοιο σύστημα x(t) είναι η είσοδος και y(t) η έξοδος, τότε το μαθηματικό μοντέλο είναι πάντα της μορφής :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Όπου :

a_n, a_{n-1}, … a_1, a_0, .. b_m, b_{m-1}, … b_1, b_0 : Πραγματικοί αριθμοί

Συνάρτηση μεταφοράς G(s) ενός τέτοιου συστήματος, είναι το πηλίκο του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου Y(s), προς τον μετασχηματισμό Laplace της εισόδου X(s) του συστήματος – υπό την προϋπόθεση ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Αν πάρομε τον μετασχηματισμό Laplace και των δύο μερών της γενικής εξίσωσης του μοντέλου του γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος, έχομε :

$$\mathcal{L}\left[a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y\right] = \mathcal{L}\left[b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x\right] =>$$

$$\mathcal{L}\left[a_n\frac{d^n y}{dt^n}\right] + \mathcal{L}\left[a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right] + \cdots \mathcal{L}\left[a_1\frac{dy}{dt}\right] + \mathcal{L}[a_0 y] =$$
$$= \mathcal{L}[b_m\frac{d^m x}{dt^m}] + \mathcal{L}[b_{m-1}\frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}}] + \cdots \mathcal{L}[b_1\frac{dx}{dt}] + \mathcal{L}[b_0 x] \quad =>$$

$$a_n\mathcal{L}\left[\frac{d^n y}{dt^n}\right] + a_{n-1}\mathcal{L}\left[\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right] + \cdots + a_1\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] + \alpha_0\mathcal{L}[y] =$$
$$= b_m\mathcal{L}\left[\frac{d^m x}{dt^m}\right] + b_{m-1}\mathcal{L}\left[\frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}}\right] + \cdots + b_1\mathcal{L}[\frac{dx}{dt}] + b_0\mathcal{L}[x] \quad =>$$

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \cdots + a_1 sY(s) + \alpha_0 Y(s) =$$
$$= b_m s^m X(s) + b_{m-1}s^{m-1}X(s) + \cdots + b_1 sX(s) + b_0 \mathrm{X(s)} \quad =>$$

$$\boldsymbol{Y(s)}[a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + \alpha_0] = \boldsymbol{X(s)}[b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0]$$

Συνεπώς, η συνάρτηση μεταφοράς είναι :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + \alpha_0}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς συσχετίζει την έξοδο ενός συστήματος (δηλαδή το αποτέλεσμα της δράσης ενός αιτίου) με την είσοδο στο σύστημα (δηλαδή το αίτιο που την προκάλεσε). Αν γνωρίζει κανείς την συνάρτηση μεταφοράς G(s) ενός συστήματος, τότε μπορεί να βρει την έξοδό του Y(s) για οποιαδήποτε είσοδο X(s) :

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς **εκφράζει μόνο τις δυναμικές ιδιότητες** του συστήματος και είναι ανεξάρτητη εισόδων και εξόδων. Δεν δίδει όμως καμιά πληροφορία για την φυσική δομή του συστήματος. Είναι δυνατόν διαφορετικά τελείως συστήματα (π.χ. ένα μηχανικό και ένα ηλεκτρικό) να έχουν ακριβώς την ίδια συνάρτηση μεταφοράς. Η τελευταία αυτή ιδιότητα αποτελεί και την βάση για την **«αναλογία συστημάτων» διαφορετικών ως προς την φύση τους.**

Το πολυώνυμο :

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + \alpha_0$$
ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του συστήματος και η εξίσωση :

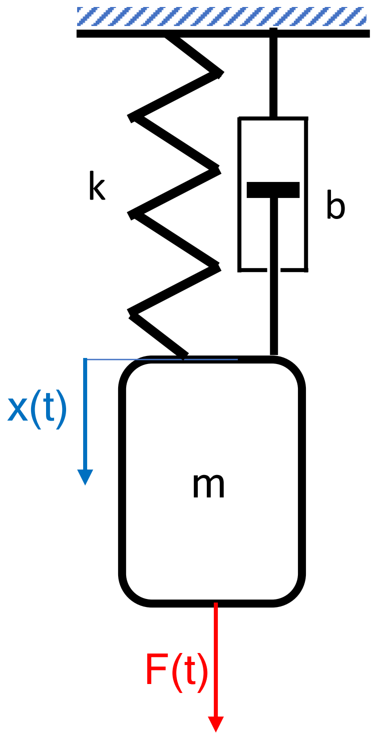
$$p(s) = 0$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** (characteristic equation) του συστήματος.

Ο **βαθμός** του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ονομάζεται **τάξη (order)** του συστήματος, οι δε ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης ονομάζονται **πόλοι (poles)** του συστήματος. Η χαρακτηριστική εξίσωση μας δίδει σπουδαίες πληροφορίες για την **δυναμική συμπεριφορά** γενικότερα και ειδικότερα για την **ευστάθεια του συστήματος**.

Παραδείγματα συναρτήσεων μεταφοράς

Α. Μάζα - ελατήριο - αποσβεστήρας.



Έχομε ήδη προσδιορίσει το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος αυτού με **είσοδο την δύναμη** που ασκείται στην μάζα και **έξοδο την μετατόπιση** της μάζας :

$$\boldsymbol{F(t) = m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t)}$$

Για να βρούμε την συνάρτηση μεταφοράς, θα μετασχηματίσομε κατά Laplace και τα δύο μέλη της εξίσωσης :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[F(t)] = \mathcal{L}[m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t)] =>}$$

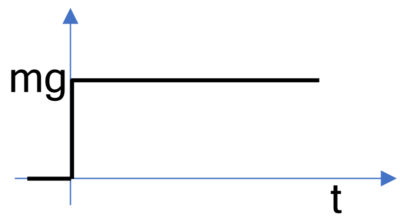
$$\boldsymbol{F(s) = ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) =>}$$

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}}$$

Πρόκειται για σύστημα 2ης τάξης.

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το σύστημα αυτό σε κατακόρυφη διάταξη, πράγμα φυσικά που δεν αλλάζει καθόλου το μοντέλο.

Ας υποθέσομε τώρα, ότι η μάζα συγκρατείται με κάποιο τρόπο ώστε το ελατήριο να μην είναι καθόλου «τεντωμένο» και ότι την χρονική στιγμή 0, ξαφνικά αφήνεται να κινηθεί ελεύθερη υπό την επενέργεια της βαρύτητας. Πως θα κινηθεί η μάζα;



Η είσοδος μας στην περίπτωση αυτή, είναι η δύναμη της βαρύτητας η οποία επιδρά στο σύστημα ακαριαία την χρονική στιγμή 0 και διατηρείται σταθερή στην συνέχεια. Πρόκειται δηλαδή για μια είσοδο βαθμίδας, πλάτους B=mg. Έχομε ήδη δει τον μετασχηματισμό Laplace μιας τέτοιας δύναμης :

$$F(s) = \frac{mg}{s}$$

Οπότε, η **απόκριση του συστήματος** στην είσοδο αυτή, θα είναι :

$$\boldsymbol{X(s)} = G(s)F(s) = \left(\frac{1}{ms^2 + bs + k}\right)\left(\frac{mg}{s}\right) = \boldsymbol{\frac{g}{\left(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}\right)s}}$$

Ας υποθέσουμε ότι στο σύστημα αυτό :

m = 1 Kgr και k = 100 N/m

και ας εξετάσουμε τρεις περιπτώσεις : Μια με υπερβολική απόσβεση, μια με πολύ μικρή απόσβεση και μια με κάποια «σωστή» απόσβεση.

Υπερβολική απόσβεση.

Ας είναι b = 200 N/(m/s) . Αυτό σημαίνει ότι ο αποσβεστήρας «αντιστέκεται» με δύναμη 200 N όταν το έμβολό του κινείται με ταχύτητα 1 m/s. Η απόκριση του συστήματος είναι τότε :

$$\boldsymbol{X(s) = \frac{10}{(s^2 + 200\, s + 100)s}}$$

Πρέπει τώρα να μετασχηματίσομε την παραπάνω συνάρτηση με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, ώστε να βρούμε την x(t) που μας ενδιαφέρει. Για να το κάνουμε αυτό θα την μετατρέψομε σε άθροισμα απλών κλασμάτων :

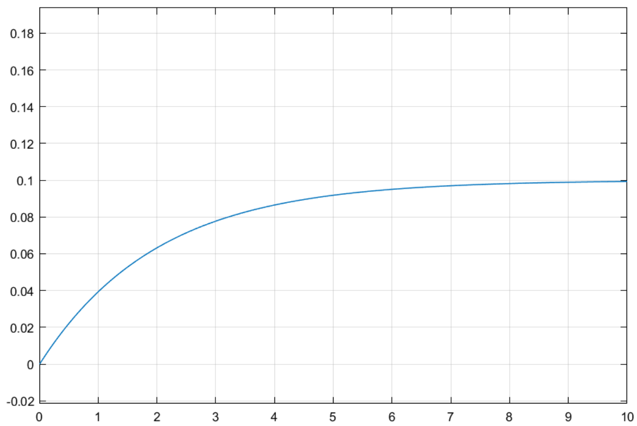
$$\boldsymbol{X(s)} = \frac{10}{(s^2 + 200\, s + 100)s} \cong \boldsymbol{\frac{0.0003}{s + 199.49} + \frac{-0.1003}{s + 0.50} + \frac{0.1}{s}}$$

Οπότε από τους πίνακες, για κάθε ένα από αυτά τα κλάσματα έχομε :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\boldsymbol{\frac{0.0003}{s + 199.49}}\right] = \boldsymbol{0.0003e^{-199.49t}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\boldsymbol{\frac{-0.1003}{s + 0.50}}\right] = \boldsymbol{-0.1003e^{-0.5t}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\boldsymbol{\frac{0.1}{s}}\right] = \boldsymbol{0.1}$$



Οπότε :

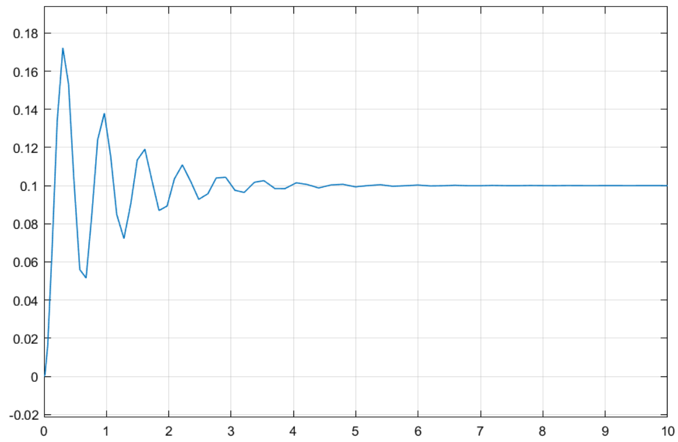
$$\boldsymbol{x(t) = 0.0003e^{-199.49t} - 0.1003e^{-0.5t} + 0.1}$$

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής. Η μάζα θα χρειασθεί περίπου 10 sec για να φτάσει, χωρίς καθόλου ταλαντώσεις, στην τελική της θέση, δηλαδή στα 0.1 m.

Ασθενής απόσβεση

Ας είναι b = 2 N/(m/s) . Η απόκριση του συστήματος είναι τότε :

$$\boldsymbol{X(s) = \frac{10}{(s^2 + 2\, s + 100)s}}$$



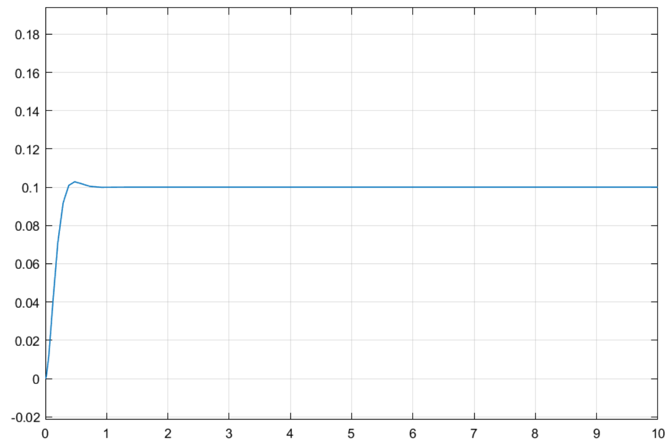
Βρίσκουμε, με την βοήθεια του MatLab , τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της παραπάνω συνάρτησης :

$$x(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-t}\left[\cos\left(3\sqrt{11}t\right) + \frac{\sqrt{11}}{3}\sin\left(3\sqrt{11}t\right)\right]$$

Όπως βλέπουμε στην γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης (διπλανό σχήμα), η μάζα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση πριν ισορροπήσει και πάλι στην τελική θέση, δηλαδή στα 0.1 m.

«Σωστή» - βέλτιστη απόσβεση

Ας είναι b = 15 N/(m/s) . Η απόκριση του συστήματος είναι τότε :



$$\boldsymbol{X(s) = \frac{10}{(s^2 + 15\,s + 100)s}}$$

Βρίσκουμε, με την βοήθεια του MatLab , τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της παραπάνω συνάρτησης :

$$x(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-15t/2}\left[\cos\left(5\sqrt{7}t/2\right) + \frac{3\sqrt{7}}{7}\sin\left(5\sqrt{7}t/2\right)\right]$$

Όπως βλέπουμε στην γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης (διπλανό σχήμα), η μάζα **φτάνει πολύ γρήγορα στην τελική της θέση, χωρίς ταλαντώσεις**.

Β. Απλό θερμικό σύστημα

Προσδιορίσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο το μαθηματικό μοντέλο ενός τέτοιου συστήματος :

$$\boldsymbol{q(t) + nQ\Theta_i(t) = C\dot{\Theta}(t) + nQ\Theta(t)}$$

Ας εξετάσομε ένα απλό, καθημερινό τέτοιο σύστημα : Τον ηλεκτρικό θερμοσίφωνα του σπιτιού μας, χωρητικότητας 100 kgr με θερμαντική αντίσταση 4000 W. Ας υποθέσομε επίσης ότι η θερμοχωρητικότητά του είναι αυτή του νερού που περιέχει. Ισχύει τότε :

$$n = 1\frac{Kcal}{Kgr\,℃} = 4186\frac{Jouls}{Kgr\,℃}$$

$$C = n * m = (4186 * 100)\frac{Jouls}{℃} = 418.6 * 10^3\ \frac{Jouls}{℃}$$

Ας δούμε σε πόσο χρόνο θα ανέβει η θερμοκρασία του νερού κατά 20^o C, από την στιγμή που θα τον ανοίξομε και με την υπόθεση ότι δεν ρέει νερό μέσα από αυτόν – δεν έχομε δηλαδή ανοίξει τις βρύσες του ζεστού. Τότε στο μοντέλο του συστήματος, αφού Q=0, γίνεται :

$$\boldsymbol{q(t) = C\dot{\Theta}(t) => \Theta(t) = \frac{4000}{C}t + \Theta_o}$$

Η θερμοκρασία, όπως ήταν αναμενόμενο αυξάνει γραμμικά με τον χρόνο. Αν στο παραπάνω θέσομε $\Theta(\mathrm{t}) - \Theta_o = 20℃$ προκύπτει $t \cong 35\,min$.

Ας εξετάσομε τώρα μια πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση : Νερό με σταθερή παροχή διέρχεται μέσα από το δοχείο. Ας υποθέσομε ακόμη ότι η θερμοκρασία του νερού που εισέρχεται είναι σταθερή και **ας ονομάσομε θ(t) = Θ(t) – Θ_i(t)** την άνοδο της θερμοκρασίας του υγρού κατά την διέλευση του από το δοχείο, εξ αιτίας βεβαίως της θερμότητας που δέχεται. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται τότε :

$$\boldsymbol{q(t) = C\dot{\Theta}(t) + nQ[\Theta(t) - \Theta_i(t)] => q(t) = C\dot{\theta}(t) + nQ\theta(t)}$$

Θα βρούμε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος θεωρώντας είσοδο την θερμότητα q(t) και έξοδο την άνοδο της θερμοκρασίας του υγρού, δηλαδή το θ(t). Μετασχηματίζουμε κατά Laplace και τα δύο μέλη της εξίσωσης :

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{q(t)}] = \mathcal{L}\left[\boldsymbol{C\dot{\theta}(t) + nQ\theta(t)}\right] =>$$

$$\boldsymbol{q(s) = Cs\theta(s) + nQ\theta(s) =>}$$

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{\theta(s)}{q(s)} => G(s) = \frac{1}{Cs + nQ} => G(s) = \frac{\frac{1}{nQ}}{\frac{C}{nQ}s + 1} = \frac{A}{Ts + 1}}$$

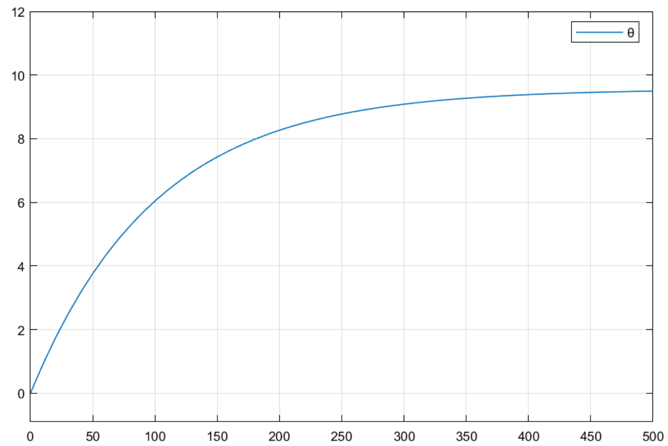
Πρόκειται για σύστημα $1^{ης}$ τάξης. Η σταθερά **T=C/nQ** έχει μονάδες χρόνου και ονομάζεται **σταθερά χρόνου του συστήματος**.
Ας δούμε τώρα πως θα «συμπεριφερθεί» ένα τέτοιος θερμοσίφωνας και πάλι νερού, μικρής χωρητικότητας αυτή τη φορά, m=10Kgr, που όμως θέλομε να ζεσταίνει μια συνεχή ροή νερού Q=0.1 Kgr/sec με την ίδια θερμαντική αντίσταση των q = 4000 watt. Η θερμοχωρητικότητά του τώρα είναι μικρότερη :

$$C = n * m = (4186 * 10)\frac{Jouls}{℃} = 41860\ \frac{Jouls}{℃}$$

Αν η θερμαντική αντίσταση ανοίξει την χρονική στιγμή 0, τότε η άνοδος (διαφορά) της θερμοκρασίας, σύμφωνα με το μοντέλο, είναι :

$$\theta(s) = G(s)q(s) = (\frac{A}{Ts+1})(\frac{q}{s})$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της παραπάνω συνάρτησης είναι :



$$\boldsymbol{\theta(t) = Aq(1 - e^{-\frac{t}{T}})}$$

Για την περίπτωσή μας :

$$Aq = \frac{q}{nQ} = \frac{4000}{4186 * 0.1} = 9.56\ ℃$$
$$T = \frac{C}{nQ} = \frac{41860}{4186 * 0.1} = 100\ sec$$

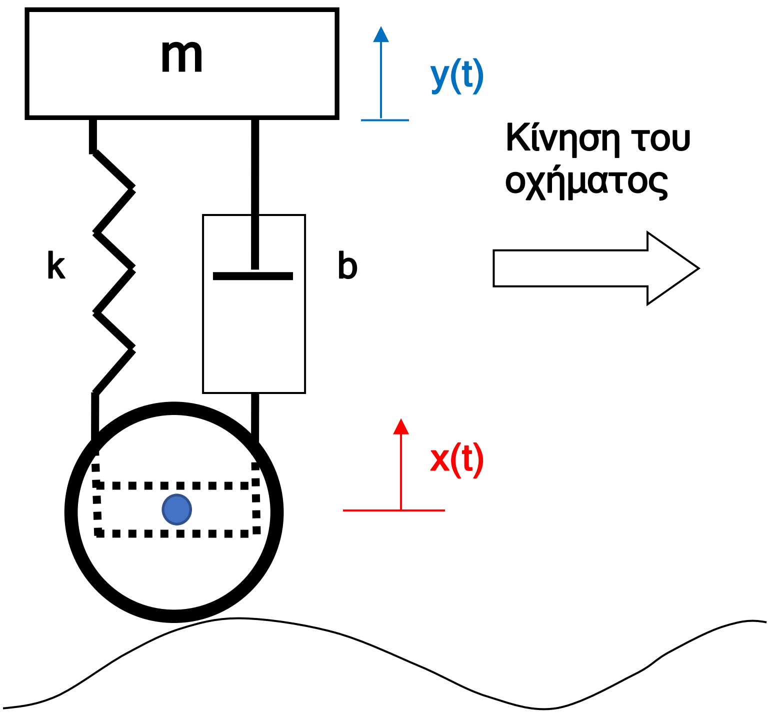
Η θερμοκρασία θα ανέβει σταδιακά και θα πλησιάζει ασυμπτωτικά τους 9.56^o C. Σε χρόνο όσο και η σταθερά χρόνου T, η θερμοκρασία θα έχει ανέβει :

$$\boldsymbol{\theta(T) = 9.56^oC\left(1 - e^{-\frac{T}{T}}\right) \cong 0.63 * 9.56^oC}$$

Σταθερά χρόνου, με άλλα λόγια, είναι ο χρόνος εκείνος που χρειάζεται ένα σύστημα 1^{ης} τάξης για να φτάσει στο 63% περίπου της τελικής του τιμής.

Γ. Ανάρτηση αυτοκινήτου.

Ένα απλό μοντέλο για την ανάρτηση τροχού αυτοκινήτου φαίνεται στο διπλανό σχήμα : Ένα μέρος της μάζας του αυτοκινήτου, ας πούμε m, στηρίζεται στον τροχό με την βοήθεια



ελατηρίου σταθεράς k και αποσβεστήρα σταθεράς b.
Καθώς ο τροχός κυλιέται στον γενικά ανώμαλο δρόμο, οι κατακόρυφες μετακινήσεις x(t) που επάγονται σ' αυτόν από το δρόμο, μεταβιβάζονται μέσω της ανάρτησης στο αμάξωμα ως y(t). Σκοπός κάθε σωστής ανάρτησης είναι αυτές οι μετατοπίσεις να φτάνουν όσο γίνεται πιο εξασθενημένες στο αμάξωμα.

Η συνολική συμπίεση του ελατηρίου είναι x(t) – y(t) , οπότε η δύναμη που αναπτύσσεται στα άκρα του είναι :

$$F_k(t) = k[x(t) - y(t)]$$

Αντίστοιχα, η δύναμη στα άκρα του αποσβεστήρα, είναι :

$F_b(t) = b[\dot{x}(t) - \dot{y}(t)]$

Οι δυό παραπάνω δυνάμεις, κινούν την μάζα κατά την κατεύθυνση y. Οπότε :

$$F_k(t) + F_b(t) = m\ddot{y}(t) => k[x(t) - y(t)] + b[\dot{x}(t) - \dot{y}(t)] = m\ddot{y}(t) =>$$

$$\boldsymbol{kx(t) + b\dot{x}(t) = m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t)}$$

… που αποτελεί και το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος. Μετασχηματίζομε κατά Laplace και θεωρούμε είσοδο στο σύστημα το x(t) και έξοδο το y(t).

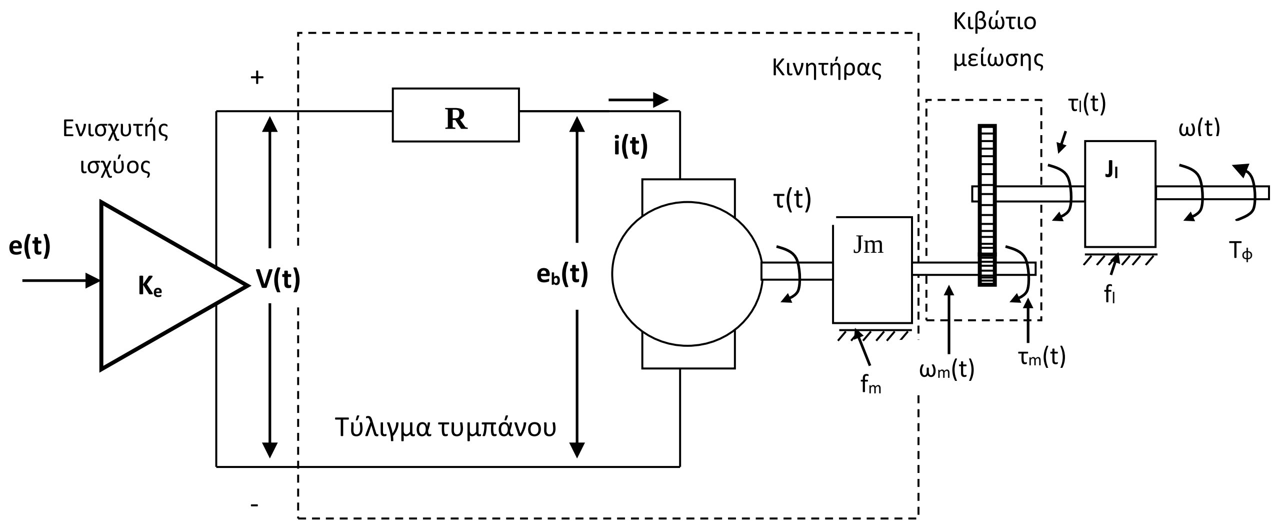
$$\mathcal{L}[kx(t) + b\dot{x}(t)] = \mathcal{L}[m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t)] =>$$

$$kx(s) + bsx(s) = ms^2y(s) + bsy(s) + ky(s) =>$$

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}}$$

Δ. Απλό μοντέλο κινητήρα συνεχούς ρεύματος

Ας θεωρήσομε τον κλασικό κινητήρα συνεχούς ρεύματος (DC) με μόνιμους μαγνήτες στον στάτη, ο οποίος, μέσω κιβωτίου μείωσης περιστρέφει φορτίο. Ο ενισχυτής ισχύος δίδει στο τύλιγμα του ρότορα την απαραίτητη τάση V για να κινηθεί. Τα παραπάνω αποτυπώνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



Ας είναι :

e : Τάση (σήμα) ελέγχου του ενισχυτή ισχύος
V : Επιβαλλόμενη τάση στο τύλιγμα τυμπάνου (ρότορας)

R : Αντίσταση τυλίγματος τυμπάνου
i : Ρεύμα στο τύλιγμα τυμπάνου
e_b : Αντι-ηλεκτρεγερτική δύναμη αναπτυσσόμενη στο τύμπανο.
τ : Ροπή αναπτυσσόμενη στο ρότορα του κινητήρα.
ω_m : Γωνιακή ταχύτητα του κινητήρα
K : Σταθερά ροπής του κινητήρα
K : Σταθερά αντι-ηλεκτρεγερτικής δύναμης

Ισχύουν :

$$\tau = K\iota \quad , \qquad e_b = K\omega_m$$

Για τα ηλεκτρικά μεγέθη στο τύλιγμα του τυμπάνου ισχύει (Νόμος Kirchoff) :

$$V(t) = R\iota(t) + e_b(t) = Ri(t) + K\omega_m(t)$$

Την τάση στον κινητήρα, παρέχει ενισχυτής ισχύος και ισχύει :

$$V(t) = K_e e(t)$$

Όπου e, η τάση ελέγχου του ενισχυτή ισχύος.

Η ροπή τ που αναπτύσσεται στον ρότορα του κινητήρα από το ηλεκτρικό πεδίο, κατά ένα μέρος της επιταχύνει τον ρότορα (ροπή αδράνειας ρότορα : Jm), υπερνικώντας και την ιξώδη τριβή της έδρασής του (συντελεστής ιξώδους τριβής κινητήρα fm) και κατά το υπόλοιπο είναι διαθέσιμη στον άξονά του (τ_m) για να κινήσει το φορτίο :

$$\tau(t) = J_m\dot{\omega}_m(t) + f_m\omega_m(t) + \tau_m(t)$$

Αν ο μειωτήρας έχει σχέση μετάδοσης n και κινεί φορτίο με ροπή αδράνειας J_l και συντελεστή ιξώδους τριβής f_l τότε ισχύουν :

$$\omega(t) = \frac{\omega_m(t)}{n} \quad , \ \tau_l(t) = n\tau_m(t)$$

Και πάλι, για την ροπή στον άξονα του φορτίου ισχύει όπως και πριν:

$$\tau_l(t) = J_l\dot{\omega}(t) + f_l\omega(t) + \tau_\varphi(t)$$

Όπου τ_ϕ η εξωτερική ροπή που καλείται να υπερνικήσει ο άξονας του φορτίου.

Από τις παραπάνω 8 εξισώσεις αν απαλειφθούν οι 7 «εσωτερικές μεταβλητές» του συστήματος, δηλαδή :

$$V, e_b, i, \tau, \omega, \tau_m, \tau_l$$

Προκύπτει μια σχέση (**το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος**) που συνδέει την είσοδο του συστήματος, δηλαδή την τάση e με την έξοδό του, δηλαδή την γωνιακή ταχύτητα ω_m του κινητήρα :

$$e(t) = (\frac{RJ_{eff}}{KK_e})\dot{\omega}_m(t) + (\frac{Rf_{eff} + K^2}{KK_e})\omega_m(t) + (\frac{R}{nKK_e})\tau_\varphi(t)$$

Όπου :

$$J_{eff} = J_m + \frac{J_l}{n^2} \qquad , \qquad f_{eff} = f_m + \frac{f_l}{n^2}$$

η <u>συνολική ροπή αδράνειας</u> και <u>η συνολική ιξώδης τριβή</u> του συστήματος αντίστοιχα, όπως τις «αισθάνεται» ο ρότορας του κινητήρα.

Αν θέσομε :

$$C_1 = \frac{R}{nKK_e} \quad , \quad C_2 = \frac{RJ_{eff}}{KK_e} \quad , \quad C_3 = \frac{Rf_{eff}+K^2}{KK_e}$$

Το μοντέλο του συστήματος γράφεται :

$$e(t) - C_1\tau_\varphi(t) = C_2\dot{\omega}_m(t) + C_3\omega_m(t)$$

Μετασχηματίζομε κατά Laplace και τα δύο μέλη της εξίσωσης και έχομε :

$$e(s) - C_1\tau_\varphi(s) = C_2 s\omega_m(s) + C_3\omega_m(s) \qquad =>$$

$$\boldsymbol{\frac{\omega_m(s)}{e(s)-C_1\tau_\varphi(s)}} = \frac{1}{C_2 s + C_3} = \frac{\frac{1}{C_3}}{\frac{C_2}{C_3}s+1} = \boldsymbol{\frac{K_{tot}}{Ts+1}}$$

Όπου :

$$K_{tot} = \frac{KK_e}{Rf_{eff}+K^2} \qquad\qquad T = \frac{RJ_{eff}}{Rf_{eff}+K^2}$$

Αν υποθέσομε ότι η εξωτερική ροπή τ_φ είναι μηδέν, τότε η συνάρτηση μεταφοράς που συνδέει την τάση ελέγχου e με την αναπτυσσόμενη γωνιακή ταχύτητα του ρότορα ω_m είναι :

$$\boldsymbol{G(s)} = \boldsymbol{\frac{\omega_m(s)}{e(s)}} = \boldsymbol{\frac{K_{tot}}{Ts+1}}$$

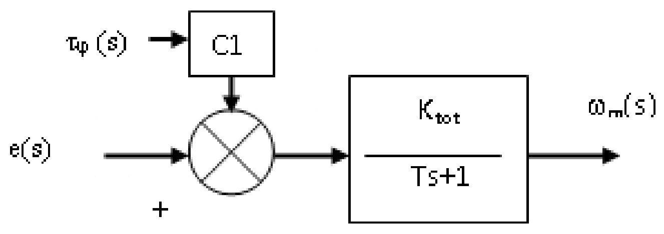
Πρόκειται δηλαδή για σύστημα πρώτης τάξης, αφού το πολυώνυμο του παρονομαστή είναι πρώτου βαθμού.

Η «απόκριση» του συστήματος αυτού σε είσοδο βαθμίδας, σε ξαφνική επιβολή δηλαδή τάσης ελέγχου Α, είναι, όπως και πριν :

$$\omega_m(t) = AK_{tot}(1 - e^{-t/T})$$

Η σταθερά Τ βέβαια είναι η <u>σταθερά χρόνου του συστήματος</u>.

<u>Το σύστημα ελέγχου γωνιακής ταχύτητας</u> ανοικτού βρόχου, απεικονίζεται σε μορφή μπλοκ διαγράμματος παρακάτω. Η <u>εξωτερική ροπή εμφανίζεται εδώ ως διαταραχή.</u>



Έλεγχος γωνίας στροφής του κινητήρα (Σερβομηχανισμός θέσης)

Ο έλεγχος της γωνίας στροφής του κινητήρα και κατ’ επέκταση της εξόδου του μειωτήρα, είναι σημαντικός για μια σειρά εφαρμογές : Ρομποτικά συστήματα, μηχανές αριθμητικού ελέγχου (CNC) και πολλές άλλες εφαρμογές ελέγχου θέσης.

<u>Μοντέλο του συστήματος για έλεγχο θέσης</u>

Για την γωνία στροφής θ_m του άξονα του κινητήρα ισχύει :

$$\dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t)$$

Οπότε το μοντέλο του κινητήρα, γίνεται τώρα :

$$e(t) = (\frac{RJ_{eff}}{KK_e})\ddot{\theta}_m(t) + (\frac{Rf_{eff} + K^2}{KK_e})\dot{\theta}_m(t) + (\frac{R}{nKK_e})\tau_\varphi(t)$$

Μετασχηματίζομε όπως και πριν κατά Laplace και παίρνομε :

$$\boldsymbol{\frac{\theta_m(s)}{e(s) - C_1\tau_\varphi(s)} = \frac{K_{tot}}{Ts^2 + s}}$$

Οπότε το σύστημα ελέγχου γωνιακής θέσης ανοικτού βρόχου είναι :