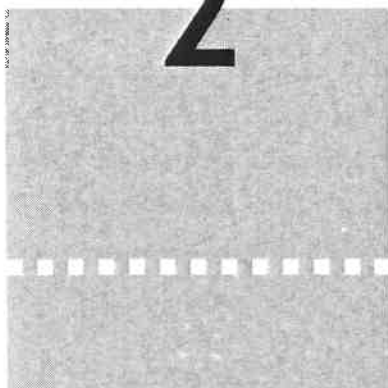


2



ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΕΞΥΠΝΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η μοντελοποίηση των έξυπνων κατασκευών. Το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων που εφαρμόζεται χρησιμοποιεί τα πολυώνυμα Hermitite και αναπτύσσεται για τον έλεγχο ταλάντωσης σύνθετων δοκών, με κατανεμημένους πιεζοηλεκτρικούς αισθητήρες και ενεργοποιητές. Η άμεση πιεζοηλεκτρική εξίσωση χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του συνολικού φορτίου που δημιουργείται στα ηλεκτρόδια του αισθητήρα, ενώ οι ενεργοποιητές παρέχουν απόσβεση στη σύνθετη δοκό.

2.1

Μοντελοποίηση

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξαχθεί ένα μαθηματικό πρότυπο μιας έξυπνης δοκού, το οποίο είναι κατάλληλο για την ενσωμάτωσή του σε ένα σύστημα ελέγχου γραμμικών συστημάτων. Όπως είναι γνωστό το κατάλληλο πρότυπο είναι η μορφή χώρου κατάστασης, δηλαδή ένα σύστημα χρονικά αμετάβλητων, συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Η επίτευξη του στόχου αυτού θα γίνει ακολουθώντας τα εξής βήματα:

1. Εξαγωγή του πλήρους μαθηματικού μοντέλου της καμπτικής κίνησης (ταλάντωσης) της έξυπνης δοκού υπό την επίδραση μηχανικών και ηλεκτρικών δυνάμεων, χρησιμοποιώντας τους σχετικούς φυσικούς νόμους. Στη παρούσα διατριβή θα χρησιμοποιηθεί η απλούστερη Τεχνική Θεωρία της κάμψεως δοκών και όχι η ακριβέστερη Θεωρία Ελαστικότητας, καθ' όσον αυτό που ενδιαφέρει είναι η εύρεση κατάλληλων στρατηγικών ελέγχου που δεν εξαρτώνται από την ακριβή μοντελοποίηση. Αυτό το μαθηματικό μοντέλο θα είναι της μορφής μίας μερικής διαφορικής εξίσωσης.
2. Διακριτοποίηση του παραπάνω μοντέλου με τη χρήση ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων. Η διαδικασία αυτή περιέχει τα εξής επιμέρους βήματα:
 - (α) Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων για τη στοιχειώδη δοκό και τη στοιχειώδη δύναμη.
 - (β) Συνάθροιση των στοιχειωδών μοντέλων για την εξαγωγή του συνολικού μοντέλου της έξυπνης δοκού.
3. Μετασχηματισμός του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων σε πρότυπο χώρου κατάστασης με τη χρήση κατάλληλων μεταβλητών κατάστασης.

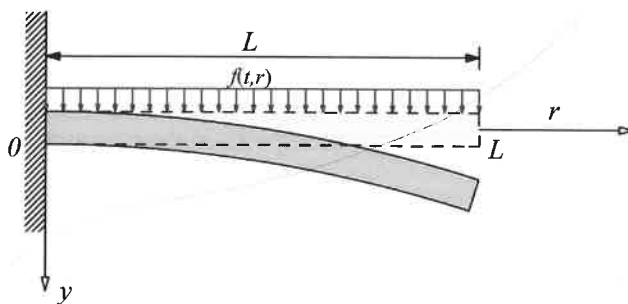
2.2 Εξίσωση κίνησης της δοκού

Η ελαστική ταλάντωση μπορεί να παρατηρηθεί σε πολλές κατασκευές όπως μεταλλικές γέφυρες, κτίρια. Σε κάποιες κατασκευές, οι αξονικές και στροφικές ιδιότητες ίσως είναι πιο σημαντικές από τις ελαστικές τους ιδιότητες. Η ελαστική ταλάντωση μπορεί να προκληθεί από την εφαρμογή κατανεμημένης ή συγκεντρωμένης φόρτισης κάθετης στον άξονα της δοκού. Η φόρτιση αυτή μπορεί να προσομοιώνει τον αέρα, το θόρυβο μετρήσεων, ή τη ροπή κάμψης εξαιτίας των πιεζοηλεκτρικών που μπορούν να ασκούνται σε μία κατασκευή. Έστω μία λεπτή πρόβολος δοκός μήκους L όπως απεικονίζεται στο σχήμα 2.1 της οποίας η πυκνότητα και το μέτρο ελαστικότητας επί τη ροπή αδράνειας στο σημείο r είναι ρ_b και $EI(r)$ αντίστοιχα, ενώ η διατομή της δοκού είναι $A_b(r)$.

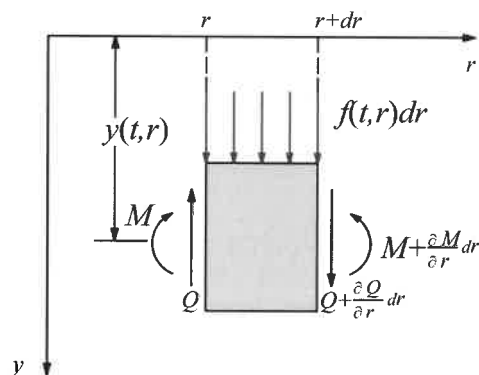
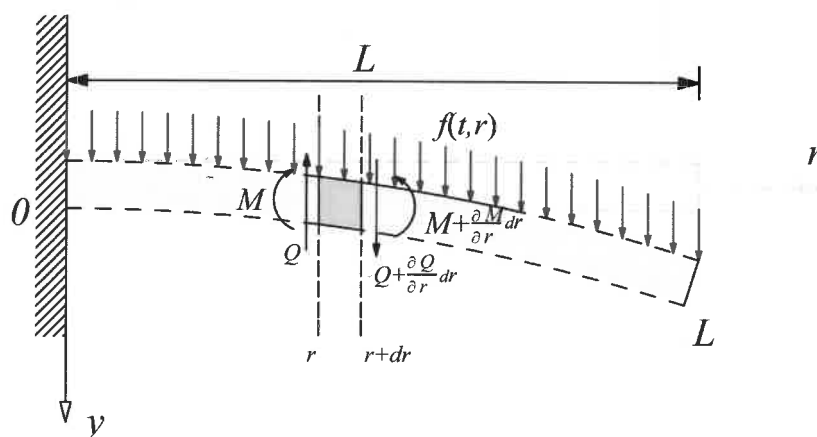
Οι βασικές υποθέσεις είναι:

- i. Το υλικό ακολουθεί το νόμο του Hooke

- ii. Η αξονική παραμόρφωση είναι αμελητέα σε σύγκριση με την παραμόρφωση κάμψης.
- iii. Η περιστροφή του στοιχείου είναι αμελητέα σε σύγκριση με την κάθετη και την πλάγια μετατόπιση.



Σχήμα 2.1: Πρόβολος δοχός σε κάμψη



Σχήμα 2.2: Ένα μικρό στοιχείο της δοκού

Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος ενός στοιχείου dr φαίνεται στο σχήμα 2.2,

όπου Q δηλώνει την τέμνουσα δύναμη και το M την ροπή κάμψης [73]. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα με δύναμη κατά την κατεύθυνση y έχουμε,

$$\left(Q(t, r) + \frac{\partial Q(t, r)}{\partial r}\right) - Q(t, r) + f(t, r)dr = \rho_b A_b(r)dr \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

που ισούται με,

$$\frac{\partial Q(t, r)}{\partial r} + f(t, r) = \rho_b A_b(r) \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη την ροπή γύρω από τον άξονα στα r και y (κατεύθυνση εκτός σελίδας),

$$\left(M(t, r) + \frac{\partial M(t, r)}{\partial r}dr\right) - M(t, r) + \left(Q(t, r) + \frac{\partial Q(t, r)}{\partial r}dr\right)dr + f(t, r)dr \frac{dr}{2} = 0 \quad (2.3)$$

απλοποιώντας την παραπάνω εξίσωση έχουμε [69],

$$Q(t, r) = -\frac{\partial M(t, r)}{\partial r} \quad (2.4)$$

υποκαθιστώντας την (2.4) στην (2.2) έχουμε,

$$-\frac{\partial^2 M(t, r)}{\partial r^2} + f(t, r) = \rho_b A_b(r) \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial r^2} \quad (2.5)$$

Η ροπή κάμψης μπορεί να συσχετιστεί με την καμπυλότητα $\kappa(x)$ του στοιχείου όπου,

$$\kappa(x) = \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial r^2} \quad (2.6)$$

και,

$$M(t, r) = EI(r)\kappa(x) \quad (2.7)$$

επομένως,

$$M(t, r) = EI(r) \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial r^2} \quad (2.8)$$

Υποκαθιστώντας στην (2.8) στην (2.5) έχουμε,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(EI(r) \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial r^2} \right) + \rho_b A_b(r) \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} = f(t, r), \quad 0 \leq r \leq L, \quad (2.9)$$

η γωνία στροφής θ που προκύπτει από την κάμψη της δοκού δίνεται,

$$\theta(t, r) = \frac{\partial y(t, r)}{\partial r} \quad (2.10)$$

Οι εξισώσεις (2.8), (2.9) και (2.10) είναι οι εξισώσεις κίνησης της δοκού Euler-Bernoulli. [5] Όταν η δοκός έχει σχετικά μεγάλο πάχος, οι επιδράσεις της αξονικής παραμόρφωσης και η στροφική αδράνεια πρέπει να ληφθούν υπόψη, για αυτό τον τύπο της δοκού, η εξίσωση δοκού Timoshenko μπορεί να χρησιμοποιηθεί. [5] Υποθέτοντας μία ομοιόμορφη πρόβολο δοκό όπου η διατομή $A_b(r)$ το μέτρο ελαστικότητας E και η ροπή αδράνειας $I(r)$ είναι σταθερές τότε η εξίσωση (2.9) γίνεται,

$$EI \frac{\partial^4 y(t, r)}{\partial r^4} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} = f(t, r), 0 \leq r \leq L \quad (2.11)$$

Στην περίπτωση που εξετάζουμε, η κατανεμημένη δύναμη παράγεται από μηχανικές και ηλεκτρικές συνιστώσες. Το μηχανικό φορτίο θεωρείται είσοδος διαταραχής στο σύστημα αυτομάτου ελέγχου, και αντιπροσωπεύει π.χ. φορτία εξαιτίας ανέμου, ενώ η ηλεκτρική συνιστώσα είναι το σήμα ελέγχου, κατάλληλα επιλεγμένο για να καταστεί τις καμπτικές ταλαντώσεις εξαιτίας της μηχανικής διαταραχής. Με τη σειρά της η τάση εισόδου παράγει διατμητικές δυνάμεις στα πιεζοηλεκτρικά επιθέματα, οι οποίες ανακάμπουν τη δοκό, (λεπτομέρειες οι οποίες περιγράφουν τη φυσική των υλικών παρά τίθενται στο παράρτημα Α). Επομένως η εξίσωση κίνησης της δοκού είναι,

$$EI \frac{\partial^4 y(t, r)}{\partial r^4} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} = f_m(t, r) + f_e(t, r) \quad (2.12)$$

Για την πρόβολο δοκό (σχήμα 2.1) ισχύουν οι παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

- Πακτωμένο άκρο στο $r = 0$. Η μετατόπιση και η κλίση της μετατόπισης είναι μηδέν,

$$y(t, r_0) = 0, \quad \left. \frac{\partial y(t, r)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (2.13)$$

- Ελεύθερο άκρο στο $r = L$. Η ροπή κάμψης είναι μηδέν.

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} (EI(r) \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial r^2}) \right|_{r=L} = 0 \quad (2.14)$$

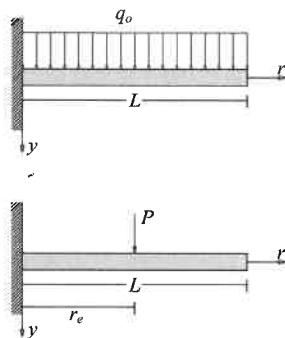
2.2.1 Η μορφή της μηχανικής φόρτισης $f_m(t, r)$

Μηχανικά φορτία διαφόρων μορφών μπορούν ν' αναπαρασταθούν μέσω της $f(t, r)$ (σχήμα 2.3). [87] Για παράδειγμα, ομοιόμορφα κατανεμημένη, χρονικά μεταβαλλόμενη, δύναμη $q_0(t)$ (π.χ. άνεμος), αναπαρίσταται με,

$$f_m(t, r) = q_0(t) \quad (2.15)$$

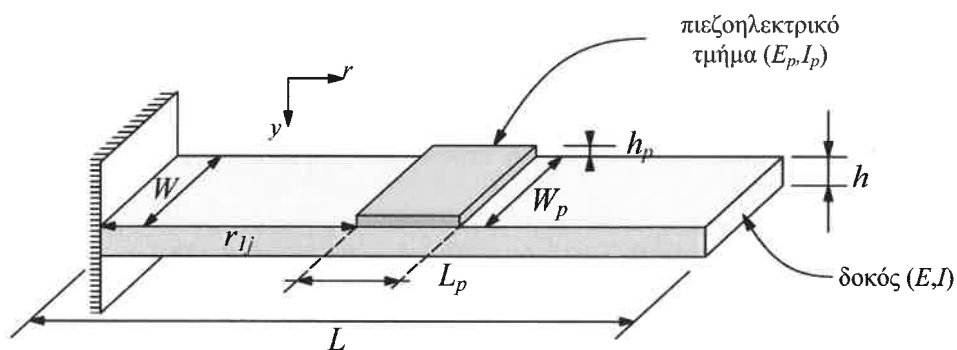
ενώ συγκεντρωμένη δύναμη P_0 στο σημείο r_0 με,

$$f_m(t, r) = P_0 \delta(r - r_0) \quad (2.16)$$



Σχήμα 2.3: Μηχανικά φορτία που ασκούνται στη δοκό

2.2.2 Η μορφή της ηλεκτρικής φόρτισης $f_e(t, r)$



Σχήμα 2.4: Δοκός με προσκολλημένο πιεζοηλεκτρικό τμήμα j

Έστω μία ομοιογενής δοκός Euler-Bernoulli με έναν πιεζοηλεκτρικό ενεργοποιητή προσκολλημένο σε απόσταση r_{1j} από την αρχή των αξόνων. Ο πιεζοηλεκτρικός ενεργοποιητής j έχει διαστάσεις $L_p \times W_p \times h_p$, όπου h_p είναι το πάχος κάθε τμήματος, ενώ η δοκός έχει διαστάσεις $L \times W \times h$ (σχήμα 2.4).

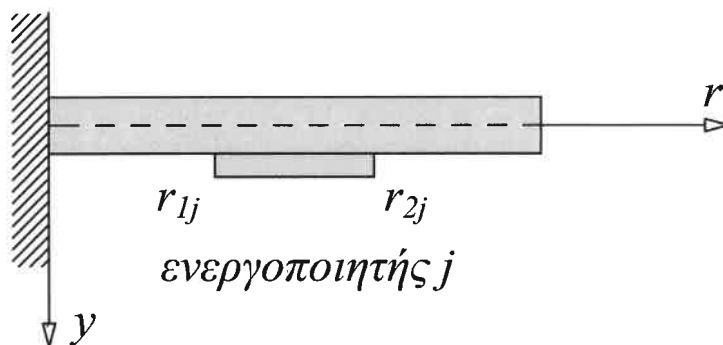
Ο πιεζοηλεκτρικός ενεργοποιητής παράγει μηχανική τάση σαν έξοδο όταν έχει ηλεκτρική τάση σαν είσοδο. Σε ότι αφορά τα πιεζοηλεκτρικά έχειδειχθεί από τους Crawley και de Lewis ότι η επαγόμενη κάμψη μπορεί να αναπαρασταθεί σαν εξωτερικό φορτίο που αποτελείται από ζεύγος αντίθετων ροών εφαρμοζόμενων στα άκρα του πιεζοηλεκτρικού [96, 97].

Η ηλεκτρική φόρτιση $f_e(t, r)$ εξαιτίας του πιεζοηλεκτρικού ενεργοποιητή ισούται,

$$f_e(t, r) = \frac{\partial^2 M_{pr}(t, r)}{\partial r^2} \quad (2.17)$$

όπου M_{pr} αντιπροσωπεύει την ροπή κάμψης εξ αιτίας του ενεργοποιητή [95].

Έστω ότι τα άκρα του πιεζοηλεκτρικού τμήματος j βρίσκονται στα r_{1j} και r_{2j} κατά μήκος του άξονα r (σχήμα 2.5). [73, 72, 71]



Σχήμα 2.5: Πιεζοηλεκτρικό τμήμα j στην πρόβολο δοκό

Η συνάρτηση $H(\cdot)$ είναι η γνωστή βηματική συνάρτηση που χρησιμοποιείται [69] για να αντιπροσωπεύσει την τοποθέτηση του πιεζοηλεκτρικού τμήματος Pzt πάνω στη δοκό.[95] Η ροπή κάμψης της δοκού $M_{pr}(t, r)$ ορίζεται ως,

$$M_{pr}(t, r) = C_0 e_{pe}(t) [H(r - r_{1j}) - H(r - r_{2j})] u_j(t) \quad (2.18)$$

όπου,

$$C_0 = EI \cdot K_f \quad (2.19)$$

όπου K_f είναι η γεωμετρική σταθερά του υλικού και ισούται με,

$$K_f = \frac{12EE_p h h_p (2h + h_p)}{16E^2 h^4 + EE_p (32h^3 h_p + 24h^2 h_p^2 + 8h h_p^3) + E_p^2 h_p^4} \quad (2.20)$$

όπου E_p είναι το μέτρο ελαστικότητας του πιεζοηλεκτρικού τμήματος και E το μέτρο ελαστικότητας της δοκού.[73, 72]

Η μηχανική ένταση $e_{pe}(t)$ εξ αιτίας του πιεζοηλεκτρικού τμήματος ισούται,

$$e_{pe}(t) = \frac{d_{31}}{h_p} u_j(t) \quad (2.21)$$

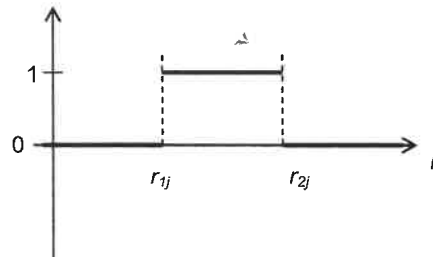
η σταθερά d_{31} συσχετίζει την μηχανική ένταση που δημιουργείται στη δοκό με μια συγκεκριμένη τάση u_j εφαρμόζεται στο πιεζοηλεκτρικό τμήμα.

Η σχέση (2.18) μπορεί να γραφτεί στην πιο συμπαγή μορφή της ως,

$$M_{pr}(t, r) = C_p [H(r - r_{1j}) - H(r - r_{2j})] u_j(t) \quad (2.22)$$

όπου $C_p = EIK_f \frac{d_{31}}{h_p}$.

Η διαφορά των βηματικών συναρτήσεων στη σχέση (2.18) παράγει το σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Διαφορά βηματικών συναρτήσεων

Εκτελώντας την μερική παραγωγή στη σχέση (2.17) και χρησιμοποιώντας την (2.18), η μορφή της ηλεκτρικής φόρτισης εξαιτίας των πιεζοηλεκτρικών γίνεται,

$$f_e(t, r) = C_p u_{\alpha j}(t) \left[\delta'(r - r_{1j}) - \delta'(r - r_{2j}) \right] \quad (2.23)$$

όπου $\delta'(r)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης Dirac ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή της,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t - \theta) \phi(t) dt = (-1)^n \phi^{(n)}(\theta) \quad (2.24)$$

όπου $\delta^{(n)}$ είναι η n -οστή παράγωγος της συνάρτησης δ και η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής στο θ . [73]

2.2.3 Μερική διαφορική εξίσωση κίνησης λόγω μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης

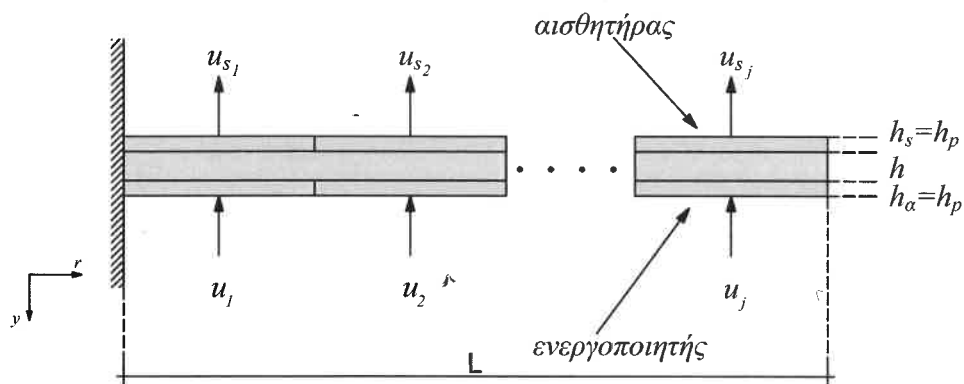
Αντικαθιστώντας την (2.23) και την (2.15) στην (2.12) προκύπτει η εξίσωση κίνησης της έξυπνης δοκού υπό την επίδραση χρονικά μεταβαλλόμενης, ομοιόμορφα κατανεμημένης, κάθετης φόρτισης $q_0(t)$ και πιεζοηλεκτρικής χρονικά μεταβαλλόμενης δύναμης εξαιτίας ενός πιεζοηλεκτρικού, [95]

$$EI \frac{\partial^4 y(t, r)}{\partial r^4} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} = q_0(t) + C_p u_j(t) \left[\delta'(r - r_{1j}) - \delta'(r - r_{2j}) \right] \quad (2.25)$$

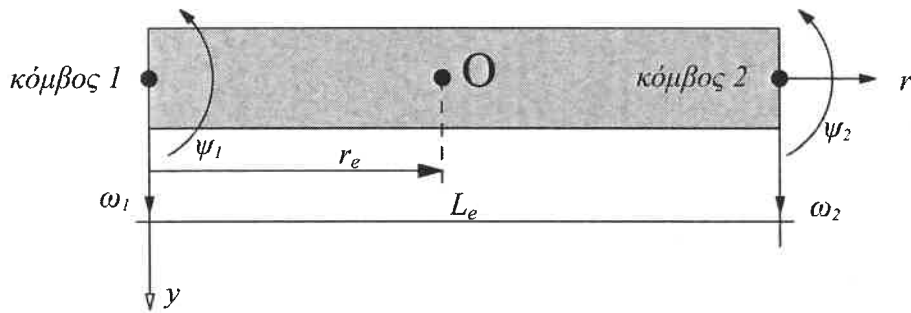
Για j όμοια πιεζοηλεκτρικά σχήμα 2.7 η (2.25) γίνεται,

$$EI \frac{\partial^4 y(t, r)}{\partial r^4} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} = q_0(t) + C_p u_j(t) \sum_{i=1}^j \left[\delta'(r - r_{1j}) - \delta'(r - r_{2j}) \right] \quad (2.26)$$

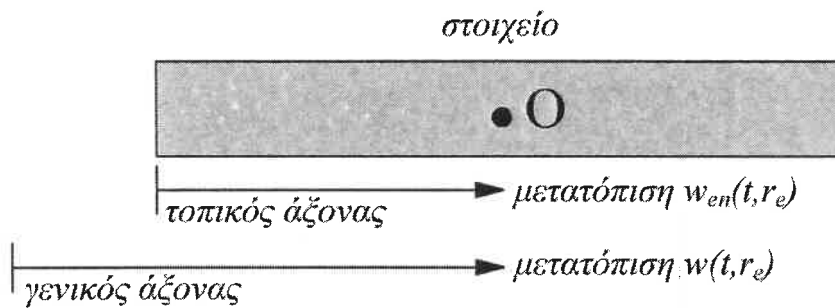
Η εξίσωση (2.26) είναι και η τελική εξίσωση ενδιαφέροντος.



Σχήμα 2.7: Πρόβολος δοκός με συνδυασμένους πιεζοηλεκτρικούς ενεργοποιητές και αισθητήρες



Σχήμα 2.9: Μία στοιχειώδης δοκός



Σχήμα 2.10: Τοπικός και γενικός άξονας πρόβολου δοκού

όπου w η συνάρτηση δοκιμασίας [87]. Όταν η δοκός διακριτοποιείται σε n αριθμό πεπερασμένων στοιχείων η εξίσωση γίνεται,

$$\sum_{i=1}^n \left[\int_{\Omega^e} EI \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} dr + \int_{\Omega^e} A_b \rho_b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} w dr - \int_{\Omega^e} f(t, r) w dr \right] + \left[-Vw - M \frac{\partial w}{\partial r} \right]_0^L = 0 \quad (2.29)$$

όπου $V = -EI \frac{\partial^3 y}{\partial r^3}$ και ισούται με τη διατμητική δύναμη και $M = EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \right)$ και ισούται με τη ροπή κάμψης και Ω^e είναι ο χώρος των στοιχείων.

Από την ολοκλήρωση και με την βοήθεια των συναρτήσεων Galerkin [87] προκύπτουν οι συναρτήσεις σχήματος που χρησιμοποιούνται. Για αυτή την περίπτωση ελαστικής δοκού είναι τα κυβικά πολυπαραγοντικά Hermite,

$$H(r) = \left[H_1(r), H_2(r), H_3(r), H_4(r) \right]^T \quad (2.30)$$

και,

$$\begin{aligned}
 H_1(r) &= 1 - 3\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{L_e}\right)^3 \\
 H_2(r) &= L_e \left[\left(\frac{r}{L_e}\right) - 2\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 + \left(\frac{r}{L_e}\right)^3 \right] \\
 H_3(r) &= 3\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{L_e}\right)^3 \\
 H_4(r) &= L_e \left[-\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 + \left(\frac{r}{L_e}\right)^3 \right]
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\left(\frac{dH(r)}{dr} \right) = \begin{bmatrix} H_1'(r) \\ H_2'(r) \\ H_3'(r) \\ H_4'(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6r}{L_e^2} + \frac{6r^2}{L_e^3} \\ 1 - \frac{4r}{L_e} + \frac{3r^2}{L_e^2} \\ \frac{6r}{L_e^2} - \frac{6r^2}{L_e^3} \\ -\frac{2r}{L_e} + \frac{3r^2}{L_e^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} H'(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ H'(L_e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{2.32}$$

Έτσι η μετατόπιση w_e σε οποιοδήποτε σημείο r_e κατά μήκος της δοκού μπορεί να προσεγγιστεί [14],

$$w_e(t, r_e) = H(r_e)^T w_e(t) \tag{2.33}$$

2.3.1 Στοιχειώδεις πίνακες μάζας και ακαμψίας

Ο στοιχειώδης πίνακας μάζας M_e μπορεί να εξαχθεί εάν μελετηθεί η κινητική ενέργεια $\mathcal{T}_e(t)$ του στοιχείου όπου,

$$\mathcal{T}_e(t) = \frac{1}{2} \dot{w}_e(t)^T M_e \dot{w}_e(t) \tag{2.34}$$

Επίσης η κινητική ενέργεια προκύπτει από το δεύτερο όρο του ολοκληρώματος στη σχέση (2.29),

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_e(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho_b A_b \left(\frac{\partial w_e(t, r)}{\partial t} \right)^2 dr \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho_b A_b \dot{w}_e^T(t) H(r) H^T(r) \dot{w}_e(t) dr
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Από τις σχέσεις (2.34), (2.35) ο πίνακας μάζας του στοιχείου ισούται,

$$M_e = \rho_b A_b \int_0^{L_e} H(r) H^T(r) dr \tag{2.36}$$

Αντικαθιστώντας τη (2.31) στην (2.36) παίρνουμε,

$$M_e = \frac{\rho_b A_b L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L_e & 54 & -13L_e \\ -22L_e & 4L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 \\ 54 & -13L_e & 156 & 22L_e \\ 13L_e & -3L_e^2 & 22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Ο στοιχειώδης πίνακας ακαμψίας K_e μπορεί να εξαχθεί με ανάλογο τρόπο. Η ενέργεια παραμόρφωσης του στοιχείου $U_e(t)$ ισούται με,

$$U_e(t) = \frac{1}{2} w_e(t)^T K_e w_e(t) \quad (2.38)$$

Επίσης η ενέργεια παραμόρφωσης του στοιχείου προκύπτει από τον πρώτο όρο του ολοκληρώματος στη σχέση (2.29),

$$\begin{aligned} U_e(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} EI \left(\frac{\partial^2 w_e(t, r)}{\partial r^2} \right)^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} EI w_e(t)^T \left(\frac{d^2 H(r)}{dr^2} \right) \left(\frac{d^2 H(r)}{dr^2} \right)^T w_e(t) dr \end{aligned} \quad (2.39)$$

Από τις σχέσεις (2.38), (2.39) ο πίνακας ακαμψίας του στοιχείου ισούται με,

$$K_e = EI \int_0^{L_e} \left(\frac{d^2 H(r)}{dr^2} \right) \left(\frac{d^2 H(r)}{dr^2} \right)^T dr \quad (2.40)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.31) στην (2.40) παίρνουμε,

$$K_e = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L_e & -12 & -6L_e \\ -6L_e & 4L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & 6L_e & 12 & 6L_e \\ -6L_e & 2L_e^2 & 6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

2.3.2 Στοιχειώδες μηχανικό φορτίο

Το στοιχειώδες διάνυσμα της δύναμης f_m^e που περιγράφει τις εξωτερικές μηχανικές δυνάμεις που ασκούνται στη στοιχειώδη δοκό λόγω μηχανικής φόρτισης

προκύπτει από τον τρίτο όρο του ολοκληρώματος (2.29) και ισούται με,

$$f_m^e = \int_0^{L_e} q(r) \begin{bmatrix} H_1(r) \\ H_2(r) \\ H_3(r) \\ H_4(r) \end{bmatrix} dr \quad (2.42)$$

Εάν έχουμε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q(r)$ στο στοιχείο της δοκού το διάνυσμα μηχανικής δύναμης του στοιχείου γίνεται,

$$f_m^e = \frac{q(r)}{12} \begin{bmatrix} 6L_e \\ L_e^2 \\ 6L_e \\ -L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Εάν το φορτίο είναι μια συγκεντρωμένη δύναμη το διάνυσμα μηχανικής δύναμης του στοιχείου γίνεται,

$$f_m^e = \int_0^{L_e} P_0 \delta(r - r_0) \begin{bmatrix} H_1(r) \\ H_2(r) \\ H_3(r) \\ H_4(r) \end{bmatrix} dr = P_0 \begin{bmatrix} H_1(r_0) \\ H_2(r_0) \\ H_3(r_0) \\ H_4(r_0) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

όπου P_0 είναι η συγκεντρωμένη δύναμη που ασκείται στο σημείο $r = r_0$ και $\delta(r - r_0)$ είναι η συνάρτηση Dirac.

Εάν το φορτίο μεταβάλλεται με τον χρόνο, όπως στην δυναμική ανάλυση, τότε το διάνυσμα μηχανικής δύναμης του στοιχείου γίνεται,

$$f_m^e(t) = \int_0^{L_e} q(r, t) \begin{bmatrix} H_1(r) \\ H_2(r) \\ H_3(r) \\ H_4(r) \end{bmatrix} dr = \frac{q(r, t)}{12} \begin{bmatrix} 6L_e \\ L_e^2 \\ 6L_e \\ -L_e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m(r, t) \\ M_m(r, t) \\ F_m(r, t) \\ -M_m(r, t) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

2.3.3 Στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο

Όπως έχει αναφερθεί η εφαρμογή τάσης $u_j(t)$ σ' ένα πιεζοηλεκτρικό στοιχείο, παράγει ροπές στα άκρα του πιεζοηλεκτρικού, ισοδύναμες με τη σημειακή δύναμη,

$$f_e^e(t, r) = C_p u_j(t) [\delta'(r - r_0) - \delta'(r - (r_0 + L_e))] \quad (2.46)$$

εισάγοντας την (2.46) στην (2.42), δίνει για τη στοιχειώδη ηλεκτρική δύναμη,

$$f_e^e(t, r) = C_p u_j(t) \int_0^{L_e} [\delta'(r) - \delta'(r - L_e)] H(r) \delta r \quad (2.47)$$

όπου έχει ληφθεί $r_0 = 0$, καθώς θεωρείται η στοιχειώδης δοκός. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.24). [95]

Επομένως,

$$\begin{aligned} f_e^e(t, r) &= C_p u_j(t) \int_0^{L_e} [\delta'(r) - \delta'(r - L_e)] H(r) \delta r = C_p u(t) [-H'(0) + H'(L_e)] \\ &= C_p u_j(t) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.48)$$

2.3.4 Ολικοί πίνακες μάζας και ακαμψίας

Για τον υπολογισμό των ολικών πινάκων μάζας και ακαμψίας απαιτείται η «συρραφή» των αντίστοιχων στοιχειωδών πινάκων. [94] Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει τέσσερα βήματα :

- i. Μετατροπή των στοιχειωδών πινάκων από το τοπικό στο γενικό σύστημα συντεταγμένων,

$$\begin{aligned} \tilde{M}_e &= T^T M_e T \\ \tilde{K}_e &= T^T K_e T \end{aligned} \quad (2.49)$$

όπου T ο πίνακας μετασχηματισμού ο οποίος για δύο βαθμούς ελευθερίας σε

κάθε κόμβο ισούται με,

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

αφού η γωνία στροφής α από το τοπικό στο γενικό σύστημα είναι μηδέν.

Συνακόλουθα η (2.49) από τις σχέσεις (2.37), (2.41) γίνεται,

$$\tilde{M}_e = \frac{\rho_b A_b L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L_e & 54 & -13L_e \\ -22L_e & 4L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 \\ 54 & -13L_e & 156 & 22L_e \\ 13L_e & -3L_e^2 & 22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\tilde{K}_e = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L_e & -12 & -6L_e \\ -6L_e & 4L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & 6L_e & 12 & 6L_e \\ -6L_e & 2L_e^2 & 6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

- ii. Κατασκευή των εκτεταμένων στοιχειωδών πινάκων. Οι εκτεταμένοι πίνακες μάζας και ακαμψίας προκύπτουν από τους στοιχειώδεις ως,

$$\bar{M}_{e_j} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{M}_e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{2(n+1) \times 2(n+1)} =$$

$$\frac{\rho_b A_b L_e}{420} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 156 & -22L_e & 54 & -13L_e & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & -22L_e & 4L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 54 & -13L_e & 156 & 22L_e & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 13L_e & -3L_e^2 & 22L_e & 4L_e^2 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & & & & \vdots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\bar{K}_{e_j} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{K}_e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{2(n+1) \times 2(n+1)} =$$

$$\frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & & & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 12 & -6L_e & -12 & -6L_e & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & -6L_e & 4L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & -12 & 6L_e & 12 & 6L_e & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & -6L_e & 2L_e^2 & 6L_e & 4L_e^2 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & & & & \vdots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Οι στοιχειώδεις πίνακες \tilde{M}_{e_j} , \tilde{K}_{e_j} τοποθετούνται στο στοιχείο $(2j-1), (2j-1)$ για $j = 1 : n$.

iii. Οι γενικοί πίνακες μάζας και ακαμψίας προκύπτουν από τις,

$$M_G = \sum_{j=1}^n \tilde{M}_{e_j} \quad K_G = \sum_{j=1}^n \tilde{K}_{e_j} \quad (2.54)$$

όπου $M_G, K_G \in \mathbb{R}^{2(n+1) \times 2(n+1)}$. Για παράδειγμα εάν $n=4$ που ισχύει στην υπό μελέτη δοκό οι πίνακες ισούνται με,

$$M_G = \frac{\rho_b A_b L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L_e & 54 & -13L_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -22L_e & 4L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13L_e & 156 & -22L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$K_G = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L_e & -12 & -6L_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6L_e & 4L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & -6L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & -6L_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & -6L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L_e & 12 & 6L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

iv. Εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών που ισχύουν για την πρόβολο δοκό. Εξ αιτίας της πάκτωσης διαγράφονται οι δύο πρώτες γραμμές και στήλες των M_G , K_G και προκύπτουν οι ολικοί πίνακες μάζας M και ακαμψίας K , όπου $M, K \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Για παράδειγμα εάν $n=4$ που ισχύει στην υπό μελέτη δοκό οι πίνακες ισούνται με,

$$M = \frac{\rho_b A_b L_e}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 \\ 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e \\ 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13L_e & 156 & -22L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$K = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & -6L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & -6L_e & 0 & 0 \\ -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & -6L_e \\ 0 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L_e & 12 & 6L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

2.3.5 Ολικό διάνυσμα μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης

Το ολικό διάνυσμα της εξωτερικής μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης προκύπτει από τη «συρραφή» των αντίστοιχων στοιχειωδών διανυσμάτων. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει τρία βήματα [94]:

- i. Κατασκευή των εκτεταμένων στοιχειωδών διανυσμάτων. Τα εκτεταμένα διανύσματα προκύπτουν από τα στοιχειώδη (2.42), (2.48) ως,

$$\bar{f}_j = \left[0 \dots 0 \dots 0 \ : \ f^e \ : \ 0 \dots 0 \dots 0 \right]_{2(n+1) \times 1}^T \quad (2.59)$$

όπου το στοιχειώδες διάνυσμα τοποθετείται στη θέση $(2j-1)$. Για παράδειγμα εάν $n = 4$ που ισχύει για την υπό μελέτη δοκό και για ομοιόμορφη φόρτιση $q(t)$, το διάνυσμα ισούται με

$$\left[0 \ 0 \ F(t), \ M(t), \ F(t), \ -M(t) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]_{10 \times 1}^T \quad (2.60)$$

όπου $F(t) = \frac{q(t)}{12} 6L_e$, $M(t) = \frac{q(t)}{12} L_e^2$

- ii. Το γενικό διάνυσμα προκύπτει από την,

$$f_G = \sum_{j=1}^n \bar{f}_j, \quad f_G \in \mathbb{R}^{2(n+1) \times 1} \quad (2.61)$$

Για παράδειγμα εάν $n = 4$ και για ομοιόμορφη φόρτιση $q(t)$ το διάνυσμα ισούται με,

$$\left[F(t) \ M(t) \ 2F(t) \ 0 \ 2F(t) \ 0 \ 2F(t) \ 0 \ F(t) \ -M(t) \right]_{10 \times 1} \quad (2.62)$$

- iii. Το ολικό διάνυσμα της μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης $f(t)$ προκύπτει μετά τη διαγραφή των δύο πρώτων γραμμών εξ αιτίας των συνοριακών συνθηκών που ισχύουν για την πρόβολο δοκό, επιπλέον η ροπή κάμψης στον ακραίο κόμβο ισούται με μηδέν.

$$f(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 1} \quad (2.63)$$

Για $n = 4$ και για ομοιόμορφη φόρτιση $q(r, t)$, το διάνυσμα ισούται με

$$\begin{bmatrix} 2F(t) & 0 & 2F(t) & 0 & 2F(t) & 0 & F(t) & 0 \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad (2.64)$$

2.4

Γενικές εξισώσεις κίνησης της δοκού

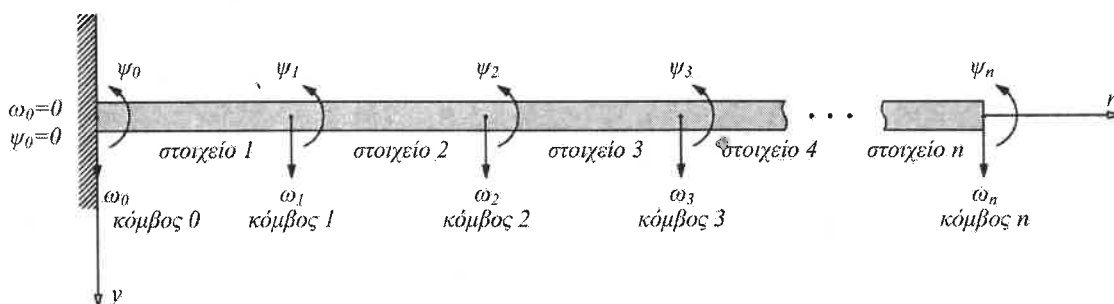
Η εξίσωση Lagrange της στοιχειώδους δοκού είναι,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T_e}{\partial \dot{w}_e} \right] + \left[\frac{\partial U}{\partial w_e} \right] &= f^e \Rightarrow \\ M_e \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + K_e w(t) &= f_m^e + f_e^e \end{aligned} \quad (2.65)$$

επομένως η ολική εξίσωση της στοιχειώδους δοκού είναι,

$$M\ddot{w}(t) + Kw(t) = f_m(t) + f_e(t) \quad (2.66)$$

όπου M και K οι ολικοί πίνακες μάζας και ακαμψίας σχέση (2.58) (2.57) και $f_m(t)$, $f_e(t)$ τα ολικά διανύσματα μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης.[96]



Σχήμα 2.11: Κομβικές μετατοπίσεις και στροφές της δοκού

Η ανεξάρτητη μεταβλητή $w(t)$ είναι ο συνδυασμός της κατακόρυφης μετατόπισης

$\omega_i(t)$ του κόμβου i και της στροφής ψ_i του κόμβου i (σχήμα 2.11).

$$w(t) = \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \omega_n(t) \\ \psi_n \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

όπου n είναι ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιείται στην ανάλυση.

Για να συμπεριλάβουμε τις επιδράσεις απόσβεσης θεωρείται η απόσβεση Rayleigh [87]. Η απόσβεση αυτή δηλώνεται με τον πίνακα ιξώδους απόσβεσης D που είναι συνάρτηση των ολικών πινάκων μάζας και ακαμψίας και ισούται με,

$$D = aM + \beta K \quad (2.68)$$

όπου a και β είναι οι μειωτικοί συντελεστές των πινάκων μάζας και ακαμψίας. Όταν χρησιμοποιείται μόνο η απόσβεση ακαμψίας δηλαδή εάν $a = 0$ ο ιδιομορφικός λόγος απόσβεσης ζ_β ισούται με,

$$\zeta_\beta = \frac{w_r}{2} \beta \quad (2.69)$$

όπου w_r η ιδιοσυχνότητα. Ενώ όταν ληφθεί υπόψη μόνο η απόσβεση μάζας δηλαδή $\beta = 0$ ο ιδιομορφικός λόγος απόσβεσης ζ_a ισούται με,

$$\zeta_a = \frac{a}{2} \frac{l}{w_r} \quad (2.70)$$

Οι συντελεστές a και β μπορούν να υπολογιστούν από πειράματα. Για να αποδειχτεί η αποδοτικότητα του ελεγκτή έχουν ληφθεί πολύ μικρές τιμές για τους συντελεστές a και β .

Η εξίσωση (2.66) μετά την εισαγωγή της απόσβεσης τροποποιείται ως,

$$M\ddot{w}(t) + D\dot{w}(t) + Kw(t) = f_m(t) + f_e(t) \quad (2.71)$$

Η εξίσωση (2.71) είναι η γενική δυναμική εξίσωση της δοκού.[14]

2.5

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

Χρησιμοποιώντας τη δυναμική εξίσωση του συστήματος (2.71), για τη μετατροπή στο χώρο κατάστασης θεωρούμε τον μετασχηματισμό [97],

$$x(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Η μετατροπή στο χώρο κατάστασης γίνεται ως ακολούθως,

$$\begin{aligned} M\ddot{w}(t) + D\dot{w}(t) + Kw(t) &= f_m(t) + f_e(t) \\ \Rightarrow \ddot{w}(t) &= M^{-1}(f_m(t) + f_e(t)) - M^{-1}D\dot{w}(t) - M^{-1}Kw(t) \\ \Rightarrow \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ M^{-1}(f_m(t) + f_e(t)) - M^{-1}D\dot{w}(t) - M^{-1}Kw(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}(f_m(t) + f_e(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ -M^{-1}D\dot{w}(t) - M^{-1}Kw(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}(f_m + f_e)(t) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} 0_{2n \times 2n} & I_{2n \times 2n} \\ \hline -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{array} \right] \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}f_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}f_e(t) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} 0_{2n \times 2n} & I_{2n \times 2n} \\ \hline -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{array} \right] \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Άρα

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}f_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}f_e(t) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} 0_{2n \times 2n} & I_{2n \times 2n} \\ \hline -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{array} \right] \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Το διάνυσμα της ηλεκτρικής φόρτισης $f_e(t)$ προκύπτει από τη διαδικασία της «συρραφής» από το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο. Εάν για παράδειγμα έχουμε τέσσερα στοιχεία, κάτι που ισχύει για την υπο μελέτη δοκό, το διάνυσμα ισούται

με [97],

$$f_e(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_p u_1(t) - c_p u_2(t) \\ 0 \\ -c_p u_3(t) + c_p u_2(t) \\ 0 \\ c_p u_3(t) - c_p u_4(t) \\ 0 \\ c_p u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_p & -c_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_p & -c_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_p & -c_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = F_e^* \cdot u(t) \quad (2.75)$$

Στη γενική περίπτωση ο F_e^* είναι ένας πίνακας διαστάσεων $2n \times n$ και $u(t)$ το διάνυσμα ελέγχου διάστασης $n \times 1$, που αντιπροσωπεύει τις τάσεις $u_j(t)$ των ενεργοποιητών (παράγραφος 2.3.3).[14]

Επομένως η εξίσωση (2.74) με βάση τον μετασχηματισμό (2.72) γίνεται,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} & I_{2n \times 2n} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}F_e^* \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1} \end{bmatrix} f_m(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) + Gf_m(t) \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$= Ax(t) + \begin{bmatrix} B & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ f_m(t) \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

$$= Ax(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t)$$

Για τη μέτρηση της κατάστασης του συστήματος χρησιμοποιούνται ως αισθητήρες αντίστοιχα πιεζοηλεκτρικά όπως φαίνεται στο σχήμα 2.12, η δυνατότητα αυτή περιγράφεται από το ανάστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο που περιγράφεται στην ενότητα Α.5 του Παραρτήματος Α. Η τάση εξόδων αυτών των πιεζοηλεκτρικών αισθητήρων είναι ανάλογη των κομβικών μετακινήσεων των αντίστοιχων στοιχείων.

Επομένως η έξοδος του συστήματος είναι,

$$y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_3(t) & \dots & x_{n-1}(t) \end{bmatrix}^T = Cx(t) \quad (2.78)$$

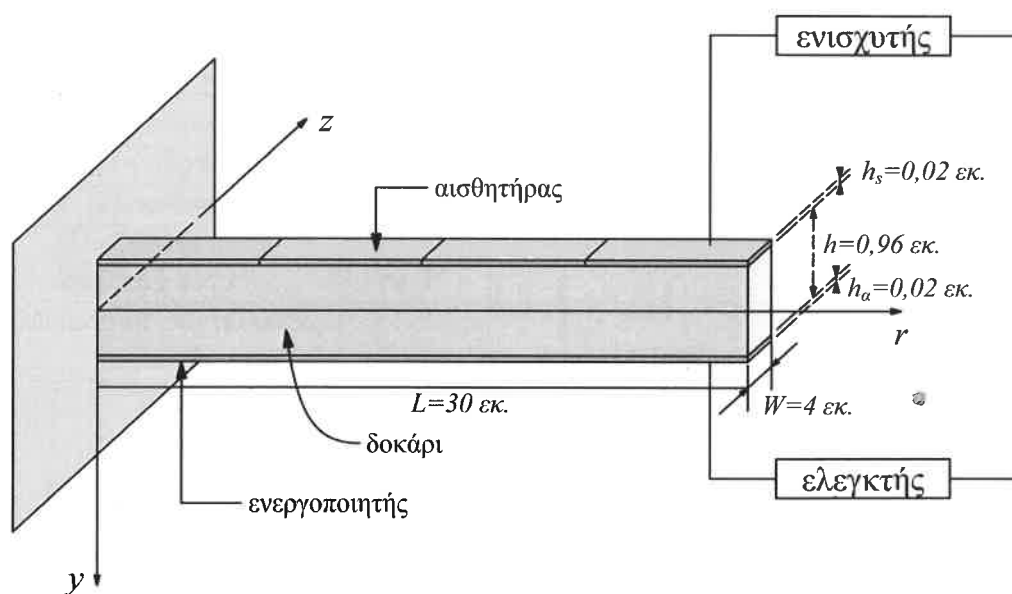
με,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

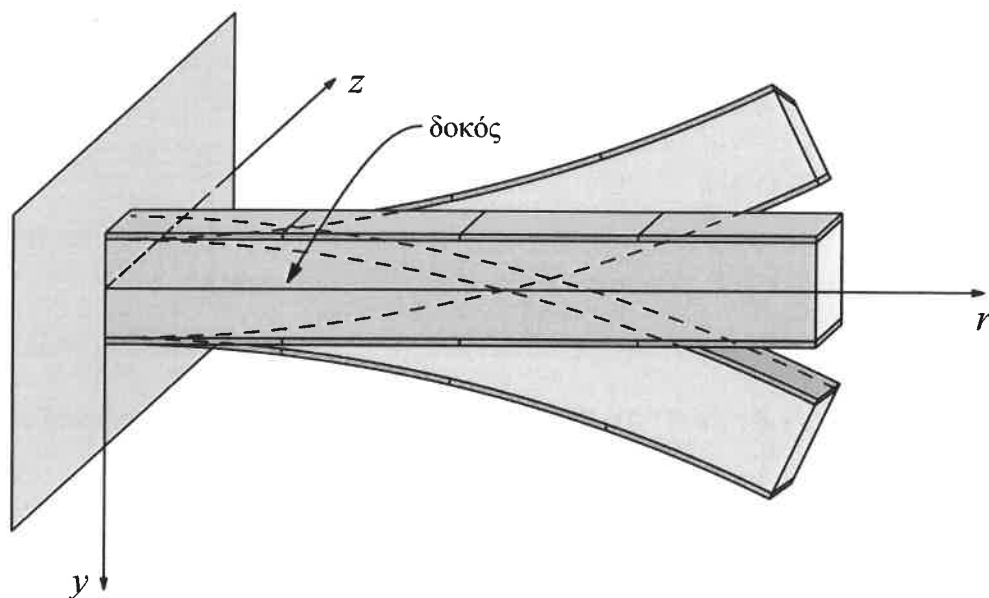
Οι μονάδες που χρησιμοποιούνται είναι m, rad, sec και N.

2.6 Εξισώσεις κίνησης της υπό μελέτη δοκού

Θεωρείται η πρόβλος δοκός με τέσσερα πεπερασμένα στοιχεία και με ενσωματωμένα και στις δύο (άνω και κάτω) επιφάνειες, συμμετρικά τοποθετημένα πιεζοηλεκτρικά, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.12. Η δοκός γίνεται από σύνθετα γραφίτη / εποξικό T300/976 και το πιεζοηλεκτρικό ανήκει στην κατηγορία PZT G1195N. Οι ιδιότητες της δοκού και οι διαστάσεις των πιεζοηλεκτρικών ενεργοποιητών φαίνονται στον πίνακα 2.1. Το πάχος των πιεζοηλεκτρικών είναι μικρό σε σχέση με το πάχος της δοκού, με συνέπεια η δοκός να θεωρείται ομοιόμορφη. Τα κατώτερα πιεζοηλεκτρικά εξυπηρετούν ως ενεργοποιητές και τα ανώτερα ως αισθητήρες (σχήμα 2.12, 2.13).



Σχήμα 2.12: Σχεδιάγραμμα δοκού με πιεζοηλεκτρικά



Σχήμα 2.13: Η δοκός σε κάμψη

Ιδιότητες	Μονάδες	Δοκός		Πιεζοηλεκτρικός ενεργοποιητής	
Υλικό	-	γραφίτης / εποξικό T300/976		PZT G1195N	
Μήκος	m	L	0,3	L_p	0,0075
Πλάτος	m	W	0,004	W_p	0,004
Πάχος	m	h	0,0096	h_p	0,0002
Μέτρο ελαστικότητας Young	N/m^2	E	$1,5 \cdot 10^{11}$	E_p	$6,3 \cdot 10^{10}$
Ροπή αδράνειας	m^4	I	$3,33 \cdot 10^{-9}$	I_p	$1,92 \cdot 10^{-10}$
Πυκνότητα	Kg/m^2	ρ_b	1600	ρ	7600
Πιεζοηλεκτρική σταθερά έντασης	m/V	-	-	d_{31}	$254 \cdot 10^{-12}$
Μειωτικοί συντελεστές απόσβεσης	-	α, β	0,0005	-	

Πίνακας 2.1: Ιδιότητες και διαστάσεις δοκού και πιεζοηλεκτρικών ενεργοποιητών

Οι πίνακες μάζας $M_{8 \times 8}$, ακαμψίας $K_{8 \times 8}$, απόσβεσης $D_{8 \times 8}$ και $F_{e_{8 \times 4}}^*$ υπολογίζονται από τις σχέσεις (2.58), (2.57), (2.68), (2.75) και παρατίθενται στο Παράρτημα Β στις σχέσεις (B.1), (B.2), (B.8), (B.6).

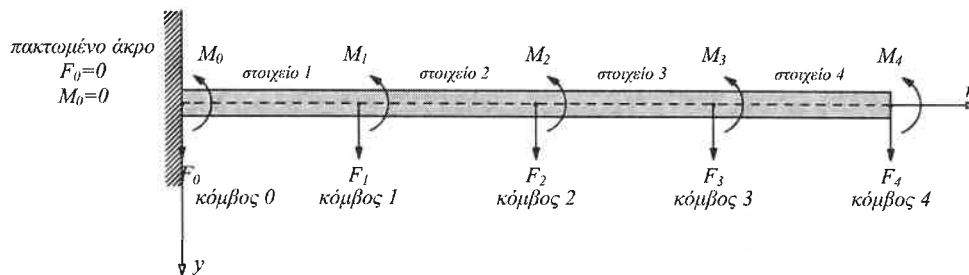
Βάσει των πινάκων αυτών υπολογίζονται και οι πίνακες,

$$A = \begin{bmatrix} 0_{8 \times 8} & I_{8 \times 8} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix}_{16 \times 16},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_{8 \times 4} \\ M^{-1}F_e^* \end{bmatrix}_{16 \times 4},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0_{8 \times 8} \\ M^{-1} \end{bmatrix}_{16 \times 8}$$

που δίνονται στο Παράρτημα Β, στις σχέσεις (B.3), (B.5), (B.7).



Σχήμα 2.14: Μοντέλο έξυπνης δοκού χωρισμένο σε 4 πεπερασμένα στοιχεία

Το διάνυσμα μηχανικής δύναμης f_m είναι,

$$f_m = \begin{bmatrix} F_1 & M_1 & F_2 & M_2 & F_3 & M_3 & F_4 & M_4 \end{bmatrix}_{8 \times 1}^T \quad (2.80)$$

όπου F_i, M_i είναι αντίστοιχα η δύναμη και η ροπή για κάθε κόμβο i (σχήμα 2.14) που προκύπτει μετά τη συρραφή των στοιχειωδών διανυσμάτων. [94]

2.6.1 Μηχανικές εισοδοι στο σύστημα

Στις προσομοιώσεις που ακολουθούν για την εξακρίβωση της αποτελεσματικότητας των ελεγκτών χρησιμοποιούνται τρία είδη μηχανικών δυνάμεων:

- Σταθερή συγκεντρωμένη δύναμη 10N στο ελεύθερο άκρο της δοκού,

$$f_m(t, r) = 10\delta(r - L) \quad (2.81)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.59), (2.60), (2.61), (2.62) η δύναμη μετα-

τρέπεται στο χώρο κατάστασης στην μορφή,

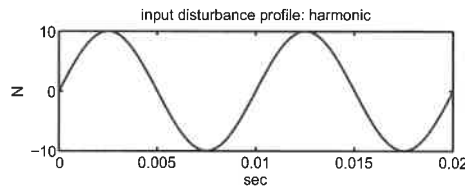
$$f_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.82)$$

- Ημιτονοειδής δυναμική φόρτιση με εύρος ταλάντωσης 10N και περίοδο 0,01 sec σχήμα (2.15),

$$q_0(t) = 10\eta\mu(0,01t) \quad (2.83)$$

Η δύναμη αυτή είναι, ομοιόμορφα κατανεμημένη, χρονικά μεταβαλλόμενη,

$$f_m(t) = q_0(t) \quad (2.84)$$



Σχήμα 2.15: Ημιτονοειδής φόρτιση

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.59), (2.60), (2.61), (2.62) η δύναμη μετατρέπεται στο χώρο κατάστασης στην μορφή,

$$\begin{aligned} f_m(t) &= L_e \begin{bmatrix} 10\eta\mu(t) & 0 & 10\eta\mu(t) & 0 & \dots & 5\eta\mu(t) & 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 0.75\eta\mu(t) & 0 & 0.75\eta\mu(t) & 0 & \dots & 0.375\eta\mu(t) & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.85)$$

- Πραγματική αιολική φόρτιση, σχήμα (2.16)

$$f_m(t) = y(t) \quad (2.86)$$

Η συνάρτηση $y(t)$ προέκυψε από το αρχείο της ταχύτητας του ανέμου μέσω της σχέσης,

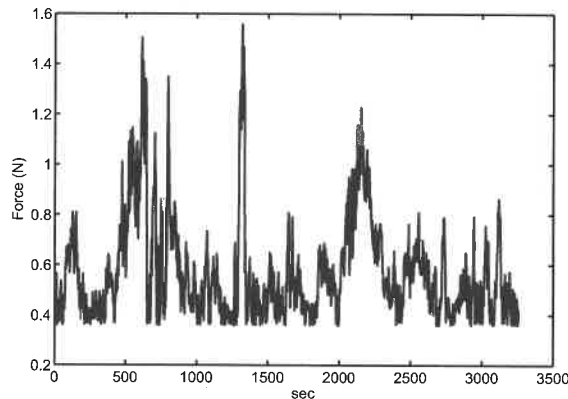
$$y(t) = 0,5\rho v^2(t)c_v E \quad (2.87)$$

όπου $\rho = 1,125\text{kg}/\text{m}^3$ η πυκνότητα του αέρα, c_v συντελεστής που εξαρτάται από τη διατομή της δοκού και για ορθογωνική διατομή είναι $c_v = 1,5$, $v(t)$ η

ταχύτητα του ανέμου και E η επιφάνεια της δοκού που έρχεται σε επαφή με τον αέρα. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.59), (2.60), (2.61), (2.62) η δύναμη μετατρέπεται στο χώρο κατάστασης στην μορφή,

$$f_m(t) = \begin{bmatrix} y(t) & 0 & y(t) & 0 & y(t) & 0 & y(t) & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.88)$$

Το αρχείο της αιολικής ταχύτητας που χρησιμοποιήθηκε παραχωρήθηκε από το εργαστήριο αιολικής ενέργειας του ΑΤΕΙ Κρήτης. Η δειγματοληψία έγινε ανά 1 sec και χρησιμοποιήθηκαν 3257 μετρήσεις από την θέση του Εσταυρωμένου Ηρακλείου Κρήτης τον Μάρτιο του 2006. Για τις εκάστοτε ανάγκες της προσομοίωσης η δειγματοληψία έχει μεταβληθεί έτσι ώστε να προκύπτουν εύλογοι χρόνοι προσομοίωσης.



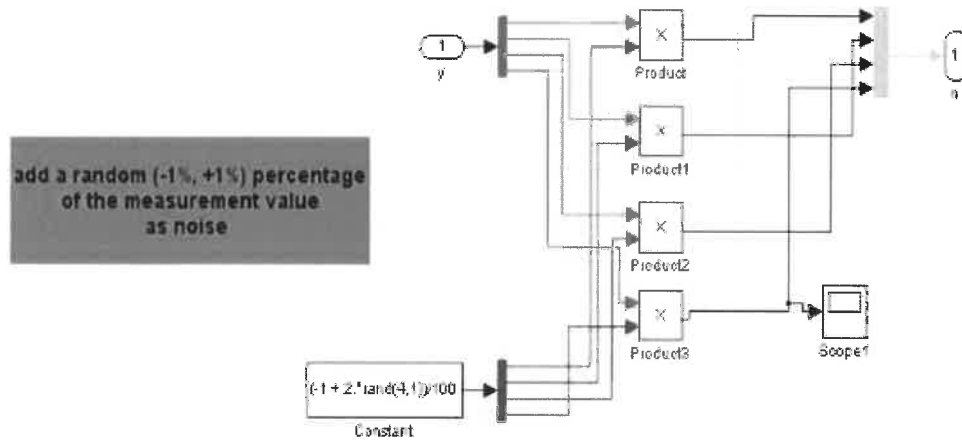
Σχήμα 2.16: Αιολική φόρτιση

2.6.2 Θόρυβος

Επιπλέον για τις προσομοιώσεις έχει εισαχθεί θόρυβος σαν τυχαίο ποσοστό στο διάστημα (+1%, -1%), επί των μετρήσεων των εξόδων του συστήματος. Εξ αιτίας των μικρών μετατοπίσεων των κόμβων του συστήματος, το εύρος του θορύβου λαμβάνεται μικρό, της τάξης του 5×10^{-10} , ενώ για κάθε κόμβο της δοκού γίνεται εισαγωγή του σήματος με διαφορετικό ποσοστό με μικρότερο ποσοστό στον πρώτο κόμβο εξ αιτίας του πακτωμένου άκρου της δοκού.

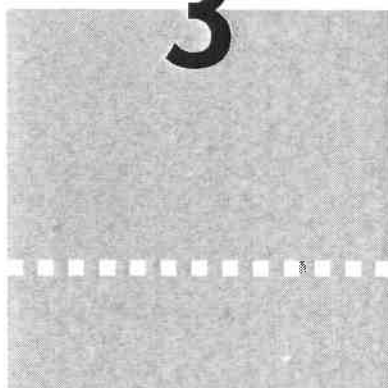
Το σήμα του θορύβου έχει ληφθεί ίδιο σε όλες τις προσομοιώσεις (με χρήση του ελεγκτή LQR, Hinfinity, Hifoo).

Το μοντέλο του θορύβου όπως εισάγεται στο Matlab δίνεται στο σχήμα 2.17



Σχήμα 2.17: Μοντέλο θορύβου όπως έχει ληφθεί στο Simulink

3



ΕΛΕΓΧΟΣ

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται και συγκρίνονται οι διάφορες στρατηγικές ελέγχου για το πρόβλημα της κατακόρυφης ρύθμισης της θέσης της δοκού.

3.1 Ορισμός του προβλήματος ελέγχου

Το πρόβλημα ελέγχου είναι να διατηρηθεί η δοκός σε ισορροπία (κάτι που σημαίνει μηδενικές μετατοπίσεις και στροφές) παρ' όλες τις διαταραχές, το θόρυβο μετρήσεων, και τις ατέλειες του μοντέλου, χρησιμοποιώντας τις διαθέσιμες μετρήσεις και στη συνέχεια τον έλεγχο. Το γενικό διάγραμμα ελέγχου φαίνεται στο σχήμα 3.1.

Στο διάγραμμα παρατηρούμε τα εξής:

- i. Οι διαταραχές θεωρούνται μη μετρήσιμες και απρόβλεπτες.
- ii. Το διάνυσμα κατάστασης δεν είναι μετρήσιμο στο σύνολο του, γεγονός που καθιστά απαραίτητη τη χρήση παρατηρητή.