ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4

Στόχος: Εντολές αναστροφής πίνακα, αντιστροφής τετραγωνικού πίνακα, υπολογισμού οριζουσας και ίχνους. Επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Για την αναστροφή ενός πίνακα, για την μετατροπή με άλλα λόγια των γραμμών σε στήλες, πληκτρολογούμε το όνομα του πίνακα ακολουθούμενο με τόνο. Έτσι:

```
>> A=[1 2;2 3;4 5];A'

ans =

     1     2     4
     2     3     5
```

Δηλαδή ο 3×2 πίνακας A μετετράπη στον 2×3 πίνακα του αποτελέσματος.

Ο αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα είναι, <u>εφόσον υπάρχει,</u> ο μοναδικός τετραγωνικός πίνακας των αυτών διαστάσεων ο οποίος πολλαπλασιαζόμενος με τον αρχικό πίνακα, από αριστερά ή από δεξιά αδιάφορο, δίνει ως αποτέλεσμα τον μοναδιαίο πίνακα των ιδίων προφανώς διαστάσεων. Για να πάρουμε τον αντίστροφο με το MATLAB, χρησιμοποιούμε την εντολή *inv*, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα:

```
>> A=[1 2 3;2 -3 1;0 2 -1];inv(A)

ans =

    0.0588    0.4706    0.6471
    0.1176   -0.0588    0.2941
    0.2353   -0.1176   -0.4118

>> A*ans

ans =

    1.0000         0         0
   -0.0000    1.0000    0.0000
         0         0    1.0000
```

Για να υπάρχει ο αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα, η ορίζουσα αυτού του πίνακα πρέπει και αρκεί να <u>μην</u> είναι 0. Για τον υπολογισμό οριζουσών χρησιμοποιούμε την εντολή *det*, ενώ για τον υπολογισμό του ίχνους ενός τετραγωνικού πίνακα, δηλαδή για το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του, χρησιμοποιούμε την εντολή *trace*.

```
>> det(A),trace(A)
```

ans =

17

ans =

-3

Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος m εξισώσεων και n αγνώστων είναι η εξής:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Αν Α = [a_{ij}], ο $m \times n$ *πίνακας των συντελεστών του συστήματος*, Β = [b_i], η $m \times 1$ *στήλη των σταθερών όρων του συστήματος*, και Χ = [x_j], η $n \times 1$ *στήλη των αγνώστων του συστήματος*, μπορούμε να γράψουμε το ανωτέρω σύστημα υπό μορφήν εξισώσεως πινάκων ως εξής: ΑΧ = Β.
Για τα διάφορα γραμμικά συστήματα, έχουμε τρία ενδεχόμενα ως προς το πλήθος των λύσεων: Μοναδική λύση, άπειρες λύσεις (*αόριστο σύστημα*), καμία λύση (*αδύνατο σύστημα*). Το ποιο από τα τρία ενδεχόμενα ισχύει, εξαρτάται κατ' αρχήν από τη σχέση του m προς το n. Πιο συγκεκριμένα:
Αν $m = n$, το σύστημα λέγεται τετραγωνικό και παίζουν όλα τα ενδεχόμενα με συνηθέστερο όμως το ενδεχόμενο της <u>μοναδικής λύσης.</u>
Αν $m < n$, το σύστημα θα είναι ή <u>αόριστο</u> ή <u>αδύνατο</u> με συνηθέστερο το ενδεχόμενο να είναι <u>αόριστο.</u>
Αν $m > n$, παίζουν όλα τα ενδεχόμενα με συνηθέστερο ενδεχόμενο το σύστημα να είναι <u>αδύνατο.</u>
Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει η δυνατότητα να αποφασίσουμε αν το σύστημά μας έχει λύση (δηλαδή να μην είναι αδύνατο) βασιζόμενοι στην έννοια της *τάξεως* (rank) ενός πίνακα. Με τον όρο αυτό δηλώνεται η μεγαλύτερη διάσταση τετραγωνικού υποπίνακα του πίνακά μας με <u>μη μηδενική</u> ορίζουσα (δηλαδή αντιστρέψιμου). Στο MATLAB βρίσκουμε την τάξη ενός πίνακα με χρήση της εντολής *rank*. Ο πίνακας Α στο τελευταίο παράδειγμα έχει ορίζουσα 17, και επειδή είναι ο μεγαλύτερης διάστασης υποπίνακας του εαυτού του, η τάξη του είναι 3. Πράγματι:

```
>> rank(A)

ans =

     3
```

ενώ

```
>> rank([1 2;2 0;1 -1])

ans =

     2
```

διότι στον 3 × 2 πίνακα υπάρχει υποπίνακας (τουλάχιστον ένας) 2 × 2 με μη μηδενική ορίζουσα (βρείτε έναν˙ προφανώς δεν είναι δυνατόν να βρούμε τετραγωνικό υποπίνακα μεγαλύτερης διάστασης!).
Επιστρέφοντας στο σύστημα AX = B, πρέπει να πούμε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να <u>μην είναι</u> αδύνατο, είναι να έχουμε rank(A) = rank([A B])

ΑΣΚΗΣΗ. Γράψτε γραμμικά συστήματα για τα τρία ενδεχόμενα αναφορικά με τη σχέση αριθμού εξισώσεων και αριθμού αγνώστων και εξετάστε αν έχουν λύση.

Πώς παίρνουμε τη λύση ενός γραμμικού συστήματος με τη βοήθεια του MATLAB; Στην περίπτωση που το σύστημα είναι τετραγωνικό με μοναδική λύση (αντιστρέψιμος πίνακας συντελεστών), το σύστημα AX = B δίνει X = $A^{-1}B$, και επομένως ένας τρόπος για να προκύψει η λύση είναι να ζητήσουμε από το MATLAB το inv(A)*B. Ακόμη καλύτερο είναι να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή \, γράφοντας A\B, διότι στην περίπτωση αυτή η εσωτερική διαδικασία που λαμβάνει χώρα και η οποία στηρίζεται στον αλγόριθμο του Gauss, περιλαμβάνει λιγότερους πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις, δίνοντας ακριβέστερα αποτελέσματα, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις μεγάλων συστημάτων. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, έχουμε ένα σύστημα 3 × 3:

```
>> A=[1 -1 2;0 1 3;-1 2 3];B=[1;2;3];rank(A),inv(A)*B,A\B

ans =

     3


ans =

    -2
    -1
     1


ans =

    -2
    -1
     1
```

Στην περίπτωση ενός συστήματος που έχει άπειρες λύσεις, το MATLAB προφανώς δεν τις δίνει όλες, αλλά επιλέγει μία από αυτές, ανάλογα με το τι πληκτρολογούμε. Αν πληκτρολογήσουμε A\B, θα πάρουμε μία στήλη-λύση στην οποία θα εμφανίζεται τουλάχιστον ένα 0, ενώ αν πληκτρολογήσουμε pinv(A)*B θα εμφανιστεί η λύση *ελάχιστης νόρμας*, δηλαδή αν είναι X = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ η λύση, η νόρμα (ή μέτρο) $\sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + \cdots + x_n^{\ 2}}$ του X είναι η μικρότερη από τη νόρμα κάθε άλλης λύσης του συστήματος. Η εντολή pinv(A) αναφέρεται στον *ψευδοαντίστροφο* του A κατά Moore-Penrose, έννοια η οποία γενικεύει την έννοια του αντιστρόφου ενός πίνακα. Ας δούμε τι μας δίνουν οι δύο εντολές στην περίπτωση του συστήματος με A=[1 -2 3 1;0 2 -1 3;2 3 1 0] και B=[1;-1;2]:

```
>> A=[1 -2 3 1;0 2 -1 3;2 3 1 0];B=[1;-1;2];rank(A),rank([A B]),A\B,pinv(A)*B

ans =

     3


ans =

     3


ans =

         0
    0.4211
    0.7368
   -0.3684


ans =

    0.4284
    0.2294
    0.4550
   -0.3346
```

Για να υπολογίσουμε τη νόρμα, πληκτρολογούμε το εξής:

```
>> norm(ans)

ans =

    0.7451
```

και αυτή είναι η ελάχιστη τιμή νόρμας για το σύνολο των λύσεων του ανωτέρω συστήματος.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που το σύστημα δεν έχει λύση. Το MATLAB δίνει ένα αποτέλεσμα, το οποίο αποτελεί προσεγγιστική λύση βάσει της μεθόδου *των ελαχίστων τετραγώνων*. Τη μέθοδο αυτή θα τη γνωρίσουμε στη θεωρία, αλλά τώρα θα δούμε τι ακριβώς συνεπάγεται για το θέμα που συζητούμε. Το σύστημα ΑΧ = Β γράφεται ισοδύναμα ΑΧ − Β = Ο, όπου το Ο δηλώνει τη μηδενική στήλη $m \times 1$. Υπό μορφή εξισώσεων, το ίδιο πράγμα γράφεται

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 = 0\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2 = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - b_m = 0
\end{aligned}$$

Εφόσον δεν υπάρχει λύση Χ = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ που να μηδενίζει ταυτοχρόνως όλα τα αριστερά μέλη, το MATLAB επιλέγει τιμές για τα x_i οι οποίες *ελαχιστοποιούν* το άθροισμα των τετραγώνων των αριστερών μελών στις ανωτέρω σχέσεις, δηλαδή το $\sum_{j=1}^{m}(a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n - b_j)^2$. Με άλλα λόγια, αν δεν μπορούμε να μηδενίσουμε ταυτοχρόνως όλα τα αριστερά μέλη, άρα και τα τετράγωνά τους, μπορούμε να βρούμε τιμές για τα x_i που τουλάχιστον ελαχιστοποιούν το άθροισμα αυτών των τετραγώνων. Για να πάρουμε αυτό το αποτέλεσμα, χρησιμοποιούμε τον τελεστή \ με το γνωστό τρόπο.Δείτε το επόμενο παράδειγμα:

```
>> A=[1 2;2 3;-1 2;1 1];B=[1;-1;2;3];rank(A),rank([A B]),A\B

ans =

     2
```

ans =

3

ans =

-0.5455
0.5455

Δηλαδή, η <<λύση>> κατά την ανωτέρω έννοια είναι η X = $\begin{bmatrix} -0.5455 \\ 0.5455 \end{bmatrix}$.

Τέτοιες <<λύσεις>> έχουν συχνά μεγάλη πρακτική σημασία, σε περιπτώσεις που ένας περιορισμένος αριθμός αγνώστων εμφανίζεται σε γραμμικό σύστημα με μεγάλο αριθμό εξισώσεων που σπανίως είναι συμβατές μεταξύ τους. Έτσι, καταλήγει κανείς σε μια ορισμένη <<λύση>>, που του προσφέρει κάποια διέξοδο. Η ίδια διαδικασία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί επίσης σε περιπτώσεις που οι σταθεροί όροι b_i έχουν προκύψει με περιθώρια λάθους οφειλόμενα είτε σε σφάλματα μέτρησης είτε (ακόμη σημαντικότερο) σε μεθόδους αμφιβόλου αξιοπιστίας. Σε μια τέτοια περίπτωση, ένα αποτέλεσμα που θα προέκυπτε μέσω της ανωτέρω διαδικασίας, θα βοηθούσε σε έναν επαναπροσδιορισμό των b_i (πώς;), εξασφαλίζοντας ενδεχομένως μεγαλύτερη αξιοπιστία.

ΑΣΚΗΣΗ. (Από τις <<Εργαστηριακές Ασκήσεις Τεχνολογίας Δομικών Υλικών>> του συναδέλφου κ. Θωμά Μπενέτου, τον οποίο και ευχαριστώ). Για την παρασκευή οπλισμένου σκυροδέματος μειωμένης υδατοπερατότητας, θα πρέπει να αναμείξουμε σκύρα, ψηφίδα και άμμο σε κατάλληλες αναλογίες, ώστε το προκύπτον μείγμα να ανταποκρίνεται στις προδιαγραφές του Κανονισμού Τεχνολογίας Σκυροδέματος. Σύμφωνα με αυτές, το μείγμα θα πρέπει να περάσει από επτά διαφορετικά κόσκινα τα οποία επιτρέπουν ένα ορισμένο ποσοστό του κάθε υλικού να διέλθει, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Στην τελευταία στήλη του πίνακα φαίνεται τι ποσοστό του μείγματος θα πρέπει να διέλθει από το αντίστοιχο κόσκινο βάσει των προαναφερθέντων προδιαγραφών του Κ.Τ.Σ. Εννοείται ότι επιτρέπονται λογικές αποκλίσεις από τα μεγέθη αυτής της στήλης.

κόσκινο	διερχόμενα επί τοις %			διερχόμενο επί τοις %
	σκύρα	ψηφίδα	άμμος	μείγμα
31.5	100	100	100	100
16.0	50	100	100	78
8.0	8	83	100	61
4.0	-	32	96	43
2.0	-	15	72	31
1.0	-	-	49	18
0.25	-	-	18	7

Προσπαθήστε να γράψετε κατάλληλο σύστημα που να περιγράφει τα ανωτέρω δεδομένα και λύστε το με τη βοήθεια του MATLAB. Δείτε αν η <<λύση>> σας ικανοποιεί τις προδιαγραφές του Κ.Τ.Σ. Τροποποιήστε την ελαφρώς, ώστε να ικανοποιεί την ανελαστική συνθήκη: Το άθροισμα των αναλογιών των τριών υλικών να δίνει 1. Δίνει η τροποποιημένη λύση αποτελέσματα κοντά στις προδιαγραφές του Κ.Τ.Σ.;