



Θεώρημα υπέρθεσης ή επαλληλίας

Το θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:

Σ' ένα γραμμικό κύκλωμα που περιλαμβάνει πολλά ενεργά στοιχεία (πηγές τάσης, ρεύματος), τα οποία δρουν ταυτόχρονα, η επίδρασή τους σ' ένα τμήμα ή στοιχείο του κυκλώματος μπορεί να προκύψει από το άθροισμα των επιδράσεων που είναι αποτέλεσμα της δράσης του κάθε ενεργού στοιχείου του κυκλώματος ξέχωρα.

Η αρχή αυτή προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι, τόσο τα ρεύματα όσο και οι τάσεις στα διάφορα σημεία του κυκλώματος, είναι γραμμικές συναρτήσεις των τάσεων των πηγών τάσης και των ρευμάτων των πηγών έντασης.

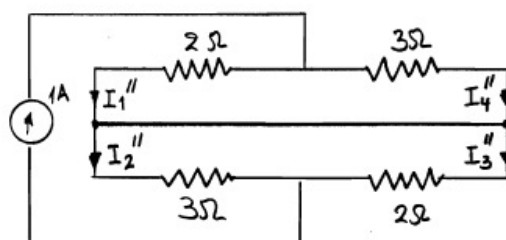
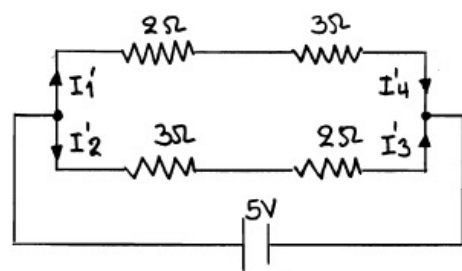
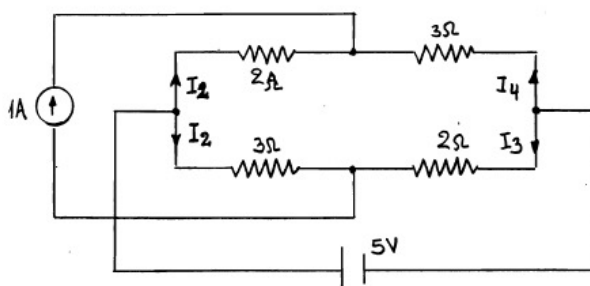
Επειδή η αρχή της υπέρθεσης προκύπτει από τη γραμμικότητα των συστημάτων που πρέπει να επιλυθούν για την εύρεση των ρευμάτων και των τάσεων, συνεπάγεται ότι δεν μπορεί να εφαρμοστεί απ' ευθείας για μεγέθη που δεν είναι γραμμικές συναρτήσεις των ρευμάτων και των τάσεων, όπως για παράδειγμα συμβαίνει με την ισχύ.

Σημειώνεται ότι η αντικατάσταση των πηγών τάσης γίνεται με βραχυκύκλωση τους, ενώ των πηγών ρεύματος με ανοικτό κύκλωμα.

53



Παραδείγματα



54



Συστηματικές μέθοδοι ανάλυσης κυκλωμάτων

Μέθοδος απλών βρόχων

- Αρχικά μετατρέπονται όλες οι πηγές ρεύματος σε πηγές τάσης, έτσι ώστε όλοι οι κλάδοι του κυκλώματος να περιέχουν (εάν περιέχουν πηγές) μόνο πηγές τάσης
- Κατόπιν εντοπίζονται όλοι οι **ελάχιστοι βρόχοι** και σε κάθε βρόχο ορίζεται ένα **ρεύμα βρόχου με φορά** (δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη).
- Εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του **Kirchhoff** για κάθε βρόχο, λαμβάνοντας υπ' όψιν μας **τα ρεύματα των βρόχων** που ορίσαμε πριν.
- Επιλύουμε **το σύστημα των εξισώσεων** που προκύπτει για να βρούμε τα ρεύματα των βρόχων.
- Τέλος υπολογίζουμε τα **ρεύματα** σε κάθε κλάδο του κυκλώματος με βάση τα ρεύματα βρόχων.

55



Μέθοδος απλών βρόχων

- Κατά την συγγραφή των εξισώσεων Kirchhoff θετικό λαμβάνεται το πρόσημο της τάσεως όταν το ρεύμα του βρόχου εξέρχεται από το θετικό πόλο της πηγής, ενώ στην αντίθετη περίπτωση λαμβάνεται αρνητικό.
- Η πτώσης τάσης πάνω στις αντιστάσεις λαμβάνεται πάντα αρνητική εφόσον διατρέχουμε το βρόχο κατά την φορά του ρεύματος βρόχου.
- Σε κλάδους που εμπλέκονται δύο ρεύματα γειτονικών βρόχων στις εξισώσεις θα βάζουμε πρώτα το ρεύμα του βρόχου που διατρέχουμε μείον το ρεύμα του γειτονικού βρόχου.

56

Άσκηση Θεωρίας

Δεδομένα: $V=10V$
 $R_1=R_2=R_3=R_4=1\Omega$

Ζητούμενα: $I_1=?$, $V_{R1}=?$
 $I_2=?$, $V_{R2}=?$
 $I_3=?$, $V_{R3}=?$
 $V_{R4}=?$

Επίλυση με τη Μέθοδο Βρόχων

1) Μετατρέπουμε όλες τις πηγές σε πηγές DC (ή πηγές τάσης)
2) Επιλέγουμε τα βρόχια ρεύμα I_1, I_2
3) Συνδέζουμε τα I_1, I_2 με τα πεύματα των κλάδων $I_1, I_2, I_3, \dots$
4) Γράφουμε τις εξισώσεις των βρόχων με βάση τους κανόνες του Kirchhoff
5) Ηλεκτρικοί νόμοι (Ohm) για πεύματα κλάδων

$$\begin{aligned} V - I_1 R_1 - R_2 (I_1 - I_2) &= 0 \\ -(I_2 - I_1) R_2 - I_2 R_3 - I_2 R_4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 10 - I_1 - I_1 + I_2 = 0 \\ -(I_2 - I_1) - I_2 - I_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 6A \\ I_2 = 2A \end{cases}$$

$I_1 = I_1 = 6A$ $I_3 = I_2 = 2A$

Επίλυση με κανόνες του Kirchhoff

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \quad (1) \\ V - I_1 R_1 - I_2 R_2 &= 0 \quad (2) \Rightarrow 10 - I_1 - I_2 = 0 \quad (4) \\ -I_2 R_3 - I_2 R_4 + I_2 R_2 &= 0 \quad (3) \Rightarrow I_2 - 2I_2 = 0 \quad (5) \Rightarrow I_2 = 2I_3 \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \Rightarrow 10 - 2I_2 - I_3 &= 0 \quad (7) \\ (7) \Rightarrow 10 - 4I_3 - I_3 &= 0 \Rightarrow 10 - 5I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = 2A \end{aligned}$$

Παρατήρηση!
Όταν γράφω τις εξισώσεις του Kirchhoff πρώτα βάζω το γύρω του βρόχου που είναι, δηλ. $(I_1 - I_2) R_2$ και $(I_2 - I_1)$ και λαμβάνω εξισώσεις!

58

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν τα πεύματα ρεύματων I_1, I_2, I_3

Δεδομένα: $I=1A$
 $R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=R_6=1\Omega$
 $V_1=V_2=1V$

Βρόχος I_1 : $-I_1 R_1 + V_1 - R_6 (I_1 - I_2) - V_4 - R_4 (I_1 - I_2) = 0$
Βρόχος I_2 : $-I_2 R_2 - R_5 (I_2 - I_3) - R_6 (I_2 - I_1) - V_6 = 0$
Βρόχος I_3 : $-R_4 (I_3 - I_1) + V_4 - R_5 (I_3 - I_2) - V - I_3 R_3 = 0$

Επίλυση των εξισώσεων...

$V_1 = I_1 R_1$

59



Να υπολογιστεί το ρεύμα αόθ ε αιώων
στα κυκλώματα και η διαφορά
δυναμικού των κορών Α, Β.
Επίσης να γίνει με τη μέθοδο των
ροών.

Ροές ΑΕΒΕ: $V_1 - I_A(R_1 + R_2 + R_3) - V_2 - R_6(I_A + I_B) = 0 \Rightarrow 0 = 10I_A + 5I_B$ (1)

Ροές ΒΕΕ: $-R_3(I_B - I_C) + V_3 - I_B R_4 - R_6(I_B + I_A) = 0 \Rightarrow 0 = 9I_B + 5I_A - 3I_C$ (2)

Ροές ΕΒΕ: $V_4 - R_4 I_C - R_5(I_C - I_B) = 0 \Rightarrow 20 = 4I_C - 3I_B$ (3)

Από των επιλύει των εξισώσεων (1), (2), (3) $\Rightarrow$

$I_A = -1,353 \text{ A}$, $I_B = 4,7 \text{ A}$, $I_C = 8,525 \text{ A}$

Υπολογισμός των ρευμάτων I_1, I_2, I_3, I_4 και I_5

$I_1 = -I_A = 1,353 \text{ A}$, $I_4 = I_C - I_B = 3,825 \text{ A}$

$I_2 = I_A + I_B = 3,347 \text{ A}$, $I_5 = I_C = 8,525 \text{ A}$

$I_3 = I_B = 4,7 \text{ A}$

Επίσης οτι $V_B = 0$

$V_A = V_{R3} + V_1 + V_{R1} = I_1 R_3 + V_1 + I_1 R_1$

$= 25,4 \text{ Volt}$

$V_{AB} = V_A = 25,4 \text{ Volt}$

60



Μέθοδος Cramer (για την επίλυση γραμμικών συστημάτων)

Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους είναι:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned} \quad (A1)$$

Η ορίζουσα των συντελεστών είναι:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (A2)$$

Εάν $\Delta \neq 0$, το σύστημα (A1) έχει λύση που δίνεται από τις σχέσεις:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad (A3)$$

όπου

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

και

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1 \quad (A4)$$

Σχόλιο: Η συνθήκη $\Delta \neq 0$ ισχύει πάντα σε προβλήματα ηλεκτρικών κυκλωμάτων καθότι, ρεύματα και τάσεις στους κλάδους ενός ηλεκτρικού κυκλώματος είναι μεγέθη υπαρκτά. Ως εκτούτου, το σύστημα έχει πάντοτε μονοσήμαντη λύση η οποία δίνεται από τη σχέση (A3).

61