ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Γενικά

Στην τυχούσα περιοδική συνάρτηση y=g(x), με περίοδο R=2π (συχνότητα μεταβολής N=1/R), αντιστοιχίζεται η σειρά Fourier τριγωνομετρικής μορφής ως εξής:

$$A_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[A_\lambda \cos(\lambda x) + B_\lambda \sin(\lambda x)\right] \qquad (A.1)$$

η οποία σχηματίζεται με τους συντελεστές A_0, A_λ και B_λ, οι οποίοι υπολογίζονται με τους γνωστούς τύπους Euler-Fourier,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)dx \qquad (A.2)$$

$$A_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(\lambda x)dx \qquad (A.3)$$

$$B_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin(\lambda x)dx \qquad (A.4)$$

Εάν το διάστημα της περιόδου της g(x) είναι δυνατόν να διαιρεθεί πεπερασμένο πλήθος υποδιαστημάτων, σε κάθε ένα των οποίων η) είναι περιορισμένη και ολοκληρώσιμη, πράγμα που συμβαίνει κατά όνα στις συνήθεις περιπτώσεις της τεχνικής πράξεως, η σειρά αυτή Fourier συγκλίνει και έχει όριο συγκλίσεως τη συνάρτηση g(x).

Έτσι μπορεί να την παριστά ως κάτωθι:

$$g(x) = A_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty}[A_\lambda\cos(\lambda x) + B_\lambda\sin(\lambda x)] \qquad (A.5)$$

Στα τυχόν, πεπερασμένα σε πλήθος, σημεία ασυνεχείας (π.χ. σε τοια θέση x_0), η αντίστοιχη σειρά Fourier δίνει την τιμή

$$\frac{1}{2}[g(x_0 - 0) + g(x_0 + 0)] \qquad (A.6)$$

Έτσι λοιπόν η g(x) μπορεί να παρασταθεί πλήρως με το άθροισμα:

Ενός σταθερού όρου, ο οποίος ισούται με τη μέση τιμή της στο διάστημα της περιόδου της.

Μιας σειράς απείρων συνημιτονικών όρων με περίοδο R, R/2, R/3, ... δηλαδή ακέραια υποπολλαπλάσια της βασικής περιόδου της συναρτήσεως g(x) (και συχνότητας μεταβολής N, 2N, 3N, ... ακέραια πολλαπλάσια της βασικής συχνότητας).

- Μιας ακόμα σειράς ημιτονικών όρων ομοίας συνθέσεως.

Οι συντελεστές A_1, A_2, ... και B_1, B_2, ... καθορίζουν τα εύρη ταλαντώσεως των συνιστωσών αυτών αρμονικών συναρτήσεων, ενώ οι δείκτες 1, 2, ... χαρακτηρίζουν την τάξη αυτών.

Κατά τα γνωστά μπορεί να γίνει αντικατάσταση των δύο αρμονικών όρων της αυτής τάξεως, από έναν, ως κάτωθι:

$$g(x) = A_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\Gamma_\lambda\cos(\lambda x - \gamma_\lambda) \qquad (A.7)$$

ή

$$g(x) = A_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\Gamma_\lambda\sin(\lambda x + \delta_\lambda) \qquad (A.8)$$

όπου

$$\Gamma_\lambda = \sqrt{A_\lambda^2 + B_\lambda^2}, \quad tg\gamma_\lambda = B_\lambda/A_\lambda, \quad tg\delta_\lambda = A_\lambda/B_\lambda$$

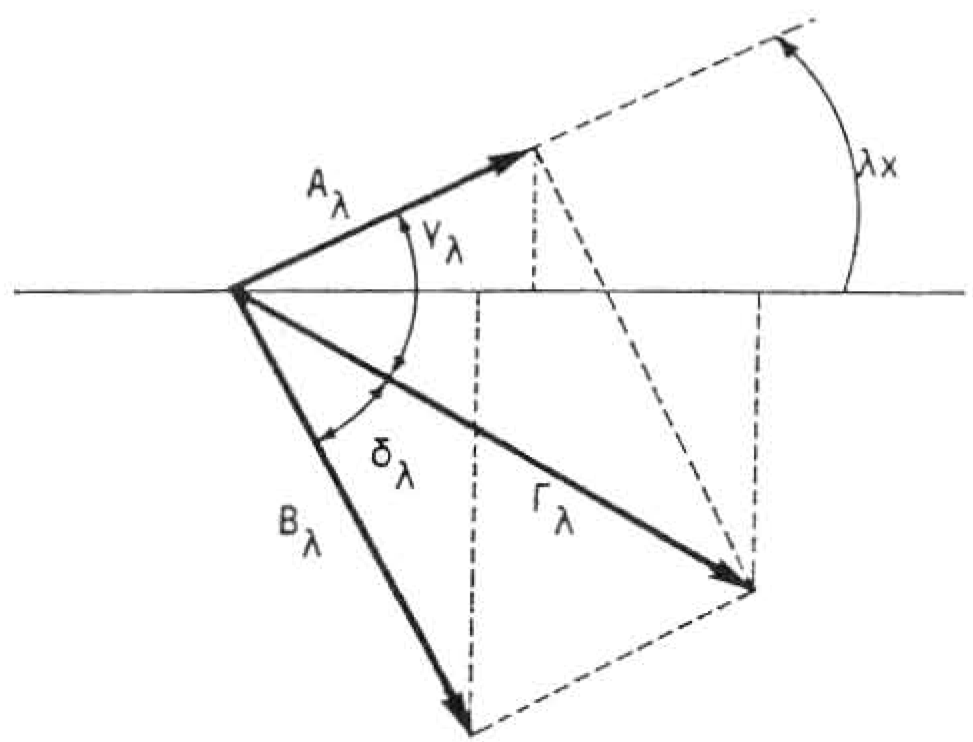
Η διανυσματική παράσταση της συνθέσεως των δύο όρων σε έναν, σύμφωνα και με το Σχήμα Α.1, έχει ως κάτωθι :

Άθροισμα προβολών συνιστωσών = $A_\lambda\cos(\lambda x) + B_\lambda\sin(\lambda x)$ =

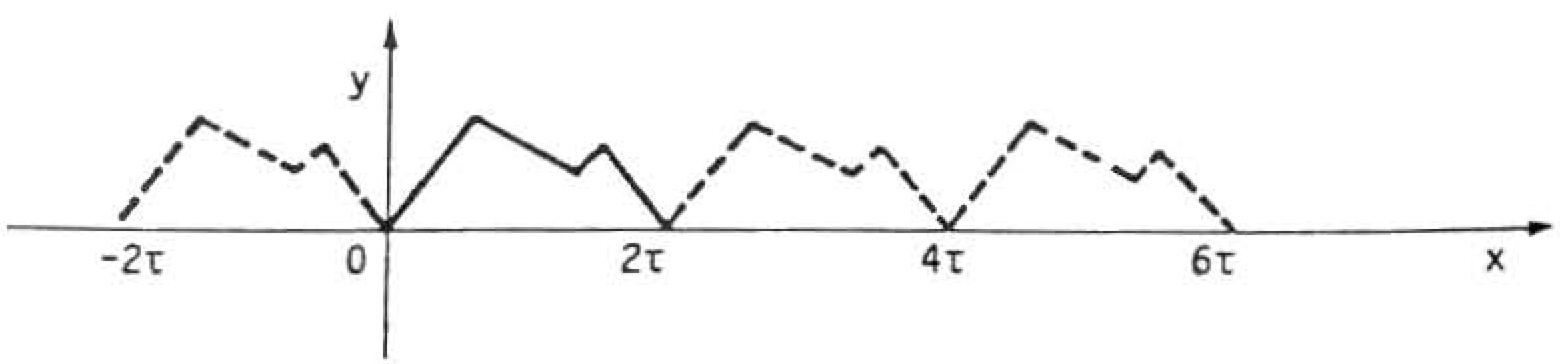
= $A_\lambda\cos(\lambda x) + B_\lambda\cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda x\right)$ = Προβολή συνισταμένης = $\Gamma_\lambda\cos(\lambda x - \gamma_\lambda)$ =

= $\Gamma_\lambda\cos\left(\lambda x - \frac{\pi}{2} + \delta_\lambda\right)$ = $\Gamma_\lambda\sin(\lambda x + \delta_\lambda)$

Διατυπώνονται πιο κάτω ορισμένες χρήσιμες παρατηρήσεις που αναφέρονται στην ανάλυση της περιοδικής συναρτήσεως y=g(x) σε σειρά Fourier:



Διανυσματική σύνθεση των όρων A_λ, B_λ.



Θεώρηση μη περιοδικής συναρτήσεως ως περιοδικής.

α) Εν γένει τα Γ_λ τείνουν στο μηδέν για $\lambda \to \infty$ και μάλιστα τόσο γρηγορότερα, όσο "ομαλότερη" είναι η καμπύλη της συναρτήσεως g(x). Έτσι στις πιο πολλές περιπτώσεις της τεχνικής πράξεως επαρκεί η διατήρηση ορισμένου αριθμού από τους πρώτους όρους της σειράς.

β) Εάν η συνάρτηση είναι άρτια, δηλαδή εάν g(x)=g(-x) (αναγκαστική συμμετρία ως προς την ευθεία x=π), τότε $B_\lambda=0$, δηλαδή εξαφανίζονται οι ημιτονικοί όροι.

γ) Εάν η συνάρτηση είναι περιττή, δηλαδή εάν g(x)=-g(-x) (αντισυμμετρία ως προς την ευθεία x=π), τότε $A_0=0$ και $A_\lambda=0$, δηλαδή εξαφανίζονται η μέση τιμή και οι συνημιτονικοί όροι.

δ) Με βάση τα ανωτέρω, συνάρτηση, μη εμφανίζουσα συμμετρία ή αντισυμμετρία ως προς τον άξονα x=π, δεν μπορεί να είναι άρτια ή περιττή.

ε) Μετατόπιση του άξονα των x μεταβάλλει μόνο τη μέση τιμή A_0 και καθόλου τα A_λ, B_λ.

στ) Μετατόπιση του άξονα των y, δηλαδή της αρχής μετρήσεως του x, αλλάζει την αναλυτική έκφραση της συναρτήσεως και άρα και τους συντελεστές A_λ και B_λ, χωρίς να μεταβάλλει το A_0 .

Στην περίπτωση που η περιοδική συνάρτηση y=g(x) έχει περίοδο $2p \neq 2\pi$, τότε εισάγοντας τη νέα μεταβλητή $x' = x\frac{\pi}{p}$ προκύπτει από τη σχέση

$$y=g(x)=g\left(\frac{p}{\pi}x'\right)=f(x')$$

η συνάρτηση f(x'), που είναι περιοδική με περίοδο 2π, και για την οποία ισχύουν οι πιο πάνω τύποι Euler-Fourier για τους συντελεστές A_0, A_λ και B_λ, που είναι οι εξής:

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x')dx'=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}g(x)dx \tag{A.9}$$

$$A_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x')\cos(\lambda x')dx'=\frac{1}{p}\int_0^{2p}g(x)\cos\left(\lambda\frac{\pi}{p}x\right)dx \tag{A.10}$$

$$B_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x')\sin(\lambda x')dx'=\frac{1}{p}\int_0^{2p}g(x)\sin\left(\lambda\frac{\pi}{p}x\right)dx \tag{A.11}$$

Έτσι τους συντελεστές μπορούμε να υπολογίσουμε απλώς με εφαρμογή των τύπων Euler-Fourier επί της συναρτήσεως g(x), αδιαφορώντας για την περίοδό της, σαν δηλαδή αυτή να είχε περίοδο 2π. Η τάξη όμως των διαφόρων αρμονικών όρων, δηλαδή ο λόγος της συχνότητας αυτών προς τη συχνότητα 1/2π, δεν θα είναι πλέον 1, 2, 3, ... , λ, ... , αλλά π/p, 2π/p, ..., λπ/p, ... Βέβαια ο λόγος της συχνότητας των αρμονικών όρων προς τη συχνότητα της συναρτήσεως 1/2p θα είναι 1, 2, ..., λ, ...

Η δοθείσα συνάρτηση g(x) θα βρίσκεται τελικά ως εξής:

$$g(x)=A_0+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left\{A_\lambda\cos\left(\lambda\frac{\pi}{p}x\right)+B_\lambda\sin\left(\lambda\frac{\pi}{p}x\right)\right\} \tag{A.12}$$

Εάν τέλος η τυχούσα συνάρτηση g(x) δεν είναι περιοδική, αλλά είναι ορισμένη μόνο στο διάστημα $0\le x\le 2\tau$, είναι δυνατόν να αναλυθεί κατά Fourier, π.χ. λαμβάνοντας αυτήν, νοερώς, σαν περιοδική με περίοδο 2τ, δηλαδή προεκτείνοντας αυτήν με βάση την περιοδικότητά της εκατέρωθεν του διαστήματος ορισμού της, όπου δεν ενδιαφέρει στην πραγματικότητα η μορφή της συναρτήσεως, που μπορεί γενικά να είναι οποιαδήποτε, καθόσον αυτή δεν επηρεάζει καθόλου τη μορφή της g(x) στο ενδιαφέρον αρχικό διάστημα $0\le x\le 2\tau$ (βλ. και Σχήμα Α.2).

Έτσι η g(x), σύμφωνα με τα προηγούμενα, μπορεί να παρασταθεί με τη σειρά

$$g(x)=A_0+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left\{A_\lambda\cos\left(\lambda\frac{\pi}{\tau}x\right)+B_\lambda\sin\left(\lambda\frac{\pi}{\tau}x\right)\right\} \tag{A.13}$$

όπου

$$A_0=\frac{1}{2\tau}\int_0^{2\tau}g(x)dx\ ,\quad A_\lambda=\frac{1}{\tau}\int_0^{2\tau}g(x)\cos\left(\lambda\frac{\pi}{\tau}x\right)dx$$

και

$$B_\lambda=\frac{1}{\tau}\int_0^{2\tau}g(x)\sin\left(\lambda\frac{\pi}{\tau}x\right)dx$$

Οι σχέσεις αυτές ισχύουν αποκλειστικά και μόνο για το αρχικό διάστημα $0\le x\le 2\tau$.

Υπολογισμός των συντελεστών A_0, A_λ και B_λ

Εάν η περιοδική συνάρτηση δίνεται υπό αναλυτικών σχέσεων, ο ακριβής καθορισμός των συντελεστών είναι δυνατός με τη βοήθεια των ήδη αναφερθέντων τύπων. Σε πολλές περιπτώσεις όμως της πράξεως απαιτείται η σε σειρά Fourier ανάλυση περιοδικής συναρτήσεως της οποίας έχει δοθεί η γραφική παράσταση, είτε σαν αποτέλεσμα υπολογισμών, είτε σαν αποτέλεσμα μετρήσεων.

Ο καθορισμός οποιουδήποτε συντελεστή A_λ ή B_λ επιτυγχάνεται με χάραξη της καμπύλης $g(x)\cos(\lambda x)$ ή $g(x)\sin(\lambda x)$, αντίστοιχα, και εύρεση της μέσης τιμής με απλή εμβαδομέτρηση. Η μέθοδος βέβαια αυτή προσδιορισμού των A_λ και B_λ δεν είναι πρακτικά εφαρμόσιμη. Η εργασία της μεθόδου αυτής μπορεί να μηχανοποιηθεί με τη βοήθεια καταλλήλων μηχανικών οργάνων, με τα οποία είναι δυνατή η εύρεση των συντελεστών A_λ και B_λ με απλή περιγραφή της γραφικής παραστάσεως της συναρτήσεως $g(x)$ (αρμονικοί αναλυτές).

Σήμερα, με την εξέλιξη και χρήση των Η/Υ, προτιμάται η πιο κάτω εκτιθέμενη μέθοδος υπολογισμού (αριθμητική ανάλυση) που μπορεί να δώσει οσονδήποτε μεγάλη ακρίβεια.

Αριθμητικός προσεγγιστικός προσδιορισμός των A_0, A_λ και B_λ με υπολογισμό βάσει πεπερασμένου αριθμού τεταγμένων της συναρτήσεως.

Το διάστημα της περιόδου, που, κατά τα ανωτέρω, είναι ή θεωρείται ότι είναι ίσο προς 2π, χωρίζεται σε άρτιο αριθμό ($2n$) υποδιαστημάτων ίσου εύρους Δx,

$$\Delta x = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$$

και θεωρούνται οι, $2n$ το πλήθος, τεταγμένες της συναρτήσεως στις θέσεις χωρισμού.

Έτσι στην τυχούσα θέση (τετμημένη) x_ρ,

$$x_\rho = \rho \cdot \Delta x = \rho \frac{2\pi}{2n} = \rho \frac{\pi}{n}$$

είναι γνωστή η τεταγμένη

$$y_\rho = g(x_\rho) \qquad (\rho = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2n)$$

όπου η τεταγμένη $y_0=y_{2n}$, λόγω της περιοδικότητας.

Με τη βοήθεια των ανωτέρω τεταγμένων ζητείται ο προσδιορισμός:

- Ενός συντελεστή A_0^*

- n συντελεστών $A_1^*,\ A_2^*,\ \ldots,\ A_n^*$

- $n-1$ συντελεστών $B_1^*,\ B_2^*,\ \ldots,\ B_{n-1}^*$

τέτοιων ώστε η συνάρτηση

$$y^* = A_0^* + \sum_{\lambda=1}^{n} A_\lambda^* \cos(\lambda x) + \sum_{\lambda=1}^{n-1} B_\lambda^* \sin(\lambda x) \qquad \text{(A.14)}$$

στις διακεκριμένες θέσεις $x_\rho=\rho\Delta x=\rho 2\pi/2n$ να έχει τιμές $y^* = y = g(x_\rho)$, δηλαδή να συμπίπτει προς τη δοθείσα συνάρτηση. Προφανώς σε κάθε άλλη θέση (κάθε άλλο x) θα είναι εν γένει $y^* \neq g(x)$, η δε προσέγγιση της y^* προς την $g(x)$ θα είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερο είναι το ληφθέν $2n$.

Έτσι λοιπόν, ο υπολογισμός των $2n$ συντελεστών A_0^*, A_λ^* και B_λ^* είναι δυνατός με επίλυση ενός πρωτοβάθμιου γραμμικού συστήματος $2n$ εξισώσεων της μορφής:

$$y_\rho = A_0^* + \sum_{\lambda=1}^{n} A_\lambda^* \cos\left(\lambda\rho\frac{2\pi}{2n}\right) + \sum_{\lambda=1}^{n-1} B_\lambda^* \sin\left(\lambda\rho\frac{2\pi}{2n}\right) \quad \left(= y_\rho^*\right) \qquad (A.15)$$

για $\rho = 1, 2, \ldots, 2n$

Η λύση του συστήματος αυτού δίνει :

$$A_0^* = \frac{1}{2n}\sum_{\rho=1}^{2n} y_\rho \qquad (A.16)$$

$$A_\lambda^* = \frac{1}{n}\sum_{\rho=1}^{2n} y_\rho \cos\left(\lambda\rho\frac{2\pi}{2n}\right) \quad \text{για } \lambda=1 \text{ έως } n-1 \qquad (A.17)$$

$$A_n^* = \frac{1}{2n}\sum_{\rho=1}^{2n} y_\rho \cos(\rho\pi) \qquad (A.18)$$

$$B_\lambda^* = \frac{1}{n}\sum_{\rho=1}^{2n} y_\rho \sin\left(\lambda\rho\frac{2\pi}{2n}\right) \quad \text{για } \lambda=1 \text{ έως } n-1 \qquad (A.19)$$

(Να παρατηρηθεί ότι $B_\lambda^* = 0$ για $\lambda=n$).