

Ηλεκτροτεχνία-Ηλεκτρονική

Σχολή Μηχανικών
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Μελέτη κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος (AC)



jfasoulas@hmu.gr

Δρ. Φασουλάς Ιωάννης

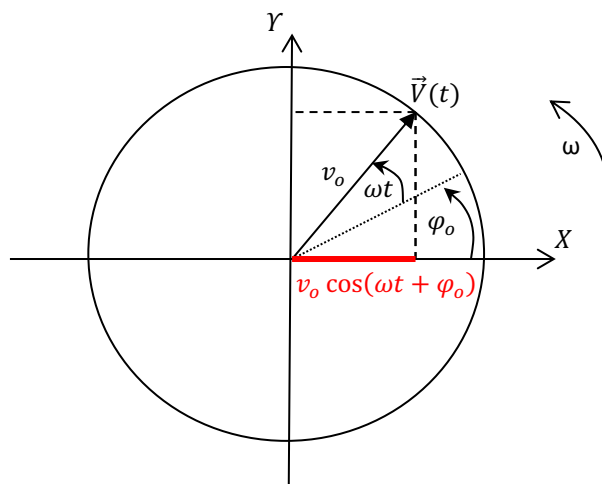
1. Διανυσματική και μιγαδική παράσταση ημιτονοειδούς σήματος

Η κυματομορφή ενός ημιτονοειδούς μεταβαλλόμενου μεγέθους (π.χ. τάσης $v(t)$ ή ρεύματος $i(t)$) σταθερής κυκλικής συχνότητας ω , πλάτους v_o και αρχικής φάσης φ_o , μπορεί να περιγραφεί από την ακόλουθη σχέση:

$$v(t) = v_o \cos(\omega t + \varphi_o)$$

όπου η ποσότητα $(\omega t + \varphi_o)$ ονομάζεται **γωνία φάσης** του ημιτονοειδούς μεγέθους ενώ η γωνία φ_o ονομάζεται **αρχική φάση**. Πράγματι για $t = 0$ η γωνία φάσης ταυτίζεται με την αρχική φάση φ_o .

Η τιμή $v(t)$ μπορεί να περιγραφεί με την προβολή ενός στρεφόμενου διανύσματος $\vec{V}(t)$ πλάτους v_o , αρχικής φάσης φ_o και κυκλικής συχνότητας ω , πάνω στον άξονα των X ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων $X - Y$ όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα:



Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι το ημιτονοειδές μεταβαλλόμενο μέγεθος $v(t)$ μπορεί να αντιστοιχηθεί στο στρεφόμενο διάνυσμα $\vec{V}(t)$. Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση που η αρχική φάση είναι μηδέν τότε το περιστρεφόμενο διάνυσμα ξεκινάει την κίνησή του από τον οριζόντιο άξονα των X , σε κάθε άλλη περίπτωση ξεκινάει από την γωνία φ_o .

Στην ηλεκτρολογία τα ηλεκτρικά ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενα μεγέθη (τάσεις, και ρεύματα) μπορούμε να τα αντιστοιχίσουμε σε στρεφόμενα διανύσματα όπως περιγράψαμε παραπάνω.

Αν αντικαταστήσουμε τον άξονα των X με τον **άξονα των πραγματικών αριθμών Re** και τον άξονα των Y με τον **άξονα των φανταστικών αριθμών Im** τότε, το στρεφόμενο διάνυσμα μπορεί να περιγραφεί και σαν ένας **μιγαδικός αριθμός** με μέτρο v_o και φάση $(\omega t + \varphi_o)$. Παρατηρείστε ότι το μέτρο αυτού του μιγαδικού είναι σταθερό και η φάση του μεταβάλλεται συνεχώς ως συνάρτηση του χρόνου t . Από τα παραπάνω, διαπιστώνουμε ότι τα ημιτονοειδή σήματα μπορούν να παρασταθούν με τις προβολές στρεφόμενων διανυσμάτων στον πραγματικό και φανταστικό άξονα ενός μιγαδικού επιπέδου.

2. Τρόποι παράστασης μιγαδικών αριθμών

Όπως είναι γνωστό υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να γράψει κάποιος ένα μιγαδικό αριθμό. Συνοψίζουμε λοιπόν, τους τέσσερις τρόπους που υπάρχουν (στην πράξη προτιμάμε κάθε φορά τη μορφή που μας διευκολύνει):

A) Καρτεσιανή μορφή $z = \alpha + jb$, όπου j αποτελεί τη φανταστική μονάδα με $j^2 = -1$

B) Τριγωνομετρική μορφή $z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$

Γ) Πολική μορφή $z = r \angle \theta$

Δ) Εκθετική μορφή $z = re^{j\theta}$

Στις παραπάνω σχέσεις με r, θ συμβολίζουμε αντίστοιχα το μέτρο και την φάση του μιγαδικού μας αριθμού. Τα a, b αποτελούν αντίστοιχα το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού δηλαδή, $Re\{z\} = a, Im\{z\} = b$. Αναλυτικότερα το μέτρο και η φάση δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$

Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού εκφράζει την απόσταση του από την αρχή των αξόνων ενώ η φάση εκφράζει τον προσανατολισμό του σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Τέλος αξίζει να αναφέρουμε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό ορίζεται και ο συζυγής του ο οποίος συμβολίζεται με $\bar{z}$ και για τον οποίο μπορούμε να γράψουμε:

$$\bar{z} = a - jb = r \angle -\theta = r(\cos \theta - j \sin \theta) = z^* = re^{-j\theta}$$

$$z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$$

Για την περίπτωση του στρεφόμενου διανύσματος που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο ο αντίστοιχος μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί με βάση τις μορφές που αναφέραμε παραπάνω ως εξής:

Πολική μορφή: $\vec{V}(t) = v_o \angle (\omega t + \varphi_o)$

Εκθετική μορφή: $\vec{V}(t) = v_o e^{j(\omega t + \varphi_o)}$

Τριγωνομετρική μορφή: $\vec{V}(t) = v_o \cos(\omega t + \varphi_o) + jv_o \sin(\omega t + \varphi_o)$

του οποίου το πραγματικό μέρος αντιστοιχεί στο ημιτονοειδές μεγέθους $v(t)$ που μελετάμε.

Προσοχή !

Το σύμβολο ($\angle$) στον παραπάνω συμβολισμό της πολικής μορφής του μιγαδικού αριθμού σημαίνει «**σε γωνία**» ή **όρισμα** και ουδεμία σχέση έχει με τον τελεστή «του μικρότερου» ή «μεγαλύτερου» που χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά και για το λόγο αυτό δεν πρέπει να συγχέεται.

3. Παράσταση ημιτονοειδούς σήματος στο πεδίο της συχνότητας

Γενικά στα κυκλώματα εναλλασσομένου ρεύματος η τάση και το ρεύμα είναι μη συμφασικά, αυτό συμβαίνει λόγω της ύπαρξης πυκνωτών ή/και πηνίων στο κύκλωμα. Έστω λοιπόν ότι η τάση και το ρεύμα σε ένα κύκλωμα περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$v(t) = v_o \cos(\omega t)$$

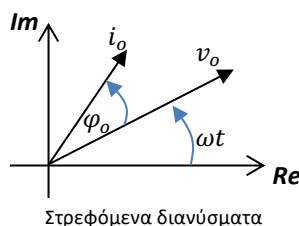
$$i(t) = i_o \cos(\omega t + \varphi_o)$$

Τα παραπάνω μεγέθη μπορούν να αναπαρασταθούν, στο μιγαδικό επίπεδο, με τα ακόλουθα δύο στρεφόμενα διανύσματα:

$$\vec{V}(t) = v_o \angle (\omega t)$$

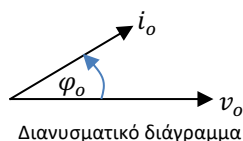
$$\vec{I}(t) = i_o \angle (\omega t + \varphi_o)$$

και παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα:



Το στρεφόμενο διάνυσμα του ρεύματος προηγείται κατά γωνία φ_o από αυτό της τάσης δηλαδή, τη χρονική στιγμή $t = 0$ η φάση της τάσης είναι μηδέν ενώ για το ρεύματος ίση με φ_o .

Επειδή τα δύο διανύσματα στρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω η σχετική τους θέση παραμένει σταθερή. Έτσι, ένας παρατηρητής που περιστρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω μαζί με τα διανύσματα αυτά, τα βλέπει ακίνητα και μετατοπισμένα το ένα σε σχέση με το άλλο κατά γωνία φ_o . Αν μάλιστα θεωρήσει το διάνυσμα της τάσης σαν διάνυσμα αναφοράς, θα δει το διανυσματικό διάγραμμα του παρακάτω σχήματος:



Ενώ λοιπόν, ένας ακίνητος παρατηρητής βλέπει χρονικά μεταβαλλόμενες ποσότητες, ένας παρατηρητής που περιστρέφεται μαζί με τα στρεφόμενα διανύσματα παρατηρεί χρονικά αμετάβλητες ποσότητες. Λέμε ότι ο πρώτος παρατηρητής βρίσκεται **στο πεδίο του χρόνου**, ενώ ο δεύτερος παρατηρητής βρίσκεται **στο πεδίο της συχνότητας**. Η μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας λέγεται **μετασχηματισμός**, ενώ η επιστροφή από το πεδίο της συχνότητας στο πεδίο του χρόνου λέγεται **αντίστροφος μετασχηματισμός**. Παρατηρήστε ότι στο πεδίο της συχνότητας δεν υπάρχει η παράμετρο του χρόνου t .

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το στρεφόμενο διάνυσμα $\vec{I}(t) = I_o \angle (\omega t + \varphi_o)$ έχει μετασχηματισμό στο πεδίο της συχνότητας το διάνυσμα $\mathbf{I} = i_o \angle (\varphi_o)$.

Σύνοψη

Για να μετασχηματίσουμε ένα ημιτονοειδές σήμα $i(t) = I_o \cos(\omega t + \varphi_o)$ στο πεδίο της συχνότητας δεχόμαστε ότι αυτό μπορεί να περιγραφεί, στο μιγαδικό επίπεδο, από ένα στρεφόμενο διάνυσμα και είναι δυνατό να γραφεί σε οποιαδήποτε μορφή από αυτές που περιγράψαμε παραπάνω δηλαδή:

$$\vec{I}(t) = I_o \angle(\omega t + \varphi_o) = I_o e^{j(\omega t + \varphi_o)} = I_o \cos(\omega t + \varphi_o) + j I_o \sin(\omega t + \varphi_o)$$

Τότε ο μετασχηματισμός στο πεδίο της συχνότητας λαμβάνεται με την απαλοιφή του χρόνου θέτοντας $t = 0$:

$$\mathbf{I} = I_o \angle(\varphi_o) = I_o e^{j(\varphi_o)} = I_o \cos(\varphi_o) + j I_o \sin(\varphi_o)$$

ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός από το πεδίο της συχνότητας στο πεδίο του χρόνου λαμβάνεται πολλαπλασιάζοντας το $\mathbf{I}$ με την ποσότητα $e^{j\omega t}$ και λαμβάνοντας το πραγματικό μέρος του μιγαδικού δηλαδή:

$$i(t) = \text{Re}\{I e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{I_o e^{j(\varphi_o)} e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{I_o e^{j(\omega t + \varphi_o)}\} = I_o \cos(\omega t + \varphi_o)$$

Επίσης, το σήμα $i(t) = I_o \sin(\omega t + \varphi_o)$ έχει μετασχηματισμό στο πεδίο της συχνότητας το στρεφόμενο διάνυσμα $\mathbf{I} = I_o \angle(\varphi_o)$ ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός από το πεδίο της συχνότητας στο πεδίο του χρόνου λαμβάνεται πολλαπλασιάζοντας το $\mathbf{I}$ με την ποσότητα $e^{j\omega t}$ και λαμβάνοντας το φανταστικό μέρος του μιγαδικού δηλαδή:

$$i(t) = \text{Im}\{I e^{j\omega t}\} = \text{Im}\{I_o e^{j(\varphi_o)} e^{j\omega t}\} = \text{Im}\{I_o e^{j(\omega t + \varphi_o)}\} = I_o \sin(\omega t + \varphi_o)$$

Παρατηρήσεις!!!

Παρατηρήστε ότι με $i(t)$ συμβολίζουμε το μεταβαλλόμενο μέγεθος στο πεδίο του χρόνου, με $\vec{I}(t)$ το αντίστοιχο στρεφόμενο διάνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο και τέλος με $\mathbf{I}$ τον μετασχηματισμό στο πεδίο της συχνότητας.

Επειδή τα όργανα μέτρησης των ημιτονοειδών τάσεων και ρευμάτων είναι ρυθμισμένα να μετρούν ενεργές τιμές (για το λόγο αυτό λέγονται και **ενδεικνύμενες τιμές**) συνηθίζεται τα ημιτονοειδή σήματα και τα στρεφόμενα διανύσματα να εκφράζονται με την βοήθεια των ενεργών τιμών. Έτσι στο πεδίο του χρόνου γράφουμε:

$$v(t) = v_o \cos(\omega t + \varphi) = v_{rms} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

ενώ στο πεδίο της συχνότητας γράφουμε:

$$\mathbf{V}(j\omega) = v_{rms} \angle \varphi \quad \text{ή πιο απλά} \quad \mathbf{V} = v_{rms} \angle \varphi$$

Γενικά στο πεδίο της συχνότητας δουλεύουμε πάντα με ενεργές τιμές.

4. Ωμική αντίσταση στο πεδίο της συχνότητας

Έστω μία ιδανική ημιτονοειδής τάση $v(t) = v_o \cos(\omega t + \varphi)$ η οποία οδηγεί την ωμική αντίσταση R . Το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση είναι $i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{v_o}{R} \cos(\omega t + \varphi)$. Ο μετασχηματισμός της τάσης και του ρεύματος στο πεδίο της συχνότητας είναι αντίστοιχα:

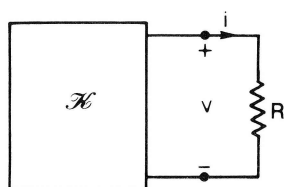
$$V = \frac{v_o}{\sqrt{2}} < \varphi_o = v_{rms} < \varphi$$

$$I = \frac{v_{rms}}{R} < \varphi$$

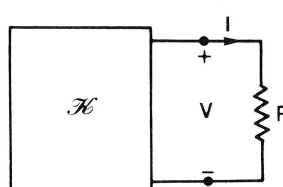
Από τον νόμο του Ohm μπορώ να γράψω:

$$\frac{V}{I} = R < 0^\circ = R$$

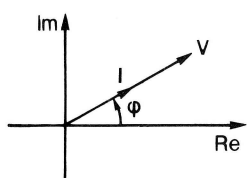
Όποια έκφραση και να χρησιμοποιήσουμε (πεδίο χρόνου ή πεδίο συχνότητας) παρατηρούμε ότι **η τάση και το ρεύμα είναι συμφασικά** με αποτέλεσμα τα διανύσματα V, I στο πεδίο της συχνότητας να είναι συγγραμικά. Η ωμική αντίσταση στο πεδίο της συχνότητας αντιμετωπίζεται ακριβώς όπως και στο πεδίο του χρόνου.



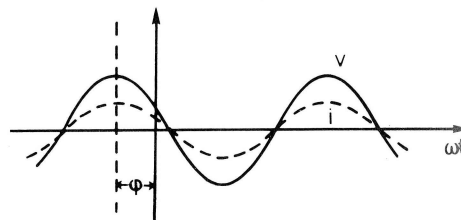
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Μετασχηματισμός αντίστασης στο πεδίο της συχνότητας: (α) κύκλωμα στο πεδίο του χρόνου, (β) κύκλωμα στο πεδίο της συχνότητας, (γ) διανυσματικό διάγραμμα και (δ) σήματα.

5. Πυκνωτής στο πεδίο της συχνότητας

Έστω μία ιδανική ημιτονοειδής τάση $v(t) = v_o \cos(\omega t + \varphi)$ η οποία οδηγεί ένα πυκνωτή χωρητικότητας C . Το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = -C\omega v_o \sin(\omega t + \varphi) = C\omega v_o \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Ο μετασχηματισμός της τάσης και του ρεύματος στο πεδίο της συχνότητας είναι αντίστοιχα:

$$V = \frac{v_o}{\sqrt{2}} < \varphi = v_{rms} < \varphi$$

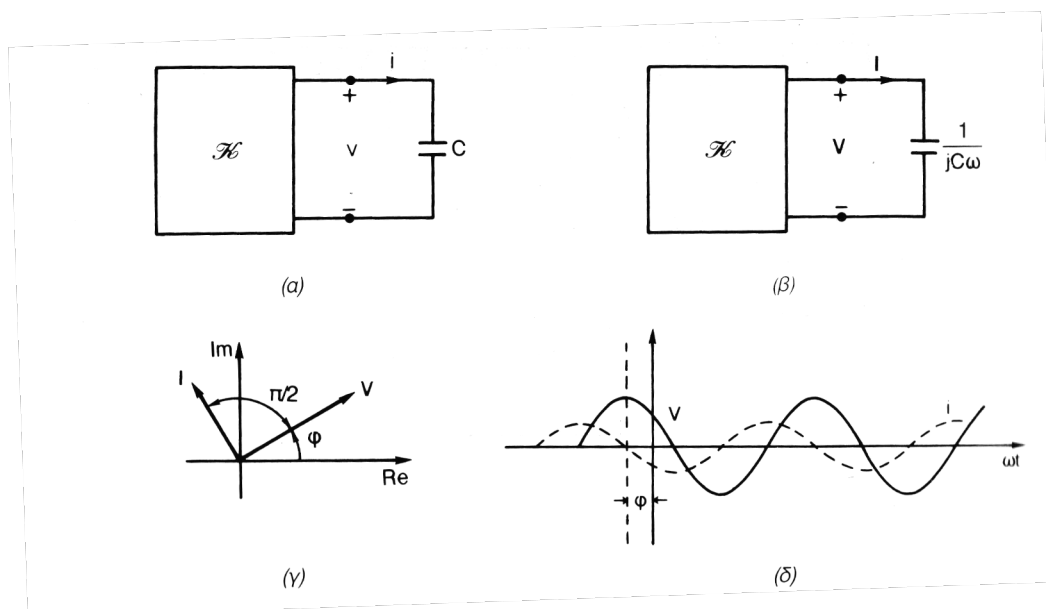
$$I = C\omega v_{rms} < (\varphi + \frac{\pi}{2})$$

(Μην ξεχνάτε ότι τις τάσεις και τα ρεύματα στο πεδίο της συχνότητας τα εκφράζουμε πάντα με ενεργές τιμές)

Ο λόγος $\frac{V}{I}$ για την περίπτωση του πυκνωτή είναι ένας φανταστικός αριθμός και ονομάζεται **χωρητική αντίδραση** και το μέτρο της έχει διαστάσεις αντίστασης (Ω):

$$\frac{V}{I} = \frac{1}{C\omega} < (-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{jC\omega}$$

Όποια έκφραση και να χρησιμοποιήσουμε (πεδίο χρόνου ή πεδίο συχνότητας) παρατηρούμε ότι **το ρεύμα προηγείται της τάσης** κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ με αποτέλεσμα τα διανύσματα V, I στο πεδίο της συχνότητας να είναι κάθετα μεταξύ τους με αυτό του ρεύματος να προηγείται. Ο πυκνωτής χωρητικότητας C στο πεδίο της συχνότητας μετασχηματίζεται στην τιμή $\frac{1}{jC\omega}$.



Μετασχηματισμός πυκνωτή στο πεδίο της συχνότητας: (α) κύκλωμα στο πεδίο του χρόνου, (β) κύκλωμα στο πεδίο της συχνότητας, (γ) διανυσματικό διάγραμμα και (δ) σήματα.

6. Πηνίο στο πεδίο της συχνότητας

Έστω μία ιδανική ημιτονοειδής τάση $v(t) = v_o \cos(\omega t + \varphi)$ η οποία οδηγεί ένα πηνίο αυτεπαγωγής L . Το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση $i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt$:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt = \frac{v_o}{L\omega} \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = \frac{v_o}{L\omega} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

Ο μετασχηματισμός της τάσης και του ρεύματος στο πεδίο της συχνότητας είναι αντίστοιχα:

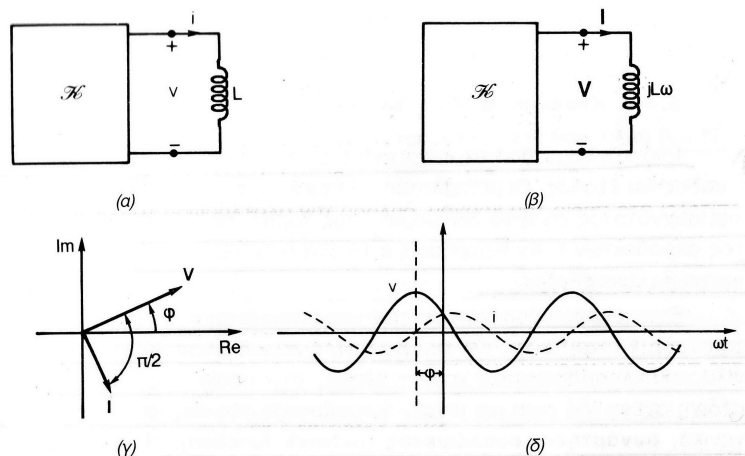
$$V = \frac{v_o}{\sqrt{2}} < \varphi = v_{rms} < \varphi$$

$$I = \frac{v_{rms}}{L\omega} < \varphi - \frac{\pi}{2}$$

Ο λόγος $\frac{V}{I}$ για την περίπτωση του πηνίου είναι ένας φανταστικός αριθμός και ονομάζεται **επαγωγική αντίδραση** και το μέτρο της έχει διαστάσεις αντίστασης (Ω):

$$\frac{V}{I} = L\omega < \frac{\pi}{2} = jL\omega$$

Παρατηρούμε ότι **το ρεύμα καθυστερεί της τάσης** κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ με αποτέλεσμα τα διανύσματα V, I στο πεδίο της συχνότητας να είναι κάθετα μεταξύ τους με αυτό του ρεύματος να καθυστερεί. Το πηνίο αυτεπαγωγής L στο πεδίο της συχνότητας μετασχηματίζεται στην τιμή $jL\omega$.



Μετασχηματισμός πηνίου στο πεδίο της συχνότητας: (α) κύκλωμα στο πεδίο του χρόνου, (β) κύκλωμα στο πεδίο της συχνότητας, (γ) διανυσματικό διάγραμμα και (δ) σήματα.

Γενικά σε ένα κύκλωμα δύο ακροδεκτών όταν το ρεύμα προηγείται της τάσης λέμε ότι αυτό έχει **χωρητική συμπεριφορά** ενώ, στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι έχει **επαγωγική συμπεριφορά**.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συνοπτικά οι σχέσεις τάσης και ρεύματος των στοιχείων R, L, C στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας.

Πεδίο του χρόνου		Πεδίο της συχνότητας	
Στοιχείο	Σχέση i-v	Στοιχείο	Σχέση I-V
	$v = Ri$		$V = RI$
	$v = \frac{1}{C} \int i dt$		$V = \frac{1}{j\omega C} I$
	$v = L \frac{di}{dt}$		$V = j\omega L I$

Γενικά αυτό που πρέπει να κάνει κάποιος για να επιλύσει ένα κύκλωμα στο εναλλασσόμενο ρεύμα είναι να μετασχηματίσει το κύκλωμά από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας. Αυτό γίνεται με την αντικατάσταση των πυκνωτών με $\frac{1}{j\omega C}$ και των πηνίων με $jL\omega$ χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες τους τιμές. Ακολούθως δουλεύει όπως ακριβώς και στο συνεχές ρεύμα. Τέλος μετά που θα υπολογιστούν οι τάσεις και τα ρεύματα στο πεδίο της συχνότητας, με αντίστροφο μετασχηματισμό στο πεδίο του χρόνου λαμβάνουμε τις στιγμιαίες τιμές τους στο πεδίο του χρόνου.