



Παράσταση ημιτονοειδούς σήματος στο πεδίο της συχνότητας

17

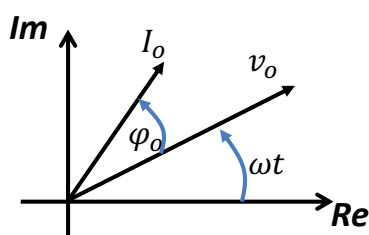


Βήμα 1: Αντιστοίχιση ημιτονοειδούς σήματος σε στρεφόμενο διάνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο

Εναλλασσόμενα μεγέθη		Στρεφόμενα διανύσματα
$v(t) = v_o \cos(\omega t)$		$\vec{V}(t) = v_o \angle (\omega t)$
$i(t) = I_o \cos(\omega t + \varphi_o)$		$\vec{I}(t) = I_o \angle (\omega t + \varphi_o)$

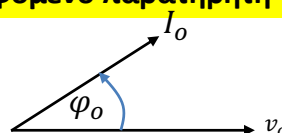
Το στρεφόμενο διάνυσμα του ρεύματος προηγείται κατά γωνία φ_o από αυτό της τάσης

Τα δύο διανύσματα στρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω



Παρατήρηση:

Η σχετική θέση των διανυσμάτων παραμένει σταθερή για έναν στρεφόμενο παρατηρητή



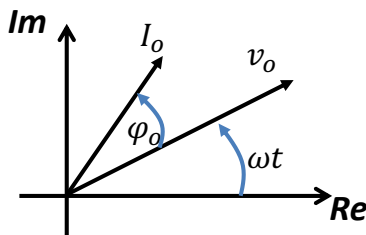
Επιλέξαμε το διάνυσμα της τάσης σαν διάνυσμα αναφοράς

18

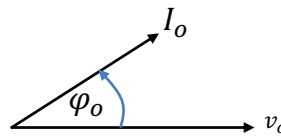


Βήμα 2: Μετασχηματισμός στρεφόμενου διανύσματος στο πεδίο της συχνότητας

Πεδίο του χρόνου



Πεδίο της συχνότητας



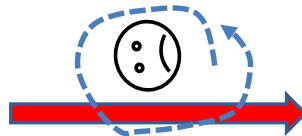
Ακίνητος παρατηρητής



Βλέπει χρονικά μεταβαλλόμενες ποσότητες



Παρατηρητής που περιστρέφεται μαζί με τα στρεφόμενα διανύσματα



Παρατηρεί χρονικά αμετάβλητες ποσότητες



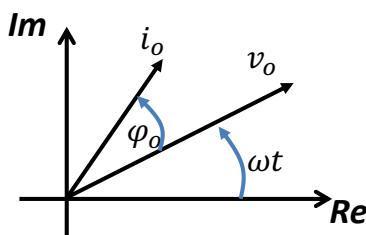
Λέμε ότι ο πρώτος παρατηρητής βρίσκεται στο πεδίο του χρόνου

Ο δεύτερος παρατηρητής βρίσκεται στο πεδίο της συχνότητας

19



Σύνοψη: Από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας και αντίστροφα

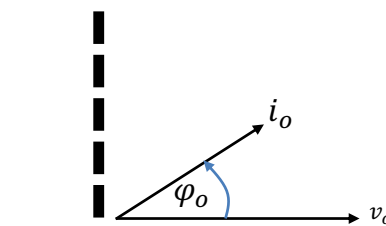


Πεδίο του χρόνου

$$i(t) = I_o \cos(\omega t + \varphi_o)$$



$$\begin{aligned} \text{Στρεφόμενο διάνυσμα} \\ \vec{I}(t) &= I_o \angle (\omega t + \varphi_o) \\ &= I_o e^{j(\omega t + \varphi_o)} \\ &= I_o \cos(\omega t + \varphi_o) + j I_o \sin(\omega t + \varphi_o) \end{aligned}$$



Η σχετική θέση των διανυσμάτων παραμένει σταθερή

Πεδίο της συχνότητας

δεν υπάρχει η παράμετρος του χρόνου \$t\$.

t=0

$$\begin{aligned} I &= I_o \angle (\varphi_o) \\ &= I_o e^{j(\varphi_o)} \\ &= I_o \cos(\varphi_o) + j I_o \sin(\varphi_o) \end{aligned}$$

t=0

\$e^{j\omega t}\$

20



Σύνοψη

Πεδίο χρόνου

$$i(t) = I_o \cos(\omega t + \varphi_o)$$

Στρεφόμενο διάνυσμα

$$\vec{I}(t) = I_o \angle(\omega t + \varphi_o) = I_o e^{j(\omega t + \varphi_o)} = I_o \cos(\omega t + \varphi_o) + j I_o \sin(\omega t + \varphi_o)$$

Πεδίο συχνότητας

$$I(j\omega) = I_o \angle(\varphi_o) = I_o e^{j(\varphi_o)} = I_o \cos(\varphi_o) + j I_o \sin(\varphi_o)$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός – Επιστροφή στο πεδίο του χρόνου: πολλαπλασιασμός με $e^{j\omega t}$

$$i(t) = \text{Re}\{I e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{I_o e^{j(\varphi_o)} e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{I_o e^{j(\omega t + \varphi_o)}\} = I_o \cos(\omega t + \varphi_o)$$

21



Παρατηρήσεις

Προσέξτε ότι με $i(t)$ συμβολίζουμε το μεταβαλλόμενο μέγεθος στο πεδίο του χρόνου, με $\vec{I}(t)$ το αντίστοιχο στρεφόμενο διάνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο και τέλος με $I(j\omega)$ τον μετασχηματισμό στο πεδίο της συχνότητας.

Επειδή τα όργανα μέτρησης των ημιτονοειδών τάσεων και ρευμάτων είναι ρυθμισμένα να μετρούν ενεργές τιμές (για το λόγο αυτό λέγονται και **ενδεικνύμενες τιμές**) συνηθίζεται τα ημιτονοειδή σήματα και τα στρεφόμενα διανύσματα να εκφράζονται με την βοήθεια **των ενεργών τιμών**. Έτσι στο πεδίο του χρόνου γράφουμε:

$$v(t) = v_o \cos(\omega t + \varphi) = v_{rms} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

ενώ στο πεδίο της συχνότητας γράφουμε: $V(j\omega) = v_{rms} \angle \varphi$

ή πιο απλά $V = v_{rms} \angle \varphi$

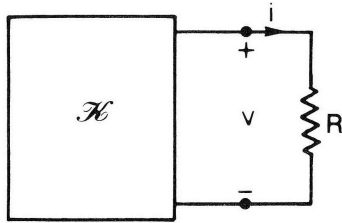
Γενικά στο πεδίο της συχνότητας δουλεύουμε πάντα με ενεργές τιμές.

22



Ωμική αντίσταση στο πεδίο της συχνότητας (1/2)

Πεδίο του χρόνου



Έστω ότι η τάση στα άκρα μίας αντίστασης R είναι:

$$v(t) = v_o \cos(\omega t + \varphi)$$

Το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση είναι:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{v_o}{R} \cos(\omega t + \varphi)$$

Πεδίο της συχνότητας

$$V = \frac{v_o}{\sqrt{2}} < \varphi = v_{rms} < \varphi$$

$$I = \frac{v_{rms}}{R} < \varphi$$

Από τον νόμο του Ohm έχω:

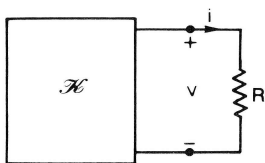
$$\frac{V}{I} = R < 0^\circ = R$$

23

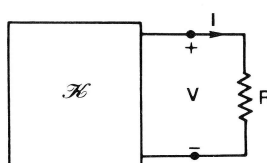


Ωμική αντίσταση στο πεδίο της συχνότητας (2/2)

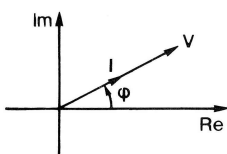
Η τάση και το ρεύμα είναι συμφασικά με αποτέλεσμα τα διανύσματα V, I στο πεδίο της συχνότητας να είναι συγγραμικά.



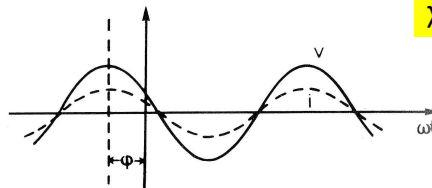
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Η ωμική αντίσταση στο πεδίο της συχνότητας αντιμετωπίζεται ακριβώς όπως και στο πεδίο του χρόνου.

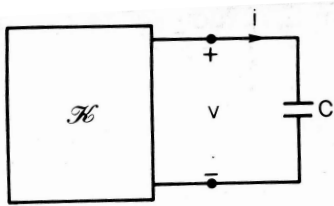
(α) κύκλωμα στο πεδίο του χρόνου, (β) κύκλωμα στο πεδίο της συχνότητας, (γ) διανυσματικό διάγραμμα και (δ) σήματα.

24



Πυκνωτής στο πεδίο της συχνότητας (1/2)

Πεδίο του χρόνου



Έστω ότι η τάση στα άκρα ενός πυκνωτή C είναι:
 $v(t) = v_o \cos(\omega t + \varphi)$

Το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή είναι:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = -C\omega v_o \sin(\omega t + \varphi) = C\omega v_o \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Πεδίο της συχνότητας

$$V = \frac{v_o}{\sqrt{2}} < \varphi = v_{rms} < \varphi$$

$$I = C\omega v_{rms} < (\varphi + \frac{\pi}{2})$$

Η σύνθετη αντίσταση του Πυκνωτή είναι:

$$\frac{V}{I} = \frac{1}{C\omega} < (-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{jC\omega} = Z_C$$

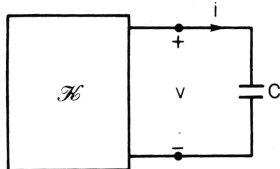
Ο λόγος $\frac{V}{I}$ για την περίπτωση του πυκνωτή είναι ένας φανταστικός αριθμός, ονομάζεται «**Χωρητική αντίδραση**» και το μέτρο της έχει διαστάσεις αντίστασης (Ω)

25

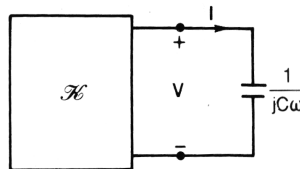


Πυκνωτής στο πεδίο της συχνότητας (2/2)

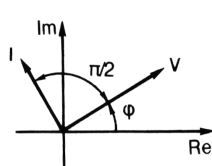
Το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ με αποτέλεσμα τα διανύσματα V, I στο πεδίο της συχνότητας να είναι κάθετα μεταξύ τους με αυτό του ρεύματος να προηγείται



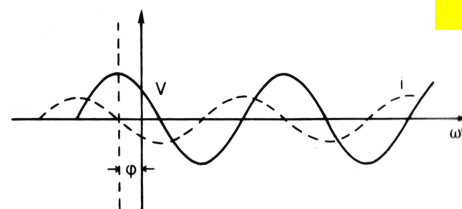
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Ο πυκνωτής χωρητικότητας C στο πεδίο της συχνότητας μετασχηματίζεται στην τιμή

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}$$

«Χωρητική αντίδραση»

$$X_C = |Z_C| = \frac{1}{C\omega}$$

Μονάδες σε Ω

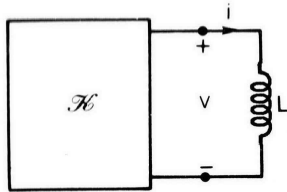
(α) κυκλώμα στο πεδίο του χρόνου, (β) κύκλωμα στο πεδίο της συχνότητας, (γ) διανυσματικό διάγραμμα και (δ) σήματα.

26



Πηνίο στο πεδίο της συχνότητας (1/2)

Πεδίο του χρόνου



Έστω ότι η τάση στα άκρα ενός πηνίου L είναι:
 $v(t) = v_o \cos(\omega t + \varphi)$

Το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt = \frac{v_o}{L\omega} \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = \frac{v_o}{L\omega} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

Πεδίο της συχνότητας

$$V = \frac{v_o}{\sqrt{2}} < \varphi = v_{rms} < \varphi$$

$$I = \frac{v_{rms}}{L\omega} < \varphi - \frac{\pi}{2}$$

Η σύνθετη αντίσταση του Πηνίου είναι:

$$\frac{V}{I} = L\omega < \frac{\pi}{2} = jL\omega = Z_L$$

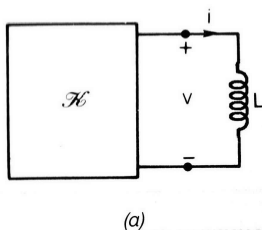
Ο λόγος $\frac{V}{I}$ για την περίπτωση του πηνίου είναι ένας φανταστικός αριθμός, ονομάζεται «**Επαγωγική αντίδραση**» και το μέτρο της έχει διαστάσεις αντίστασης (Ω)

27

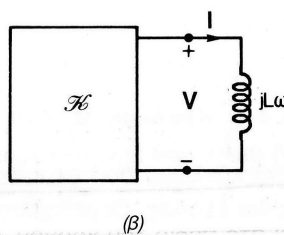


Πηνίο στο πεδίο της συχνότητας (2/2)

Το ρεύμα καθυστερεί της τάσης κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ με αποτέλεσμα τα διανύσματα V, I στο πεδίο της συχνότητας να είναι κάθετα μεταξύ τους κάθετα με αυτό του ρεύματος να καθυστερεί



(α)

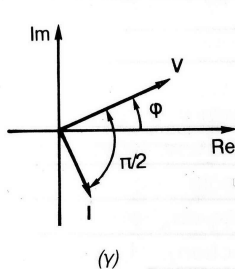


(β)

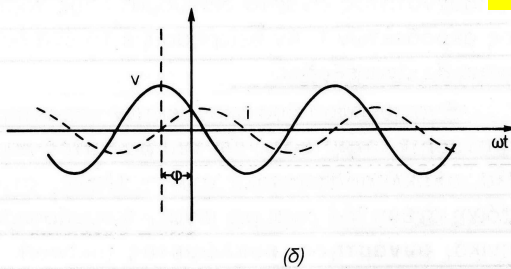
Το πηνίο αυτεπαγωγής L στο πεδίο της συχνότητας μετασχηματίζεται στην τιμή

$$Z_L = jL\omega$$

«**Επαγωγική αντίδραση**»



(γ)



(δ)

(α) κύκλωμα στο πεδίο του χρόνου, (β) κύκλωμα στο πεδίο της συχνότητας, (γ) διανυσματικό διάγραμμα και (δ) σήματα.

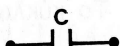
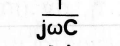
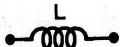
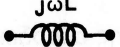
$$X_L = |Z_L| = L\omega$$

Μονάδες σε Ω

28



Σύνοψη-σχέσεις τάσης και ρεύματος των στοιχείων R, L, C στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας

Πεδίο του χρόνου		Πεδίο της συχνότητας	
Στοιχείο	Σχέση $i-v$	Στοιχείο	Σχέση $I-V$
	$v = Ri$		$V = RI$
	$v = \frac{1}{C} \int i dt$		$V = \frac{1}{j\omega C} I$
	$v = L \frac{di}{dt}$		$V = j\omega L I$

Πολύ σημαντικό!!!

Γενικά σε ένα κύκλωμα δύο ακροδεκτών όταν το ρεύμα με το οποίο τροφοδοτείται προηγείται της εφαρμοζόμενης τάσης λέμε ότι αυτό έχει «Χωρητική συμπεριφορά ή Χωρητικό χαρακτήρα» ενώ, στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι έχει «Επαγωγική συμπεριφορά ή Επαγωγικό χαρακτήρα».

29



Επίλυση κυκλώματος στο AC (εναλλασσόμενο ρεύμα)

Πολύ σημαντικό!!!

Γενικά αυτό που πρέπει να κάνει κάποιος για να επιλύσει ένα κύκλωμα στο εναλλασσόμενο ρεύμα είναι **να μετασχηματίσει** το κύκλωμά από το πεδίο του χρόνου στο **πεδίο της συχνότητας**. Αυτό γίνεται με την αντικατάσταση των πυκνωτών με $\frac{1}{j\omega C}$ και των πηνίων με $j\omega L$ χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες τους τιμές. Ακολουθώντας δουλεύει όπως ακριβώς και στο συνεχές ρεύμα χρησιμοποιώντας τις μεθόδους που μάθαμε για την ανάλυση ενός κυκλώματος στο DC. Τέλος μετά που θα υπολογιστούν οι τάσεις και τα ρεύματα στο πεδίο της συχνότητας, με **αντίστροφο μετασχηματισμό** στο πεδίο του χρόνου λαμβάνουμε τις στιγμιαίες τιμές τους στο **πεδίο του χρόνου**.

30