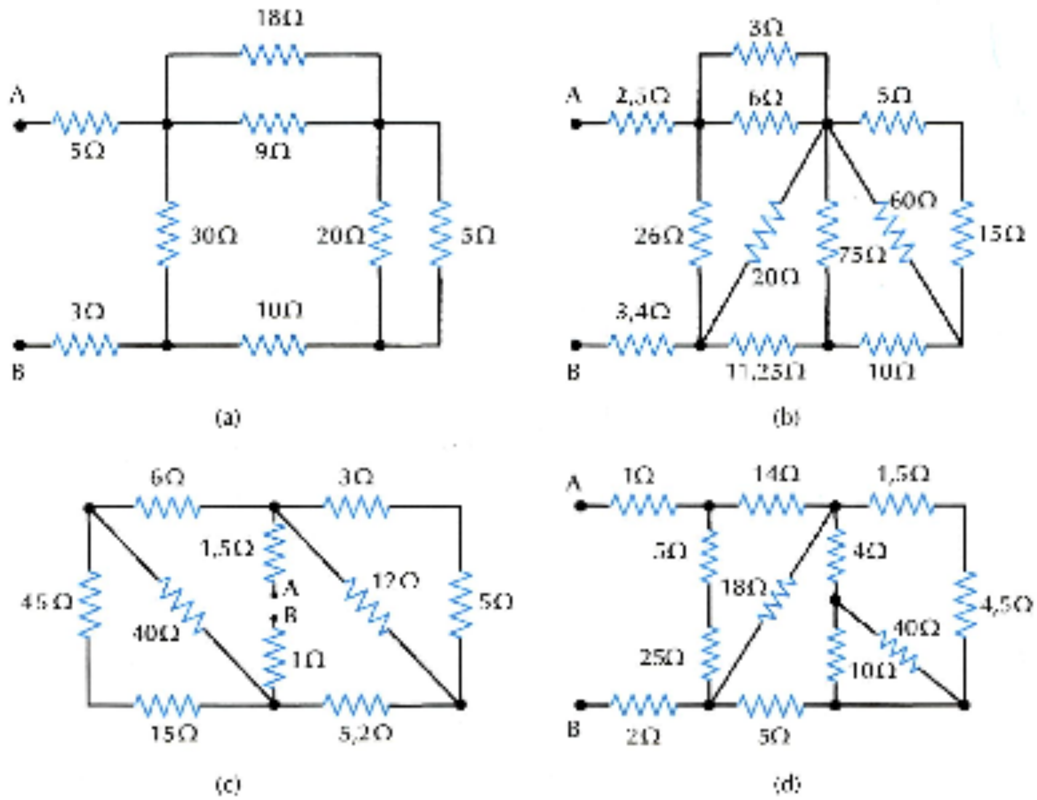
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ DC

Παραδείγματα υπολογισμού αντιστάσεων

Να βρεθούν οι ισοδύναμες αντιστάσεις R_{AB} για καθένα από τα παρακάτω κυκλώματα.



Λύση

Για το κύκλωμα (a):

$$R_{AB} = (20//5 + 10 + 18//9)//30 + 5 + 3 = (4 + 10 + 6)//30 + 8 =$$
$$= 20//30 + 8 = 12 + 8 \Rightarrow R_{AB} = 20\ (\Omega)$$

Για το κύκλωμα (b):

$$R_{AB} = \{\{[(5 + 15)//60 + 10]//75 + 11{,}25\}//20 + 3//6\}//26 + 2{,}5 + 3{,}4 =$$
$$= \{[(20//60 + 10)//75 + 11{,}25]//20 + 2\}//26 + 5{,}9 =$$
$$= \{[(15 + 10)//75 + 11{,}25]//20 + 2\}//26 + 5{,}9 =$$
$$= [(25//75 + 11{,}25)//20 + 2]//26 + 5{,}9 =$$

$$= [(18{,}75 + 11{,}25)//20 + 2]//26 + 5{,}9 = (30//20 + 2)//26 + 5{,}9 =$$
$$= (12 + 2)//26 + 5{,}9 = 14//26 + 5{,}9 =$$
$$= 9{,}1 + 5{,}9 \Rightarrow R_{AB} = 10\ (\Omega)$$

Για το κύκλωμα (c):

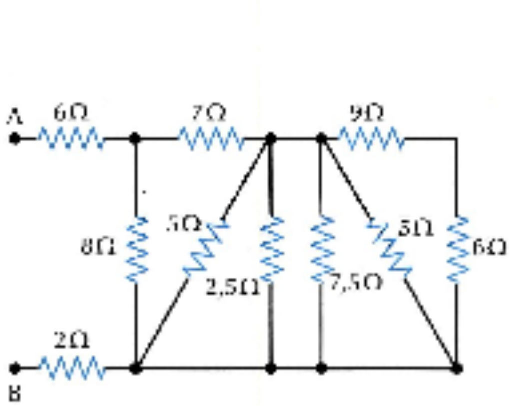
$$R_{AB} = [(3 + 5)//12 + 5{,}2]//[(45 + 15)//40 + 6] + 1{,}5 + 1$$
$$= (8//12 + 5{,}2)//(60//40 + 6) + 2{,}5 = (4{,}8 + 5{,}2)//(24 + 6) + 2{,}5 =$$
$$= 10//30 + 2{,}5 = 7{,}5 + 2{,}5 \rightarrow R_{AB} = 10\ (\Omega)$$

Για το κύκλωμα (d):

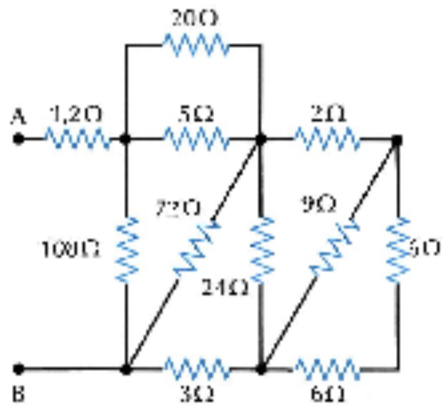
$$R_{AB} = [[(1{,}5 + 4{,}5)//(4 + 10//40) + 5]//18 + 14]//(5 + 25) + 1 + 2 =$$
$$= [[6//(4 + 8) + 5]//18 + 14]//30 + 3 =$$
$$= [(6//12 + 5)//18 + 14]//30 + 3 = [(4 + 5)//18 + 14]//30 + 3 =$$
$$= (9//18 + 14)//30 + 3 = (6 + 14)//30 + 3 =$$
$$= 20//30 + 3 = 12 + 3 \Rightarrow R_{AB} = 15\ (\Omega)$$

Σχόλιο: *Γιά την εύρεση της ολικής αντίστασης που "βλέπουμε" από δύο ακροδέκτες εφαρμόζουμε τους κανόνες της συνδεσμολογίας αντιστάσεων από την απέναντι πλευρά και σιγά σιγά προχωρούμε προς τους ακροδέκτες αυτούς.*

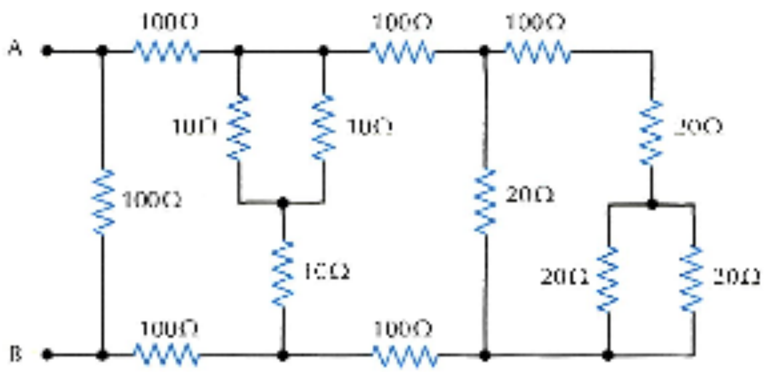
Να βρεθούν οι ισοδύναμες αντιστάσεις R_{AB} στα παρακάτω κυκλώματα.



(a)



(b)



(c)

Για το κύκλωμα (a):

$$R_{AB} = [(6 + 9)//5//7,5//2,5//5 + 7]//8 + 6 + 2 = [15//5//7,5//2,5//5 + 7]//8 + 8$$
$$= [5//5//2,5//7,5//15 + 7]//8 + 8 = [2,5//2,5//5 + 7]//8 + 8$$
$$= [1,25//5 + 7]//8 + 8 = [1 + 7]//8 + 8 = 8//8 + 8 = 4 + 8 \rightarrow R_{AB} = 12\ (\Omega)$$

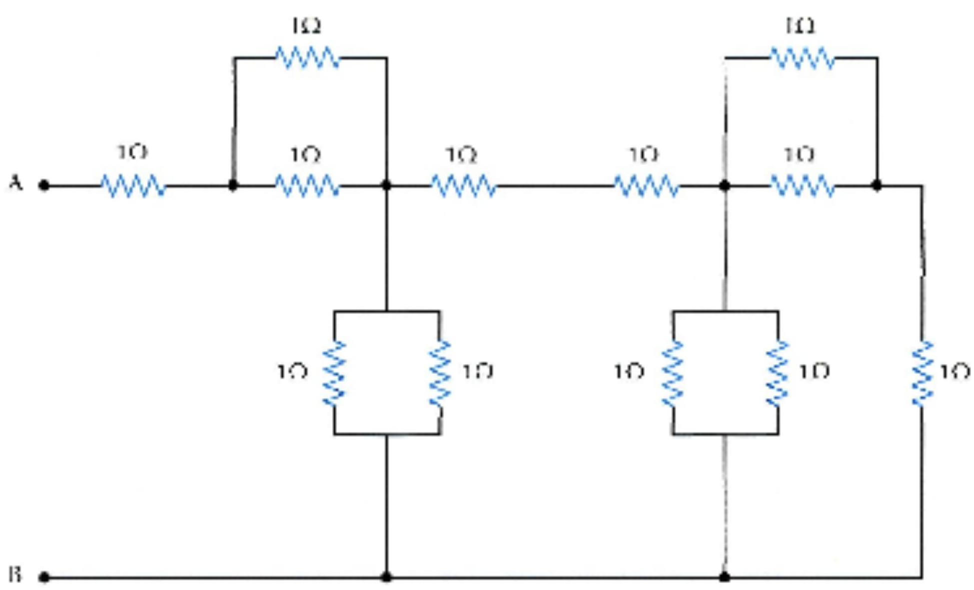
Για το κύκλωμα (b):

$$R_{AB} = \{[[(12 + 6)//9 + 2]//24 + 3]//72 + 20//5\}//108 + 1,2 =$$
$$= [[(18//9 + 2)//24 + 3]//72 + 4]//108 + 1,2 =$$
$$= [[(6 + 2)//24 + 3]//72 + 4]//108 + 1,2 = [(8//24 + 3)//72 + 4]//108 + 1,2 =$$
$$= [(6 + 3)//72 + 4]//108 + 1,2 = (9//72 + 4)//108 + 1,2 =$$
$$= (8 + 4)//108 + 1,2 = 12//108 + 1,2 = 10,8 + 1,2 \Rightarrow R_{AB} = 12\ (\Omega)$$

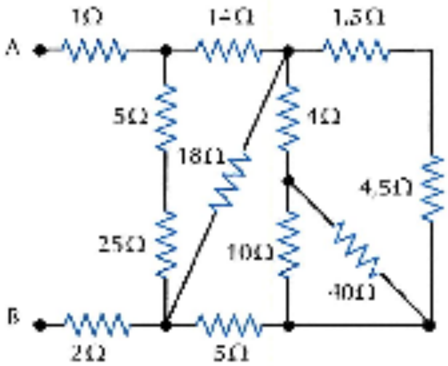
Για το κύκλωμα (c):

$$R_{AB} = \{[(20//20 + 20 + 100)//20 + 100 + 100]//(10//10 + 10) + 100 + 100\}//100 =$$
$$= \{[(10 + 120)//20 + 200]//(5 + 10) + 200\}//100 =$$
$$= [(130//20 + 200)//15 + 200]//100 = [(17.33 + 200)//15 + 200]//100 =$$
$$= (217,33//15 + 200)//100 = (14,03 + 200)//100 = 214,03//100 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_{AB} = 68,156\ (\Omega)$$

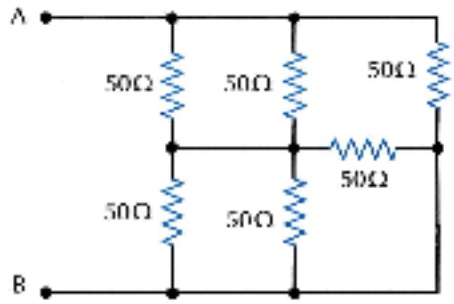
2° Να βρεθούν οι ισοδύναμες αντιστάσεις R_{AB} για καθένα από τα παρακάτω κυκλώματα.



(α)

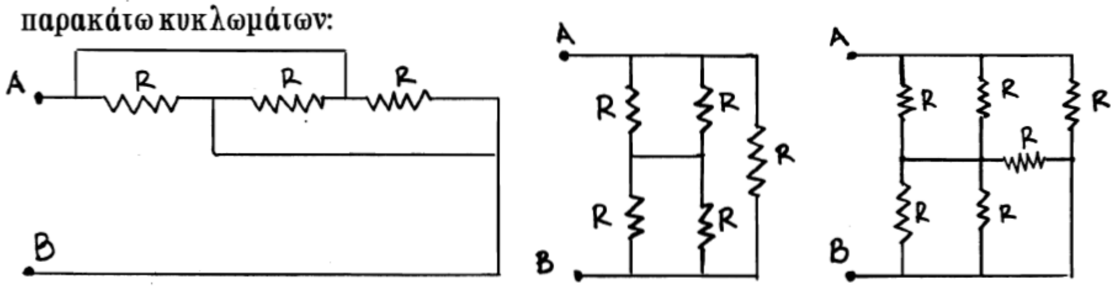


(β)



(γ)

Να βρεθούν οι ισοδύναμες αντιστάσεις $R_{ισοδ.}$, από τα άκρα Α, Β, των παρακάτω κυκλωμάτων:

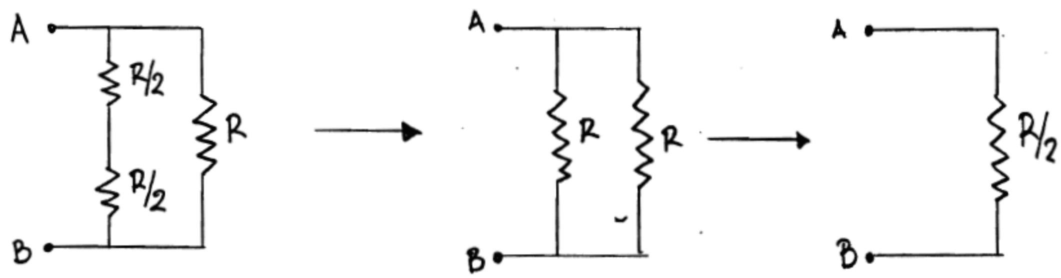


Λύση:

α) Για το πρώτο κύκλωμα παρατηρούμε ότι τα σημεία Γ και Ε είναι ισοδυναμικά με το άκρο Α, ενώ τα σημεία Δ και Ζ είναι ισοδυναμικά με το άκρο Β. Συνεπώς όλες οι αντιστάσεις έχουν τα δύο άκρα τους κοινά στα σημεία Α και Β και συνεπώς είναι παράλληλα συνδεδεμένες ή:

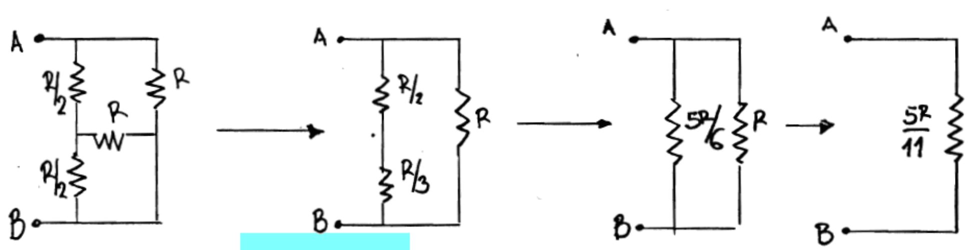
$$R_{ισοδ.} = \frac{R}{3}$$

β) Η όλη διαδικασία απλοποίησης και εύρεσης της $R_{ισοδ.}$ φαίνεται παρακάτω:



Συνεπώς $R_{ισοδ.} = \frac{R}{2}$

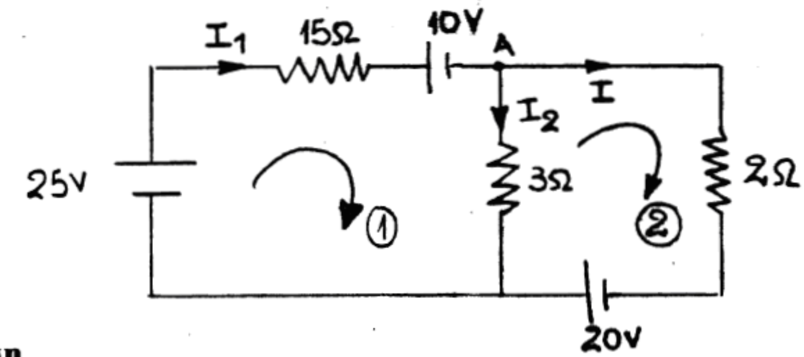
γ) Η όλη διαδικασία απλοποίησης και εύρεσης της $R_{ισοδ.}$ φαίνεται παρακάτω:



Οπότε $R_{ισοδ.} = \frac{5}{11} \cdot R.$

Παραδείγματα εφαρμογής νόμων του Κίρκοφ

2.1 Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθεί το ρεύμα I στην αντίσταση των 2 Ω και η τάση U_{AB} χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Kirchhoff



Λύση

Για τον κόμβο Α ισχύει: $I_1 - I_2 - I = 0$

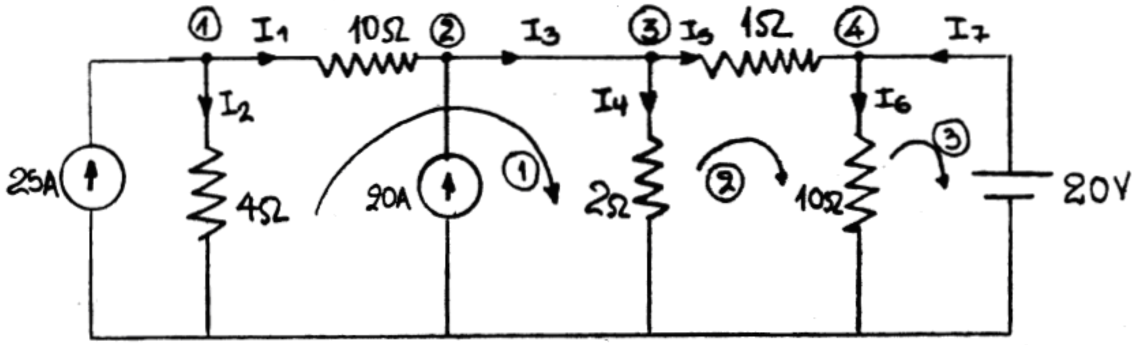
Για το βρόχο 1 ισχύει: $25 - 10 - 15I_1 - 3I_2 = 0 \Rightarrow 15I_1 + 3I_2 = 15$

Για το βρόχο 2 ισχύει: $20 - 2I + 3I_2 = 0 \Rightarrow -3I_2 + 2I = 20$

Από τις παραπάνω τρεις εξισώσεις προκύπτει:

I_1=1,667A, I_2=-3,333A, I=5A και $U_{AB} = I_2\, 3\Omega$=-10V

2.2 Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθούν τα ρεύματα I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7 χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Kirchhoff :



Λύση

Αφού οι άγνωστοι είναι 7 χρειάζονται επτά εξισώσεις οι οποίες προκύπτουν εφαρμόζοντας τους νόμους του Kirchhoff στους κόμβους 1,2,3,4 και στους βρόχους 1,2,3:

κόμβος 1: $25 = I_1 + I_2$ κόμβος 2: $I_1 + 20 = I_3$

κόμβος 3: $I_3 = I_4 + I_5$ κόμβος 4: $I_5 + I_7 = I_6$

βρόχος 1: $4 \cdot I_2 - 10 \cdot I_1 - 2 \cdot I_4 = 0$ βρόχος 2: $-I_5 - 10 \cdot I_6 + 2 \cdot I_4 = 0$

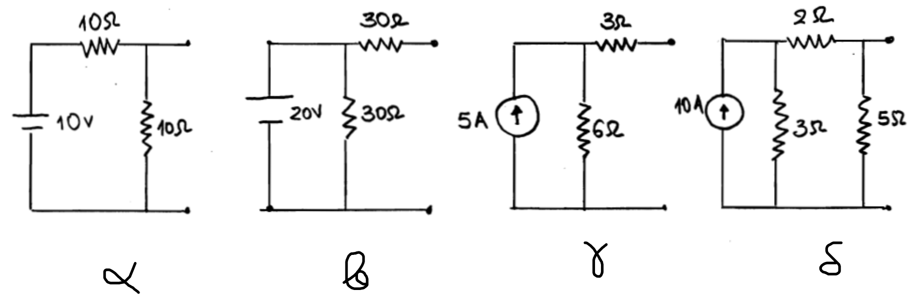
βρόχος 3 $-20 + 10 \cdot I_6 = 0$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν οι λύσεις:

I_1=5A, I_2=20A, I_3=25A, I_4=15A, I_5=10A, I_6=2A, I_7=-8A.

Παραδείγματα μετασχηματισμού πηγής τάσης σε πηγή ρεύματος

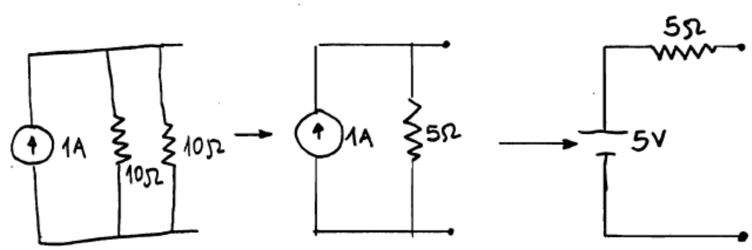
2.5 Με συνεχείς μετασχηματισμούς να αντικατασταθούν τα παρακάτω κυκλώματα με μια πηγή τάσης και μία αντίσταση:



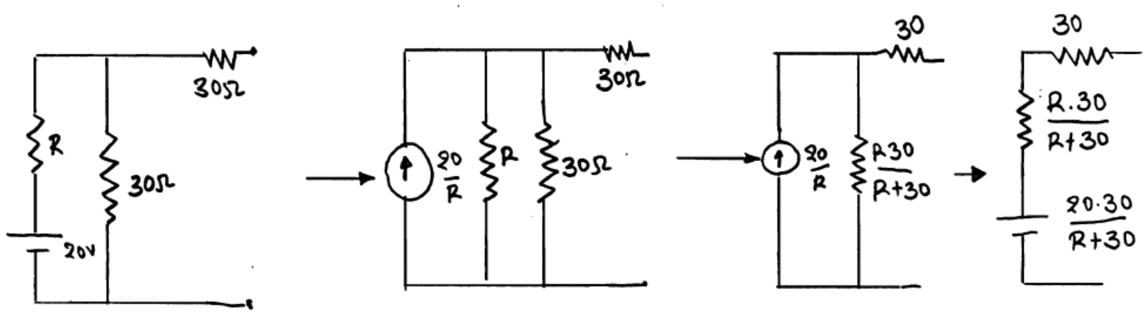
Λύση

Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνονται οι διαδικασίες που ακολουθούνται στην κάθε περίπτωση:

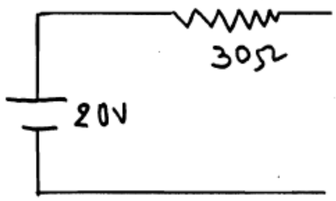
α)



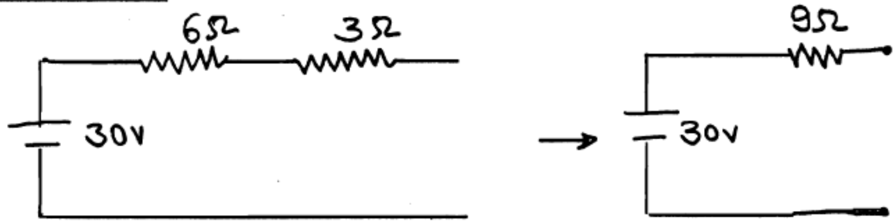
β) Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι σε σειρά με την πηγή τάσης υπάρχει μια αντίσταση R η οποία τείνει στο 0, R → 0.



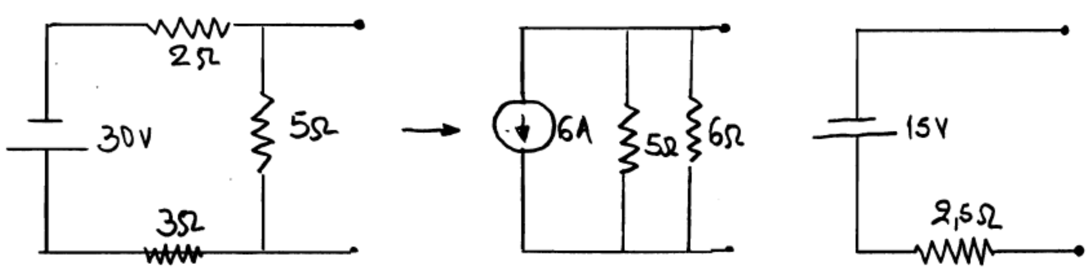
οπότε για R→0 γίνεται:



γ)

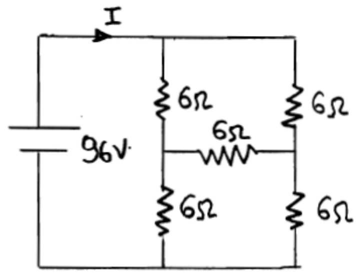


δ)



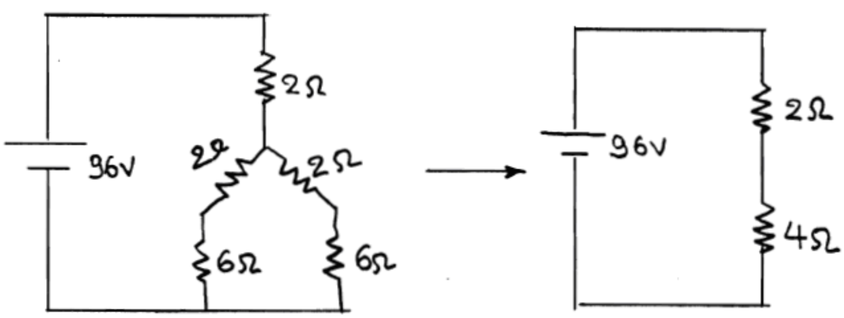
Παραδείγματα αστέρα τριγώνου

2.6 Να υπολογιστεί το ρεύμα I στο παρακάτω κύκλωμα:



Λύση

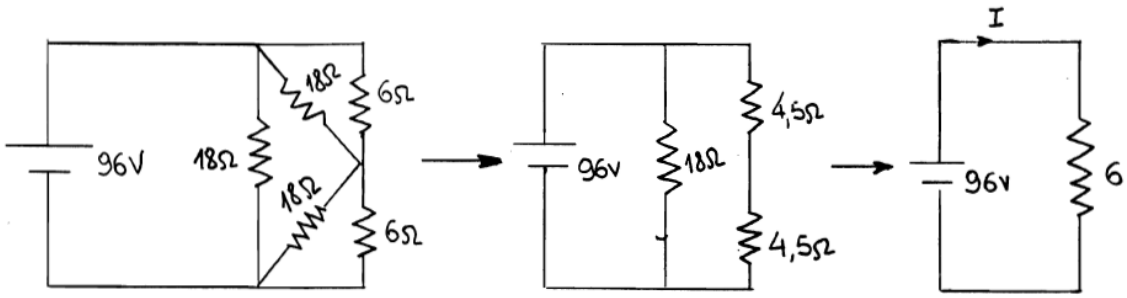
Μετατρέπουμε το τρίγωνο που αποτελείται από τις αντιστάσεις των 6Ω σε αστέρα όπου η κάθε αντίσταση σύμφωνα με τις σχέσεις 2.13 θα είναι ίσες με το 1/3 των αντιστάσεων του τριγώνου, δηλαδή 2Ω. Κατόπιν όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα η ένταση προκύπτει ίση με: $I = \frac{96}{6} = 16 \quad A$.



2.7 Να υπολογιστεί το ρεύμα I του κυκλώματος της άσκησης 2.6 κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού αστέρα → τρίγωνο.

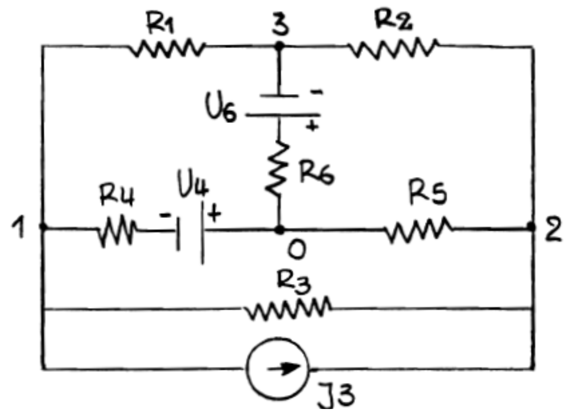
Λύση

Μετατρέπουμε ένα αστέρα που αποτελείται από τις αντιστάσεις των 6Ω σε τρίγωνο, όπου η κάθε αντίσταση σύμφωνα με τις σχέσεις 2.14 θα είναι ίση με το τριπλάσιο της αντίστασης του αστέρα, δηλαδή 18Ω. Κατόπιν όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα η ένταση προκύπτει ίση με: $I = \dfrac{96}{6} = 16A$.



Παραδείγματα μεθόδου βρόχων

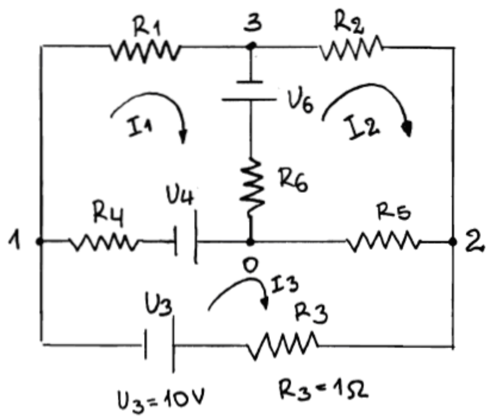
2.8 Στο κύκλωμα του σχήματος να υπολογιστούν οι τάσεις U_{10}, U_{20}, U_{30} με τη μέθοδο των βρόχων. Δίνεται ότι όλες οι αντιστάσεις είναι του 1Ω, οι ΗΕΔ είναι 10V και η πηγή ένταση 10A



Λύση

Κατ' αρχήν μετατρέπουμε την πηγή έντασης σε πηγή τάσης και καθορίζουμε τρεις απλούς βρόχους όπως φαίνεται

στο σχήμα:



Σύμφωνα με τις φορές των ρευμάτων στους βρόχους προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$(R_1 + R_4 + R_6)I_1 - R_6 I_2 - R_4 I_3 = U_6 - U_4$$

$$-R_6 I_1 + (R_2 + R_5 + R_6)I_2 - R_5 I_3 = -U_6$$

$$-R_4 I_1 - R_5 I_2 + (R_3 + R_4 + R_5)I_3 = U_4 - U_3$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές τους προκύπτει το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$3I_1 - I_2 - I_3 = 0$$
$$-I_1 + 3I_2 - I_3 = -10$$
$$-I_1 - I_2 + 3I_3 = 0$$

Το παραπάνω σύστημα δίνει τις εξής λύσεις για τα ρεύματα:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -10 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-40}{16} = -2.5A, \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -10 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{16} = -5A, \quad I_3 = -2,5A$$

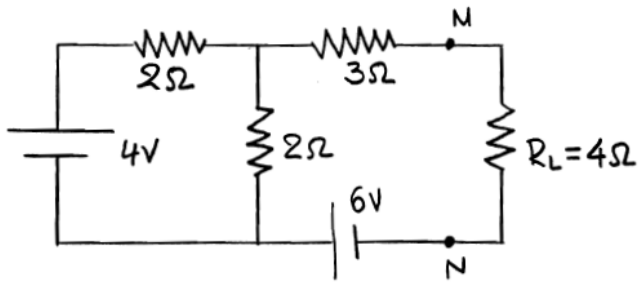
Μετά την εύρεση των ρευμάτων οι τάσεις που ζητούνται βρίσκονται από τις σχέσεις:

$$U_{10} = (I_3 - I_1)\cdot R_4 - U_4 = -10V$$

$$U_{20} = (I_2 - I_3)R_5 = -2,5V$$
$$U_{30} = -U_6 + (I_1 - I_2)R_6 = -10V + 2,5V = -7,5V$$

Παραδείγματα στο θεώρημα Thevenin - Norton

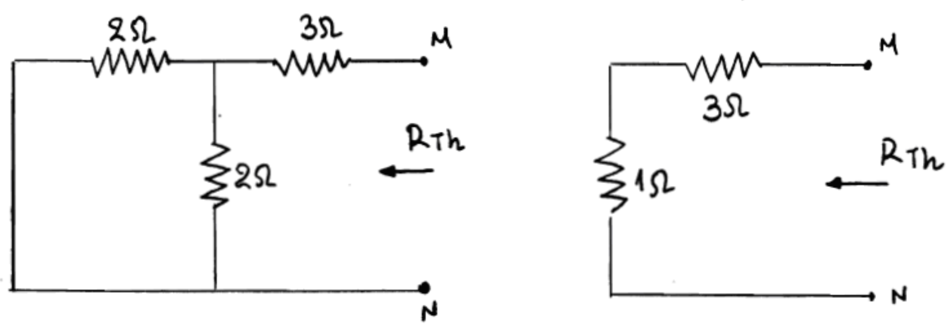
9.11 Να βρεθεί η ισχύς στην R_L του παρακάτω κυκλώματος χρησιμοποιώντας το θεώρημα Thevenin.



Λύση

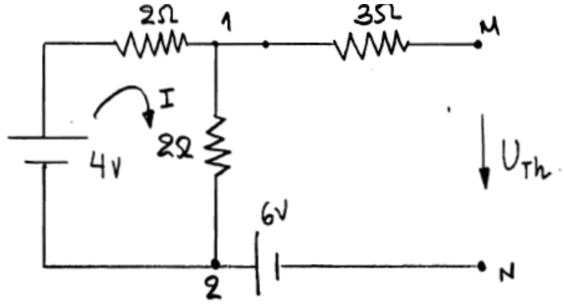
Κατ' αρχήν βρίσκεται το ισοδύναμο κατά Thevenin του κυκλώματος από τα άκρα M, N. Η ισοδύναμη αντίσταση βρίσκεται εάν βραχυκυκλώσουμε τις δυο πηγές τάσης και προκύπτει όπως φαίνεται από το σχήμα ίση με:

$$R_{Th} = 2//2+3 = 1\Omega + 3\Omega = 4\Omega$$



Η ισοδύναμη τάση κατά Thevenin βρίσκεται ως εξής: Όπως φαίνεται στο σχήμα υπάρχει ένας μόνο βρόχος στον οποίο κυκλοφορεί ρεύμα. Συνεπώς η τάση U_{12} στην αντίσταση των 2Ω είναι ίση με $\frac{2\Omega}{4\Omega}\cdot 4V = 2V$. Η τάση κατά Thevenin είναι ίση με την τάση μεταξύ των άκρων M, N και συνεπώς προκύπτει από το άθροισμα των τάσεων στην αντίσταση των 2Ω και της πηγής των 6V:

$$U_{Th} = 2+6 = 8V$$



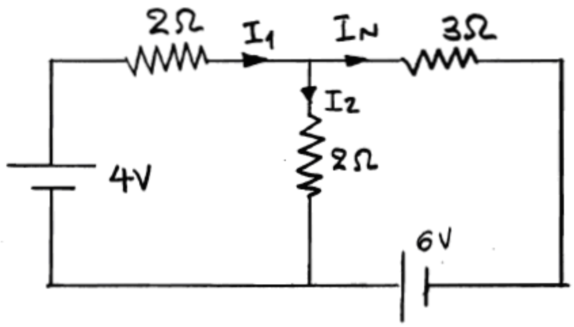
Συνεπώς η ισχύς είναι ίση με: $P = I^2 R = \left(\frac{8}{4+4}\right)^2 4 = 4W$

9.13 Να επιλυθεί η άσκηση 9.11 χρησιμοποιώντας το θεώρημα Norton.

Λύση

Η ισοδύναμη αντίσταση κατά Norton είναι ίση με την ισοδύναμη αντίσταση κατά Thevenin. Συνεπώς $R_N = R_{Th} = 4\Omega$.

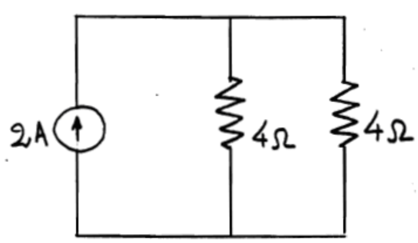
Η ισοδύναμη ένταση βρίσκεται από το παρακάτω κύκλωμα ως εξής:



Εφαρμόζοντας τους δύο νόμους του Kirchhoff προκύπτουν οι εξισώσεις:

$I_1 = I_2 + I_N$ $\qquad 4 = 2I_1 + 2I_2$ $\qquad 6 = 3I_N - 2I_2$

Η λύση των παραπάνω εξισώσεων μας δίνει $I_N = 2A$. Συνεπώς από το ισοδύναμο κατά Norton βρίσκουμε ότι:



$$P = \left(\frac{4\Omega}{4\Omega + 4\Omega} 2A\right)^2 4\Omega = 4W$$