

ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR ΓΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

$$20.1 \quad f(x) = \underbrace{f(a)} + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

όπου R_n είναι το υπόλοιπο μετά από n όρους και εκφράζεται με τους δύο τύπους:

$$20.2 \quad \text{Τύπος του Lagrange} \quad R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)(x-a)^n}{n!}$$

$$20.3 \quad \text{Τύπος του Cauchy} \quad R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^{n-1}(x-a)}{(n-1)!}$$

Το ξ , που γενικά είναι διαφορετικό στους δύο τύπους, βρίσκεται μεταξύ a και x . Οί παραπάνω σχέσεις ισχύουν, εάν ή $f(x)$ έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι και τάξεως n .

Εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, ή σειρά που προκύπτει καλείται *σειρά Taylor* της $f(x)$ για $x = a$. Εάν $a = 0$ ή σειρά καλείται συχνά *σειρά Maclaurin*. Οί σειρές αυτές, που καλούνται και *δυναμοσειρές*, συγκλίνουν γενικά για κάθε x ενός διαστήματος, που καλείται *διάστημα σύγκλισης*, και αποκλίνουν για όλα τα x έξω απ' αυτό το διάστημα.

Η ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΣΕΙΡΑ

$$20.4 \quad (a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots$$

$$= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}x^3 + \dots$$

Ειδικές περιπτώσεις

$$20.5 \quad (a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

$$20.6 \quad (a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

$$20.7 \quad (a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$$

$$20.8 \quad (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \quad -1 < x < 1$$

$$20.9 \quad (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots \quad -1 < x < 1$$

$$20.10 \quad (1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \dots \quad -1 < x < 1$$

$$20.11 \quad (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$20.12 \quad (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$20.13 \quad (1+x)^{-1/3} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}x^2 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$20.14 \quad (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3 \cdot 6}x^2 + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 - \dots \quad -1 < x \leq 1$$

ΣΕΙΡΕΣ ΓΙΑ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

$$20.15 \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$20.16 \quad a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$20.17 \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$20.18 \quad \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$20.19 \quad \ln x = 2 \left\{ \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right\} \quad x > 0$$

$$20.20 \quad \ln x = \left(\frac{x-1}{x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{x} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x} \right)^3 + \dots \quad x \geq \frac{1}{2}$$

ΣΕΙΡΕΣ ΓΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

$$20.21 \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$20.22 \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$20.23 \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$20.24 \quad \cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \dots - \frac{2^{2n}B_n x^{2n-1}}{(2n)!} - \dots \quad 0 < |x| < \pi$$

$$20.25 \quad \sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \dots + \frac{E_n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$20.26 \quad \csc x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15,120} + \dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \dots \quad 0 < |x| < \pi$$

$$20.27 \quad \sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad |x| < 1$$

$$20.28 \quad \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots \right) \quad |x| < 1$$

$$20.29 \quad \tan^{-1} x = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots & |x| < 1 \\ \pm \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots & [+ \text{ äv } x \geq 1, - \text{ äv } x \leq -1] \end{cases}$$

$$20.30 \quad \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right) & |x| < 1 \\ p\pi + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \dots & [p=0 \text{ äv } x > 1, p=1 \text{ äv } x < -1] \end{cases}$$

$$20.31 \quad \sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot 3x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5x^5} + \dots \right) \quad |x| > 1$$

$$20.32 \quad \csc^{-1} x = \sin^{-1}(1/x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot 3x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5x^5} + \dots \quad |x| > 1$$

ΣΕΙΡΕΣ ΓΙΑ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- 20.33 $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$
- 20.34 $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$
- 20.35 $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$
- 20.36 $\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \dots \quad 0 < |x| < \pi$
- 20.37 $\operatorname{sech} x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} - \frac{61x^6}{720} + \dots + \frac{(-1)^n E_n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$
- 20.38 $\operatorname{csch} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15,120} + \dots + \frac{(-1)^n 2(2^{2n-1} - 1) B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \dots \quad 0 < |x| < \pi$
- 20.39 $\sinh^{-1} x = \begin{cases} x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \\ \pm \left(\ln |2x| + \frac{1}{2 \cdot 2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4x^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6x^6} - \dots \right) \end{cases} \quad \begin{matrix} |x| < 1 \\ \left[\begin{matrix} + \ddot{u}v x \cong 1 \\ - \ddot{u}v x \cong -1 \end{matrix} \right] \end{matrix}$
- 20.40 $\cosh^{-1} x = \pm \left\{ \ln(2x) - \left(\frac{1}{2 \cdot 2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4x^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6x^6} + \dots \right) \right\} \quad \left[\begin{matrix} + \ddot{u}v \cosh^{-1} x > 0, x \cong 1 \\ - \ddot{u}v \cosh^{-1} x < 0, x \cong 1 \end{matrix} \right]$
- 20.41 $\tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \quad |x| < 1$
- 20.42 $\coth^{-1} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots \quad |x| > 1$

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

- 20.43 $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + \dots \quad -\infty < x < \infty$
- 20.44 $e^{\cos x} = e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31x^6}{720} + \dots \right) \quad -\infty < x < \infty$
- 20.45 $e^{\tan x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^4}{8} + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$
- 20.46 $e^x \sin x = x + x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + \dots + \frac{2^{n/2} \sin(n\pi/4) x^n}{n!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$
- 20.47 $e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \dots + \frac{2^{n/2} \cos(n\pi/4) x^n}{n!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$
- 20.48 $\ln |\sin x| = \ln |x| - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \dots - \frac{2^{2n-1} B_n x^{2n}}{n(2n)!} + \dots \quad 0 < |x| < \pi$
- 20.49 $\ln |\cos x| = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - \dots - \frac{2^{2n-1} (2^{2n} - 1) B_n x^{2n}}{n(2n)!} + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$
- 20.50 $\ln |\tan x| = \ln |x| + \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2835} + \dots + \frac{2^{2n} (2^{2n-1} - 1) B_n x^{2n}}{n(2n)!} + \dots \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$
- 20.51 $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - (1 + \frac{1}{2})x^2 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})x^3 - \dots \quad |x| < 1$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΕΙΡΑΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Έστω

$$20.52 \quad y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + \dots$$

τότε

$$20.53 \quad x = C_1y + C_2y^2 + C_3y^3 + C_4y^4 + C_5y^5 + C_6y^6 + \dots$$

όπου

$$20.54 \quad c_1C_1 = 1$$

$$20.55 \quad c_1^3C_2 = -c_2$$

$$20.56 \quad c_1^5C_3 = 2c_2^2 - c_1c_3$$

$$20.57 \quad c_1^7C_4 = 5c_1c_2c_3 - 5c_2^3 - c_1^2c_4$$

$$20.58 \quad c_1^9C_5 = 6c_1^2c_2c_4 + 3c_1^2c_3^2 - c_1^3c_5 + 14c_2^4 - 21c_1c_2^2c_3$$

$$20.59 \quad c_1^{11}C_6 = 7c_1^3c_2c_5 + 84c_1c_2^3c_3 + 7c_1^3c_3c_4 - 28c_1^2c_2c_3^2 - c_1^4c_6 - 28c_1^2c_2^2c_4 - 42c_2^5$$

ΣΕΙΡΑ TAYLOR ΓΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

$$20.60 \quad f(x, y) = f(a, b) + (x-a)f_x(a, b) + (y-b)f_y(a, b) + \frac{1}{2!} \{ (x-a)^2 f_{xx}(a, b) + 2(x-a)(y-b)f_{xy}(a, b) + (y-b)^2 f_{yy}(a, b) \} + \dots$$

όπου $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$, ... είναι οι μερικές παράγωγοι ως προς x, y, \dots υπολογισμένες στα σημεία $x = a, y = b$.