Άσκηση 20

Οι συνιστώσες της ταχύτητας ενός ροϊκού πεδίου είναι $u = -\frac{Q}{2\pi}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + By + C$ και $v = -A\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) + Dx + E$. Για ποιά τιμή της παραμέτρου A η ροή είναι ασυμπίεστη;

Πρέπει $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$:

1) $-\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right] = -\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{\partial u}{\partial x}$

2) $-A\left[\frac{(x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right] = -A\left[\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{\partial v}{\partial y}$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow -\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] - A\left[\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{2\pi}\left[\cancel{\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}}\right] - A\left[\cancel{\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}}\right] = 0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{Q}{2\pi}}$$

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

Άσκηση 21

(α) Ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας για την ροή $u = x^2+3x-4y$ και $v = -2xy-3y$; (β) Υπολογίστε την στροβιλότητα (γ) Υπολογίστε τα σημεία ανακοπής (δ) Βρείτε μία έκφραση για τη ροϊκή συνάρτηση.

(α) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+3x-4y) + \frac{\partial}{\partial y}(-2xy-3y) = 2x+3+(-2x-3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$$

(β) Κατά τον άξονα z ισχύει ότι: $\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy-3y) -$

$- \frac{\partial}{\partial y}(x^2+3x-4y) \Rightarrow \boxed{\omega_z = -2y-4}$ και το πεδίο έχει στροβιλότητα

(γ) Εξ' ορισμού στα σημεία ανακοπής $u=0$ και $v=0$.

Επομένως $v=0 \Rightarrow -2xy-3y=0 \Rightarrow -y(2x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-3/2 \end{cases}$ (1)

Επίσης $u=0 \Rightarrow x^2+3x-4y=0$ (2)

$$(1) \Rightarrow \text{για } y=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} x^2+3x=0 \Rightarrow x(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases} \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow \text{για } x=-\frac{3}{2} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{9}{4}+3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-4y=0 \Rightarrow \frac{9}{4}-\frac{9}{2}-4y=0 \Rightarrow y=-\frac{9}{16} \quad (4)$$

Συνδυάζοντας τις (1), (3) και (4) προκύπτουν τρία σημεία ανακοπής

(i) $(x_0,y_0)=(0,0)$, (ii) $(x_0,y_0)=(-3,0)$ και (iii) $(x_0,y_0)=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{16}\right)$

(δ) Επειδή $u=\frac{\partial\psi}{\partial y} \Rightarrow \psi=\int u\,dy=\int(x^2+3x-4y)\,dy \Rightarrow \psi=x^2y+3xy-2y^2+C(x)$

όπου $C(x)$ μία συνάρτηση του x. Τότε όμως,

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial\psi}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y+3xy-2y^2+C(x)\right)=-2xy-3y-C'(x) \\ \text{όμως } v &= -\frac{\partial\psi}{\partial x}=-2xy-3y \ (\text{από εκφώνηση}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow C'(x)=0 \Rightarrow C(x)\overset{\text{έστω}}{=}0$$

Επομένως $\boxed{\psi=x^2y+3xy-2y^2}$

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

Άσκηση 22

Χρησιμοποιώντας ότι η διατμητική τάση τ_0 σε ένα οριακό στρώμα δίνεται από τη σχέση $\tau_0 = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho u (V_\infty - u)\,dy$, υπολογίστε το πάχος του οριακού στρώματος αν $u = V_\infty\left(2\frac{y}{\delta} - 2\frac{y^3}{\delta^3} + \frac{y^4}{\delta^4}\right)$.

Έστω ότι: $A = 2\frac{y}{\delta} - 2\frac{y^3}{\delta^3} + \frac{y^4}{\delta^4} \Rightarrow u = V_\infty \cdot A$ και αντικαθιστώντας

$$\tau_0 = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho V_\infty A (V_\infty - V_\infty \cdot A)\,dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho V_\infty^2 A(1-A)\,dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_0 = \rho V_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta A(1-A)\,dy.$$

Οι πράξεις στο ολοκλήρωμα είναι απλές και αφήνονται στο αναγνώστη. Βρίσκουμε τότε ότι:

$$\tau_0 = \rho V_\infty^2 \cdot 0{,}1175 \frac{\partial \delta}{\partial x} \Rightarrow \tau_0 = 0{,}1175\, \rho V_\infty^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad (1)$$

Από τη σχέση του Νεύτωνα επίσης γνωρίζουμε ότι:

$$\tau_0 = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \mu \frac{\partial}{\partial y}\left[V_\infty \left(2\frac{y}{\delta} - 2\frac{y^3}{\delta^3} + \frac{y^4}{\delta^4}\right)\Big|_{y=0}\right] =$$

$$= \mu U_\infty \left(\frac{2}{\delta} - \frac{6y^2}{\delta^3} + \frac{4y^3}{\delta^4}\right)\Bigg|_{y=0} \Rightarrow \tau_0 = \frac{2\mu U_\infty}{\delta} \quad (2)$$

Επομένως,

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow 0{,}1175\,\rho U_\infty^{\cancel{2}} \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{2\mu \cancel{U_\infty}}{\delta} \Rightarrow \frac{\partial \delta}{\partial x} = 17{,}02 \frac{\mu}{\rho U_\infty \delta} \Rightarrow$$

$$\overset{\frac{\mu}{\rho}=\nu}{\Rightarrow} \frac{d\delta}{dx} = 17{,}02 \frac{\nu}{U_\infty \delta} \Rightarrow \delta\, d\delta = 17{,}02 \frac{\nu}{U_\infty} dx \Rightarrow \int_0^\delta \delta' d\delta' = 17{,}02 \frac{\nu}{U_\infty} \int_0^x dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\delta^2 = 17{,}02 \frac{\nu}{U_\infty} \cdot x \Rightarrow \delta = 5{,}83 \frac{\nu x}{U_\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = 5{,}83 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}}$$

Άσκηση 23

Λύστε την άσκηση 22 ξανά εάν η κατανομή της ταχύτητας στο οριακό στρώμα δίνεται από την σχέση

$$u = U_\infty \left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right).$$

Η προσέγγιση λύσης είναι ακριβώς η ίδια. Ο προσεκτικός επομένως αναγνώστης λύνοντας το πρόβλημα θα βρη ότι:

$$\boxed{\delta = 5{,}48\,\frac{x}{\sqrt{Re_x}}}$$