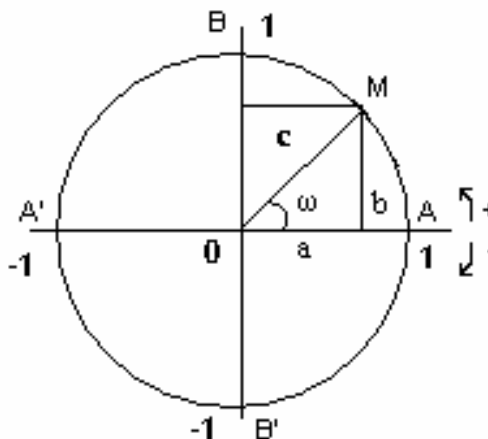


Μία σύντομη εισαγωγή στην Τριγωνομετρία με Ενδεικτικές Ασκήσεις

1. Ονομασίες – Ορισμοί

Ο τριγωνομετρικός κύκλος έχει ακτίνα $R=1$. Αρχή μέτρησης των τόξων (γωνιών) είναι το Α, είτε κατά τη θετική φορά (αριστερόστροφα) οπότε έχουμε θετικά τόξα είτε κατά την αρνητική φορά (δεξιόστροφα) οπότε έχουμε αρνητικά τόξα.



Σχήμα 1 Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Τα τόξα μετρώνται σε ακτίνια. Ο κύκλος έχει 2π ακτίνια και η σχέση τους με τις μοίρες ($^{\circ}$) δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 1 Σχέση Ακτινίων Μοιρών

1 ακτίνιο = $180^{\circ} / \pi$	2π ακτίνια = 360°	$1^{\circ} = \pi/180$ ακτίνια
---------------------------------	--------------------------------	-------------------------------

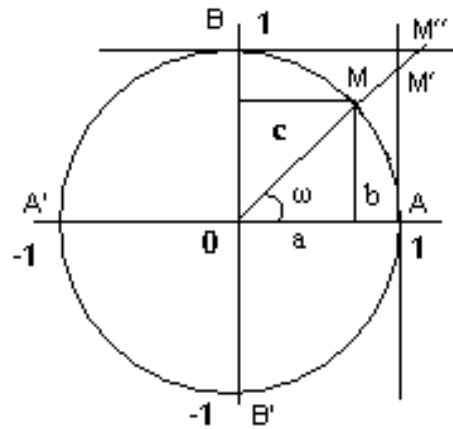
Σε κάθε σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου αντιστοιχούν άπειρα τόξα. Για παράδειγμα στο σημείο Μ αντιστοιχούν όλα τα τόξα της μορφής $2\kappa\pi + \omega$ όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. Στο σημείο Α αντιστοιχούν τα τόξα $2\kappa\pi$, στο Β τα τόξα $2\kappa\pi + \pi/2$, στο Α' τα τόξα $(2\kappa+1)\pi$ και στο Β' τα τόξα $2\kappa\pi - \pi/2$.

Σε ένα σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου $M(a,b)$ και για την γωνία ω που σχηματίζεται με τον άξονα xx' ορίζουμε τους παρακάτω βασικούς τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Πίνακας 2 Οι τριγωνομετρικοί Αριθμοί

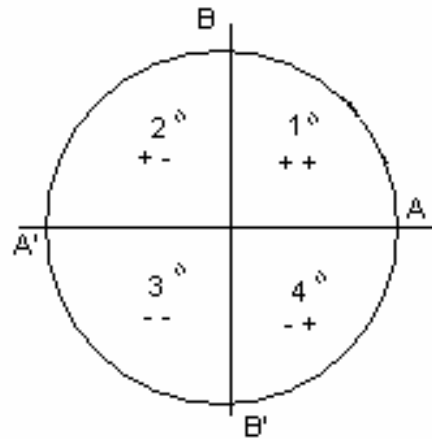
Ημίτονο	$\sin(\omega)$	$\eta\mu(\omega)$	$\frac{b}{c}$
Συνημίτονο	$\cos(\omega)$	$\sigma\upsilon\nu(\omega)$	$\frac{a}{c}$
Εφαπτομένη	$\tan(\omega)$	$\epsilon\phi(\omega)$	$\frac{b}{a}$
Συνεφαπτομένη	$\cot(\omega)$	$\sigma\phi(\omega)$	$\frac{a}{b}$

Γεωμετρικά η εφαπτομένη αντιστοιχεί στο τμήμα AM' και είναι φανερό ότι δεν ορίζεται για τα τόξα $2\kappa\pi + \pi/2$ και $2\kappa\pi - \pi/2$ και η συνεφαπτομένη στο τμήμα BM'' και είναι φανερό ότι δεν ορίζεται για τα τόξα $2\kappa\pi$ και $(2\kappa+1)\pi$.



Σχήμα 2 Η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη

Ο τριγωνομετρικός πίνακας χωρίζεται σε τέσσερα τεταρτημόρια στα οποία τα πρόσημα του ημιτόνου και συνημιτόνου των τόξων που αντιστοιχούν σε αυτά δίνονται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 3 Το πρόσημο στα τεταρτημόρια

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι τιμές των τριγωνομετρικών αριθμών των βασικών τόξων (γωνιών) του πρώτου τεταρτημρίου.

Πίνακας 3 Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών τόξων 1^{ου} τεταρτημρίου.

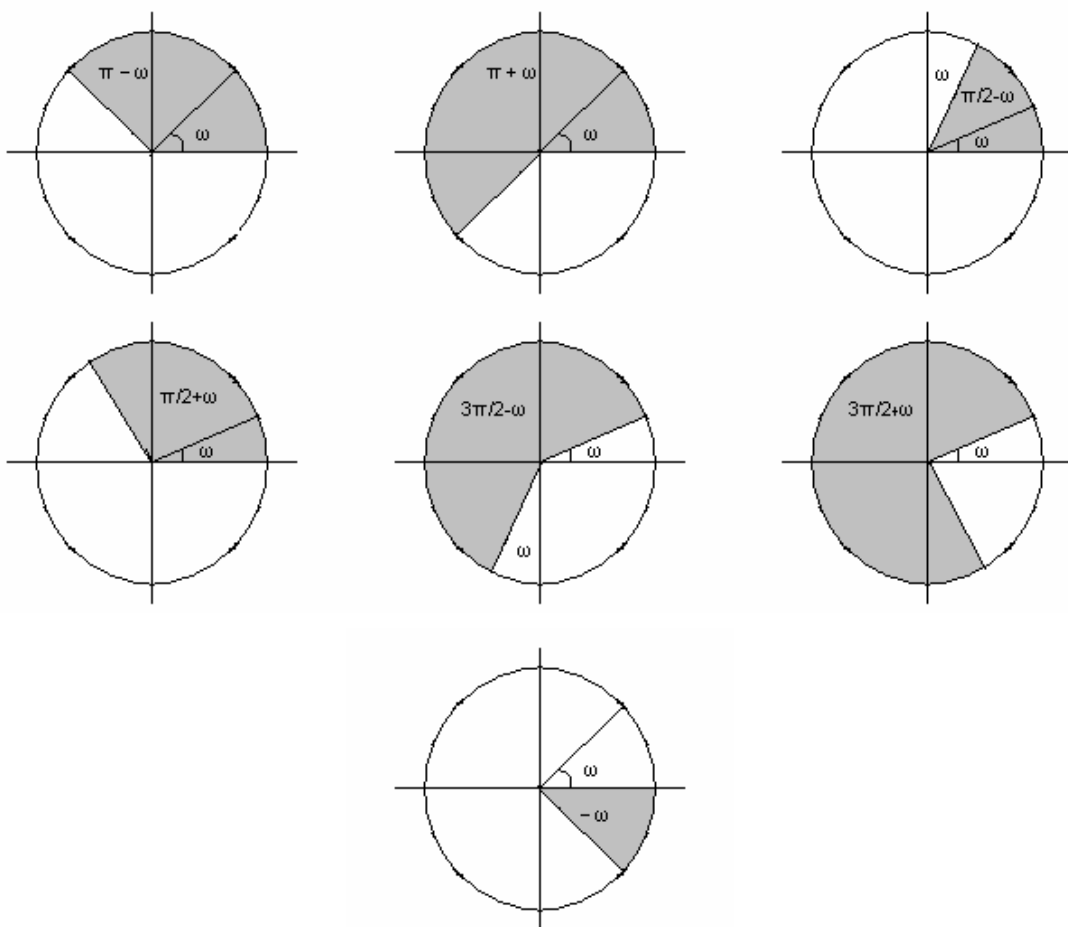
Γωνία ω ακτίνια	Γωνία ω μοίρες	$\sin(\omega)$	$\cos(\omega)$
0	0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	90	1	0

Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες σχέσεις αναγωγής, μπορούμε να σχετίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς τόξων με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς τόξων στο 1^ο τεταρτημόριο.

Πίνακας 4 Σχέσεις αναγωγής στο 1^ο τεταρτημόριο

	$-\omega$	$\frac{\pi}{2} \pm \omega$	$\pi \pm \omega$	$\frac{3\pi}{2} \pm \omega$	$2\kappa\pi \pm \omega$
$\sin(\dots)$	$-\sin(\omega)$	$\cos(\omega)$	$\mp \sin(\omega)$	$-\cos(\omega)$	$\pm \sin(\omega)$
$\cos(\dots)$	$\cos(\omega)$	$\mp \sin(\omega)$	$-\cos(\omega)$	$\pm \sin(\omega)$	$\cos(\omega)$
$\tan(\dots)$	$-\tan(\omega)$	$\mp \cot(\omega)$	$\pm \tan(\omega)$	$\mp \cot(\omega)$	$\pm \tan(\omega)$
$\cot(\dots)$	$-\cot(\omega)$	$\mp \tan(\omega)$	$\pm \cot(\omega)$	$\mp \tan(\omega)$	$\pm \cot(\omega)$

Παίρνοντας τις τετμημένες και τις τεταγμένες στα παρακάτω σχήματα είναι εύκολο να οδηγηθούμε στις παραπάνω σχέσεις αναγωγής στο 1^ο τεταρτημόριο.



Τέλος, είναι φανερό ότι ισχύουν οι παρακάτω βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι.

Πίνακας 5 Βασικοί Τριγωνομετρικοί τύποι

$\tan(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega)}$	$\cot(\omega) = \frac{1}{\tan(\omega)}$	$\sin^2(\omega) + \cos^2(\omega) = 1$
$ \sin(\omega) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sin(\omega) \leq 1$		
$ \cos(\omega) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \cos(\omega) \leq 1$		

Στη συνέχεια παραθέτουμε σε ομάδες τριγωνομετρικές ταυτότητες που μπορούν να αποδειχθούν και έτσι γνωρίζουμε ότι ισχύουν. Η ισχύς τους θεωρείται δεδομένη και δεν απαιτείται η απόδειξή τους.

3. Τριγωνομετρικές τιμές αθροισμάτων και διαφορών γωνιών

$\sin(\omega \pm \phi) = \sin(\omega)\cos(\phi) \pm \cos(\omega)\sin(\phi)$	$\cos(\omega \pm \phi) = \cos(\omega)\cos(\phi) \mp \sin(\omega)\sin(\phi)$
$\tan(\omega \pm \phi) = \frac{\tan(\omega) \pm \tan(\phi)}{1 \mp \tan(\omega)\tan(\phi)}$	$\cot(\omega \pm \phi) = \frac{\cot(\omega)\cot(\phi) \mp 1}{\cot(\omega) \pm \cot(\phi)}$

4. Τύποι μετασχηματισμών αθροισμάτων ή διαφορών σε γινόμενα και γινομένων σε αθροίσματα ή διαφορές.

$\sin(\omega) + \sin(\phi) = 2 \sin\left(\frac{\omega + \phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega - \phi}{2}\right)$
$\sin(\omega) - \sin(\phi) = 2 \sin\left(\frac{\omega - \phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega + \phi}{2}\right)$
$\cos(\omega) + \cos(\phi) = 2 \cos\left(\frac{\omega + \phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega - \phi}{2}\right)$
$\cos(\omega) - \cos(\phi) = 2 \sin\left(\frac{\omega + \phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi - \omega}{2}\right)$
$\sin(\omega)\sin(\phi) = \frac{1}{2}(\cos(\omega - \phi) - \cos(\omega + \phi))$
$\cos(\omega)\cos(\phi) = \frac{1}{2}(\cos(\omega - \phi) + \cos(\omega + \phi))$
$\sin(\omega)\cos(\phi) = \frac{1}{2}(\sin(\omega - \phi) + \sin(\omega + \phi))$

5. Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιων γωνιών

$\sin(2\omega) = 2 \sin(\omega) \cos(\omega)$
$\cos(2\omega) = \cos^2(\omega) - \sin^2(\omega) = 1 - 2 \sin^2(\omega) = 2 \cos^2(\omega) - 1$
$\tan(2\omega) = \frac{2 \tan(\omega)}{1 - \tan^2(\omega)}$
$\sin(\omega) = \frac{2 \tan(\frac{\omega}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\omega}{2})}$
$\cos(\omega) = \frac{1 - \tan^2(\frac{\omega}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\omega}{2})}$

6. Τριγωνομετρικοί τύποι αποτετραγωνισμού

$\sin^2(\omega) = \frac{1 - \sin(2\omega)}{2}$
$\cos^2(\omega) = \frac{1 + \sin(2\omega)}{2}$
$\tan^2(\omega) = \frac{1 - \sin(2\omega)}{1 + \sin(2\omega)}$
$\cot^2(\omega) = \frac{1 + \sin(2\omega)}{1 - \sin(2\omega)}$

7. Τριγωνομετρικές εξισώσεις

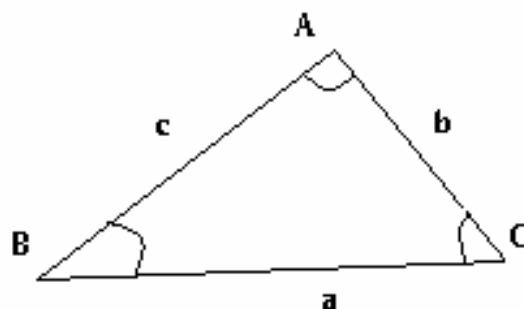
Στις τριγωνομετρικές εξισώσεις καλούμαστε να προσδιορίσουμε τα τόξα x που ικανοποιούν την εξίσωση. Στον πίνακα που ακολουθεί βλέπουμε τις βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις.

Εξίσωση	Λύση
$\sin(x) = \sin(\phi)$	$x = 2\kappa\pi + \phi$ ή $x = (2\kappa + 1)\pi - \phi$
$\cos(x) = \cos(\phi)$	$x = 2\kappa\pi \pm \phi$
$\tan(x) = \tan(\phi)$	$x = \kappa\pi + \phi$
$\cot(x) = \cot(\phi)$	$x = \kappa\pi + \phi$

Για την επίλυση πιο πολύπλοκων εξισώσεων εργαζόμαστε ώστε, με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και τύπων, να μετατρέψουμε την εξίσωση σε μία εξίσωση (ή ένα σύστημα εξισώσεων) της παραπάνω μορφής.

7. Νόμοι σε τυχαίο τρίγωνο

Έστω ότι έχουμε τα ακόλουθο τυχαίο τρίγωνο.



Τότε ισχύουν οι ακόλουθοι νόμοι που συνδέουν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου με τα τόξα των γωνιών του.

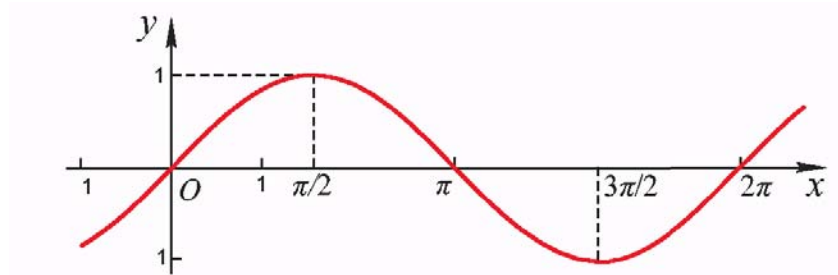
Νόμος ημιτόνου	Νόμος συνημιτόνου
----------------	-------------------

$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(A)$
---	---------------------------------

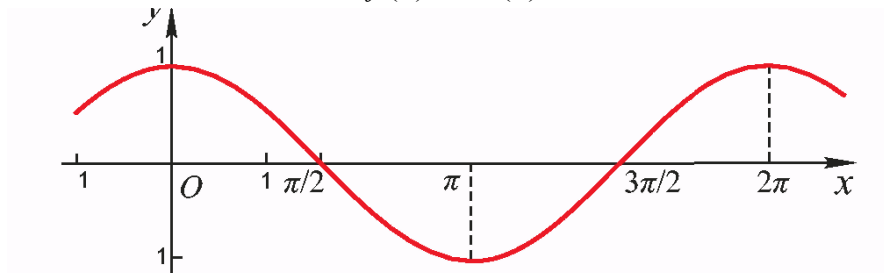
7. Βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε τις βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Είναι φανερό ότι είναι περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο 2π η ημίτονο και η συνημίτονο και με περίοδο π η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη. Πεδίο ορισμού της πρώτης και της δεύτερης είναι όλο το $\mathbb{R}$ ενώ πεδίο τιμών το $[-1,1]$.

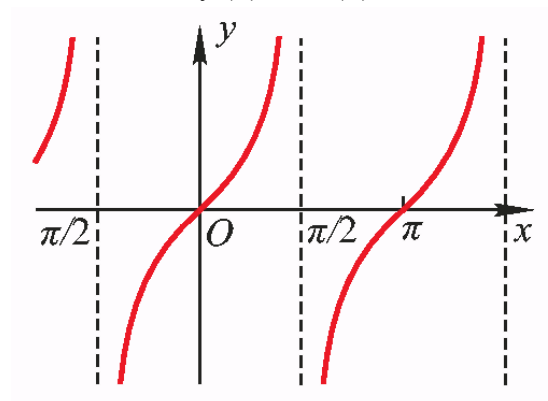
$$f(x) = \sin(x)$$

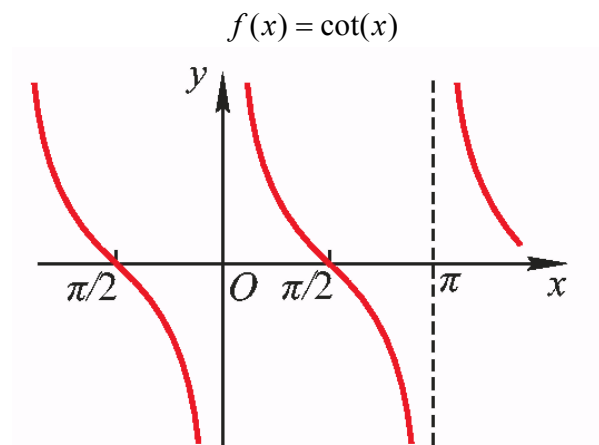


$$f(x) = \cos(x)$$



$$f(x) = \tan(x)$$

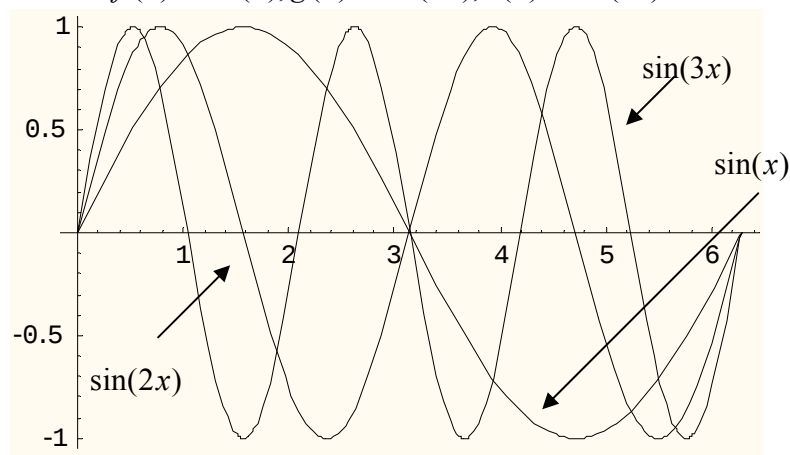




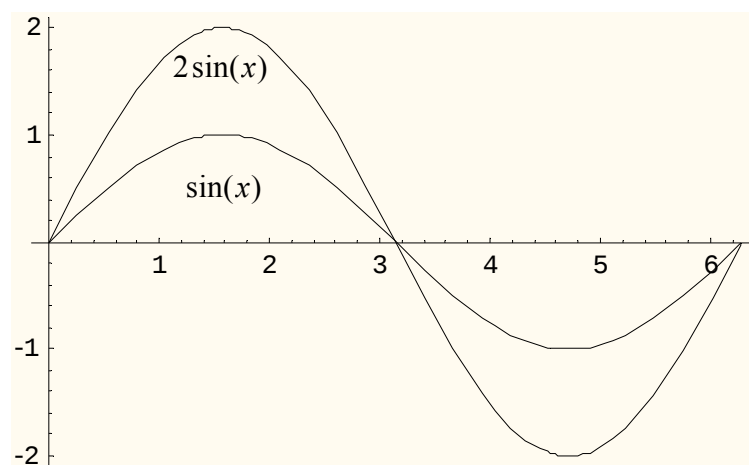
Η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη έχουν πεδίο τιμών όλο το $\mathbb{R}$ ενώ τα πεδία ορισμού τους βρίσκονται εάν από το $\mathbb{R}$ αφαιρέσουμε τα σημεία στα οποία δεν ορίζονται (δείτε παραπάνω).

Στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε ότι για την συνάρτηση $\sin(ax)$ όσο το a μεγαλώνει τόσο μικραίνει η περίοδος της συνάρτησης σε $2\pi/a$.

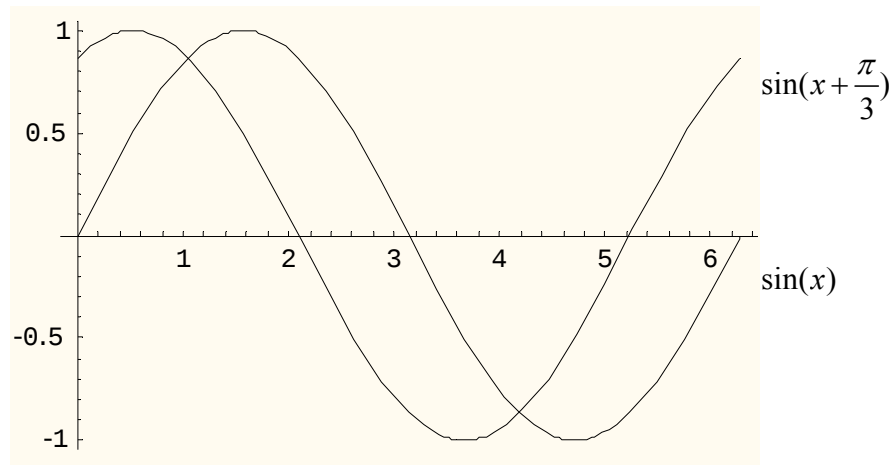
$$f(x) = \sin(x), g(x) = \sin(2x), h(x) = \sin(3x)$$



Επίσης συνάρτηση $a \sin(x)$ όσο το a (θετικό) μεγαλώνει τόσο το πεδίο τιμών μεταβάλλεται σε $[a, -a]$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sin(x+\theta)$ μετατοπίζει τη γραφική παράσταση της $\sin(x)$ κατά $-\theta$.



Ανάλογη είναι και η συμπεριφορά της συνάρτησης συνημίτονο.

Ενδεικτικές ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τα $\sin(\frac{\pi}{12})$, $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\cos(\frac{5\pi}{12})$.

Λύση:

Παρατηρώ ότι $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ και $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

Οπότε

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin(\frac{\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(\frac{5\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Το τελευταίο αποδεικνύεται επίσης χρησιμοποιώντας την σχέση $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$

Οπότε $\cos(\frac{5\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{12})$.

2. Υπολογίστε το $\sin(x+y)$ εάν είναι γνωστό ότι $\sin(x) = \frac{3}{5}$ και $\cos(y) = -\frac{5}{13}$ και ότι το x ανήκει στο 1^ο τεταρτημόριο και το y στο 3^ο.

Λύση:

Υπολογίζω τα

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\sin(y) = -\sqrt{1 - \cos^2(y)} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$$

Των οποίων το πρόσημο καθορίζεται από το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκουν. Οπότε

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) = \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{4}{5}\left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{63}{65}$$

3. Να αποδείξετε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}$, ισχύει: $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2(x) - \sin^2(y)$

Λύση:

1^{ος} τρόπος:

$$\begin{aligned}\sin(x+y)\sin(x-y) &= (\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y))(\sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)) = \\ &= (\sin^2(x)\cos^2(y) - \cos^2(x)\sin^2(y)) = \sin^2(x)(1 - \sin^2(y)) - (1 - \sin^2(x))\sin^2(y) = \\ &= \sin^2(x) - \sin^2(x)\sin^2(y) - \sin^2(y) + \sin^2(y)\sin^2(x) = \sin^2(x) - \sin^2(y)\end{aligned}$$

Εναλλακτικά χρησιμοποιώντας τον τύπο $\sin(\omega)\sin(\phi) = \frac{1}{2}(\cos(\omega - \phi) - \cos(\omega + \phi))$

$$\begin{aligned}\sin(x+y)\sin(x-y) &= \frac{1}{2}(\cos((x+y)-(x-y)) - \cos((x+y)+(x-y))) = \\ &= \frac{1}{2}(\cos(2y) - \cos(2x)) = \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2(y) - 1 + 2\sin^2(x)) = \sin^2(x) - \sin^2(y)\end{aligned}$$

4. Να λυθεί η εξίσωση $3\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 3$.

Λύση:

Έχουμε

$$3\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 3 \Leftrightarrow \cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(x) = 1 \Leftrightarrow \cos(x) + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{2}}\sin(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\cos(x) + \frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{\pi}{6})} \sin(x) = 1 \Leftrightarrow \cos(x) \cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(x) \sin(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

5. Να αποδείξετε ότι σε κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο ABC ισχύει:

$$\tan(A) + \tan(B) + \tan(C) = \tan(A) \tan(B) \tan(C)$$

Λύση:

Αφού το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο, ορίζονται οι $\tan(A), \tan(B), \tan(C)$, γιατί είναι

$A, B, C \neq \frac{\pi}{2}$ και $A + B = \pi - C \neq \frac{\pi}{2}$, οπότε έχουμε:

$$\tan(A+B) = \tan(\pi - C) \Rightarrow \frac{\tan(A) + \tan(B)}{1 - \tan(A)\tan(B)} = -\tan(C) \Rightarrow$$

$$\tan(A) + \tan(B) = -(1 - \tan(A)\tan(B))\tan(C) \Rightarrow$$

$$\tan(A) + \tan(B) = -\tan(C) + \tan(A)\tan(B)\tan(C) \Rightarrow$$

$$\tan(A) + \tan(B) + \tan(C) = \tan(A)\tan(B)\tan(C)$$

6. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

Λύση:

$$\sin(3x) = \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x) =$$

$$2\sin(x)\cos(x)\cos(x) + \sin(x)(1 - 2\sin^2(x)) =$$

$$2\sin(x)(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 2\sin^3(x) =$$

$$2\sin(x) - 2\sin^3(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x) =$$

$$3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

7. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

Λύση:

$$\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) =$$

$$(2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x) =$$

$$2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x)(1 - \cos^2(x)) =$$

$$2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x) + 2\cos^3(x) =$$

$$4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

8. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $8\sin^4(x) = 3 - 4\sin(2x) + \cos(4x)$

Λύση:

$$8\sin^4(x) = 2(4\sin^4(x)) = 2(2\sin^2(x))^2 = 2(1 - \cos(2x))^2 =$$

$$2(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) = 2 - 4\cos(2x) + 2\cos^2(2x) =$$

$$2 - 4\cos(2x) + 1 + \cos(4x) = 3 - 4\sin(2x) + \cos(4x)$$

9. Να λυθεί στο $[0, 2\pi]$ η εξίσωση $\cos(2x) - 3\sin(x) + 1 = 0$.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι

$$\cos(2x) - 3\sin(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 = 0$$

Οπότε εάν θέσουμε $y = \sin(x)$ η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$2y^2 + 3y - 2 = 0 \text{ με } y \in [-1, 1]. \text{ Η δευτεροβάθμια αυτή έχει ρίζες } \rho_1 = \frac{1}{2}, \rho_2 = -2 \text{ από τις}$$

οποίες η δεύτερη απορρίπτεται. Από την $\rho_1 = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2(k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Επειδή $x \in [0, 2\pi]$ έχουμε

$$0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k + \frac{1}{6} \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq 2k \leq \frac{11}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{11}{12}$$

Που ικανοποιείται για $k=0$ οπότε $x = \frac{\pi}{6}$.

$$\text{Επίσης } 0 \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k + \frac{5}{6} \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \leq 2k \leq \frac{7}{6} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{7}{12}$$

Που ικανοποιείται για $k=0$ οπότε $x = \frac{5\pi}{6}$.

10. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$4 \sin(2x) \cos(3x) \sin(5x) = 1 - \cos(4x) + \cos(6x) - \cos(10x)$$

Λύση:

$$\begin{aligned} 4 \sin(2x) \cos(3x) \sin(5x) &= 2 \sin(2x) 2 \cos(3x) \sin(5x) = \\ 2 \sin(2x) [\sin(5x+3x) + \sin(5x-3x)] &= \\ 2 \sin(2x) (\sin(8x) + \sin(2x)) &= \\ 2 \sin(2x) \sin(8x) + 2 \sin^2(2x) &= \\ \cos(8x-2x) - \cos(8x+2x) + 1 - \cos(4x) &= \\ 1 - \cos(4x) + \cos(6x) - \cos(10x) \end{aligned}$$

11. Να λυθεί η εξίσωση $\cos(7x) \cos(2x) = \sin(6x) \sin(x)$.

Λύση:

$$\begin{aligned} \cos(7x) \cos(2x) &= \sin(6x) \sin(x) \Leftrightarrow \\ 2 \cos(7x) \cos(2x) &= 2 \sin(6x) \sin(x) \Leftrightarrow \\ \cos(7x+2x) + \cos(7x-2x) &= \cos(6x-x) - \cos(6x+x) \Leftrightarrow \\ \cos(9x) + \cos(5x) &= \cos(5x) - \cos(7x) \Leftrightarrow \\ \cos(9x) &= -\cos(7x) \Leftrightarrow \\ \cos(9x) &= \cos(\pi+7x) \Leftrightarrow \\ \begin{cases} 9x = 2k\pi + \pi + 7x \Leftrightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ 9x = 2k\pi - \pi - 7x \Leftrightarrow 16x = 2k\pi - \pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{8} - \frac{\pi}{16} \end{cases} & \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

12. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο με γωνίες A,B,C ισχύει:

$$\sin(A) + \sin(B) + \sin(C) = 4 \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right)$$

Λύση:

$$\text{Επειδή } A + B + C = \pi \Leftrightarrow \frac{A+B}{2} = \pi - \frac{C}{2} \text{ έχουμε } \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\left(\frac{C}{2}\right) \text{ και}$$

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\frac{C}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \sin(A) + \sin(B) + \sin(C) &= 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{C}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right) = \\ 2 \cos\left(\frac{C}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right) &= 2 \cos\left(\frac{C}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right) = \\ 2 \cos\left(\frac{C}{2}\right) 2 \cos\left(\frac{\frac{A-B}{2} + \frac{A+B}{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}}{2}\right) &= \\ 2 \cos\left(\frac{C}{2}\right) 2 \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) &= 4 \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right) \end{aligned}$$

13. Να λυθεί η εξίσωση $\cos(x) - \cos(3x) - \cos(5x) + \cos(7x) = 0$.

Λύση:

$$\cos(x) - \cos(3x) - \cos(5x) + \cos(7x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) + \cos(7x) - (\cos(3x) + \cos(5x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cos\left(\frac{7x+x}{2}\right) \cos\left(\frac{7x-x}{2}\right) - 2 \cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right) \cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cos(4x) \cos(3x) - 2 \cos(4x) \cos(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos(4x) (\cos(3x) - \cos(x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cos(4x) \left(2 \sin\left(\frac{3x+x}{2}\right) \sin\left(\frac{x-3x}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow 4 \cos(4x) \sin(2x) \sin(-x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\cos(4x) \sin(2x) \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(4x) = 0 \text{ ή } \sin(2x) = 0 \text{ ή } \sin(x) = 0$$

Από την 1^η έχουμε:

$$\cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\sin(2x) = \sin(0) \Leftrightarrow 2x = 2k\pi \pm 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\sin(x) = \sin(0) \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

14. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x + y = \pi \\ \cos(x) - \cos(y) = -\sqrt{3} \end{cases}$.

Λύση:

Η δεύτερη εξίσωση γίνεται

$$\cos(x) - \cos(y) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\sin\left(\frac{y-x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -\sin\left(\frac{y-x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(-\frac{y-x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x-y = 4k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \frac{x-y}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x-y = 4k\pi + \frac{4\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Οπότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με τα δύο ακόλουθα

$$\begin{cases} x+y = \pi \\ x-y = 4k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pi \\ 2x = 4k\pi + \pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ 2x = 4k\pi + \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2k\pi + \pi - \frac{5\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ή

$$\begin{cases} x+y = \pi \\ x-y = 4k\pi + \frac{4\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pi \\ 2x = 4k\pi + \pi + \frac{4\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ 2x = 4k\pi + \frac{7\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2k\pi + \pi - \frac{7\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

15. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο με γωνίες A,B,C και πλευρές a,b,c ισχύει:

$$\frac{a-b}{a+b} = \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)$$

Λύση:

Από το νόμο των ημιτόνων

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin(A)}{\sin(B)}$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των αναλογιών από την $\frac{a}{b} = \frac{\sin(A)}{\sin(B)}$ έχουμε

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin(A) - \sin(B)}{\sin(A) + \sin(B)} = \frac{2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} = \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)$$

Επειδή $A + B + C = \pi \Leftrightarrow \frac{A+B}{2} = \pi - \frac{C}{2}$ έχουμε $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan\left(\frac{C}{2}\right)$.

16. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο με γωνίες A,B,C και πλευρές a,b,c ισχύει:

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{\tau(\tau-a)}{bc}}$$

Όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Λύση:

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε $\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Από τη γνωστή ταυτότητα

$$\cos(A) = 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \cos(A) + 1 \Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1 \Leftrightarrow$$

$$2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2bc} \Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{(b+c-a)(a+b+c)}{2bc}$$

$$\text{Αλλά } a+b+c = 2\tau \Leftrightarrow b+c-a = 2\tau - 2a \Leftrightarrow b+c-a = 2(\tau-a)$$

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2\tau 2(\tau-a)}{4bc} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{\tau(\tau-a)}{bc}}$$