UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ

2

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΤΖΙΡΑΚΗΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

Άσκηση 1

Ένα ασυμπίεστο ροϊκό πεδίο έχει $u = xz^3$ και $w = xe^{-y}$. Ποιά είναι η μορφή της συνιστώσας v?

Για ασυμπίεστο ρευστό $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(xz^3) + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(xe^{-y}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z^3 + \frac{\partial v}{\partial y} + 0 = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -z^3 \Rightarrow \boxed{v = -z^3 y + f(x,z)}$$

Άσκηση 2

Ένα ασυμπίεστο πεδίο ταχύτητας έχει $u = a(x^2 - y^2)$, $v =$ άγνωστο και $w = b$, όπου a και b σταθερές. Ποια πρέπει να είναι η μορφή της συνιστώσας v?

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow a\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} b = 0 \Rightarrow 2ax + \frac{\partial v}{\partial y} + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -2ax \Rightarrow \boxed{v = -2axy + f(x,z)}$$

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

Άσκηση 3

Μία διαστηματική δισδιάστατη ροή δίνεται από τις σχέσεις $u = \upsilon\left(\frac{3y}{ax} - \frac{y^2}{a^2x^2}\right)$ και v = άγνωστο με υ, a σταθερές. Βρείτε μία έκφραση για την v συνιστώσα της ταχύτητας θεωρώντας ότι $v = 0$ για $y = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\upsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3y}{ax} - \frac{y^2}{a^2x^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\upsilon\left(-\frac{3y}{ax^2} + \frac{2y^2}{a^2x^3}\right) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \upsilon\left(\frac{3y}{ax^2} - \frac{2y^2}{a^2x^3}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow v = \upsilon\left(\frac{3y^2}{2ax^2} - \frac{2y^3}{3a^2x^3}\right) + f(x). \\ \text{όμως } v(x,0) = 0 \Rightarrow \upsilon(0-0) + f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \upsilon\left(\frac{3y^2}{2ax^2} - \frac{2y^3}{3a^2x^3}\right)}$$

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

Άσκηση 4

Ελέγξτε αν το διανυσματικό πεδίο $\vec{v} = 3t\hat{i} + xz\hat{j} + ty^2\hat{k}$ είναι ασυμπίεστο ή/και αστρόβιλο.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(3t) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(ty^2) \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 : \text{ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΟ}$$

Επίσης

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3t & xz & ty^2 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(ty^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(ty^2) - \frac{\partial}{\partial z}(3t)\right] +$$

$$+\hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(3t)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{v} = \hat{i}(2ty - x) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(z-0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{v} = (2ty - x)\hat{i} + z\hat{k} : \text{ΣΤΡΟΒΙΛΟ ΠΕΔΙΟ.}$$

Το πεδίο επομένως αυτό είναι ασυμπίεστο αλλά όχι αστρόβιλο.

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

Άσκηση 5

Χρησιμοποιήστε το πεδίο ταχύτητας (σε m/s) $\vec{v} = 6x^2y\,\hat{i} - (4x-4z)\hat{j} + 12z^2\hat{k}$ για να υπολογίσετε την γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ (σε rad/s).

Χρησιμοποιώντας ότι: $\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$, $\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$ και $\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

Προκύπτει,

$$\left.\begin{aligned}
&\bullet\ \omega_x = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}(12z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(-4x+4z)\right] = \frac{1}{2}(0-4) = -2\\
&\bullet\ \omega_y = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}(6x^2y) - \frac{\partial}{\partial x}(12z^2)\right] = \frac{1}{2}(0-0) = 0\\
&\bullet\ \omega_z = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-4x+4z) - \frac{\partial}{\partial y}(6x^2y)\right] = \frac{1}{2}(-4-6x^2) = -(2+3x^2)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = -2\hat{i} - (2+3x^2)\hat{k}}$$

Άσκηση 6

Μία δισδιάστατη πηγή διπόλου στην αρχή των αξόνων δημιουργεί μόνιμη και ασυμπίεστη ροή με ροϊκή συνάρτηση

$$\psi = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Βρείτε την γωνία ενός ροϊκού στοιχείου στη θέση $x=6,\ y=9$ που σχηματίζει το ροϊκό αυτό στοιχείο με τον θετικό άξονα των x.

Κατά μήκος μίας ροϊκής συνάρτησης ισχύει ότι $\psi =$ σταθερό ή $d\psi = 0$.

Δηλαδή,

$$d\psi = 0 \Rightarrow \frac{(x^2+y^2)\,dy - y\left(2x\,dx + 2y\,dy\right)}{(x^2+y^2)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2)\,dy - 2xy\,dx - 2y^2\,dy = 0 \Rightarrow (x^2-y^2)\,dy - 2xy\,dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2} \underset{y=9}{\overset{x=6}{=}} \frac{2\cdot 6\cdot 9}{6^2-9^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2{,}4$$

Επομένως $\tan\theta = \frac{dy}{dx} = -2{,}4 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-2{,}4) \Rightarrow \boxed{\theta = -67{,}4^\circ}$

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

Άσκηση 7

Ένα πεδίο ταχύτητας δίνεται από την σχέση $u = V\cos\theta$, $v = V\sin\theta$ και $w = 0$, όπου V και θ σταθερές. Βρείτε μία εξίσωση για τις αντίστοιχες γραμμές ροής.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dx}{V\cos\theta} = \frac{dy}{V\sin\theta} \overset{V\neq 0}{\Rightarrow} \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy = \tan\theta \, dx \Rightarrow y = \tan\theta \cdot x + C.$$

Οι γραμμές ροής επομένως είναι ευθείες γραμμές που σχηματίζουν σταθερή γωνία θ με τον άξονα των x.

Άσκηση 8

Το μοντέλο ενός αεροπλάνου είναι φτιαγμένο με κλίμακα 1:20. Αν το πρωτότυπο είναι σχεδιασμένο να πετάει με ταχύτητα 700 km/hr, ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα του αέρα σε μία αεροσήραγγα για να επιτευχθεί ο ίδιος αριθμός Re στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας;

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

Προφανώς,

$$Re_{πρ.} = Re_{μ.} \Rightarrow \frac{\rho V_{πρ.} L_{πρ.}}{\mu} = \frac{\rho V_{μ} L_{μ}}{\mu} \Rightarrow V_{πρ.} L_{πρ.} = V_{μ.} L_{μ.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{μ} = V_{πρ.} \frac{L_{πρ.}}{L_{μ}} = 700 \frac{km}{hr} \cdot 20 \Rightarrow \boxed{V_{μ.} = 14000 \frac{km}{hr}}$$

Η ταχύτητα αυτή είναι πρακτικά αδύνατη να επιτευχθεί.

Άσκηση 9

Γράψτε μία εξίσωση για την απόσταση που διανύει ένα σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση για χρόνο t, υποθέτοντας ότι αυτή εξαρτάται από το βάρος του σώματος, την επιτάχυνση της βαρύτητας και τον χρόνο.

Έστω ότι η απόσταση h γράφεται: $h = f(B, g, t)$, όπου f μία συνάρτηση.

Τότε,

$$[h] \propto B^a g^b t^c \Rightarrow M^0 L^1 T^0 \propto (MLT^{-2})^a \cdot (LT^{-2})^b \cdot T^c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M^0 L^1 T^0 \propto M^a L^a T^{-2a} \cdot L^b T^{-2b} T^c \Rightarrow L^1 \propto M^a L^{a+b} T^{c-2a-2b} \Rightarrow$$

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = a \\ 1 = a - b \\ 0 = c - 2a - 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ 0 = c - 0 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 2. \end{cases}$$

Τελικά $\boxed{h \propto g t^2}$

Άσκηση 10

Λύστε την άσκηση 9 χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Π του Buckingham.

Γράφουμε τις διαστάσεις των μεταβλητών.

$$\left.\begin{array}{l} [h] = L^1 \\ [B] = M^1 L^1 T^{-2} \\ [g] = L^1 T^{-2} \\ [t] = T^1 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{το } L]{\text{απαλείφουμε}} \left.\begin{array}{l} \left[\frac{g}{h}\right] = T^{-2} \\ [t] = T^1 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{το } T]{\text{απαλείφουμε}} \left[t \cdot \sqrt{\frac{g}{h}}\right] = M^0 L^0 T^0.$$

Για την μοναδική Π-ομάδα του προβλήματος προκύπτει τότε:

$$\Pi = t\sqrt{\frac{g}{h}} \Rightarrow \boxed{h = C g t^2}, \text{ όπου } C \text{ μια σταθερά.}$$

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

Άσκηση 11

Υποθέτοντας ότι η ισχύς μίας αντλίας είναι συνάρτηση του ειδικού βάρους γ της παροχής Q, και του ύψους H στο οποίο ανεβάζει το ρευστό, βρείτε μία εξίσωση που συνδέει όλα τα παραπάνω μεγέθη με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης.

Επειδή $P = f(\gamma, Q, H)$ έχουμε

$$[P] \propto \gamma^a Q^b H^c \Rightarrow ML^2T^{-3} \propto (ML^{-2}T^{-2})^a \cdot (L^3T^{-1})^b \cdot L^c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ML^2T^{-3} \propto M^a L^{-2a} T^{-2a} \cdot L^{3b} T^{-b} \cdot L^c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ML^2T^{-3} \propto M^a L^{-2a+3b+c} T^{-2a-b} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a \\ 2 = -2a+3b+c \\ -3 = -2a-b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = a \\ 2 = -2+3b+c \\ -3 = -2-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 4 = 3b+c \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$ δίνοντας τελικά

$$\boxed{P \propto \gamma Q H}$$

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

Άσκηση 12

Λύστε την άσκηση 11 χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Π του Buckingham.

$$\left.\begin{aligned}[P] &= ML^2T^{-3}\\ [\gamma] &= ML^{-2}T^{-2}\\ [Q] &= L^3T^{-1}\\ [H] &= L^1\end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{το } L]{\text{απαλείφουμε}} \left.\begin{aligned}\left[\frac{P}{H^2}\right] &= MT^{-3}\\ [\gamma H^2] &= MT^{-2}\\ \left[\frac{Q}{H^3}\right] &= T^{-1}\end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{το } M]{\text{απαλείφουμε}}$$

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\gamma H^4}{P}\right] &= T^1\\ \left[\frac{Q}{H^3}\right] &= T^{-1}\end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{το } T]{\text{απαλείφουμε}} \left[\frac{\gamma H Q}{P}\right] = M^0L^0T^0$$

Για την μοναδική Π-ομάδα του προβλήματος προκύπτει ότι:

$$\Pi = \frac{\gamma H Q}{P} \Rightarrow \boxed{P = C\cdot \gamma H Q}\ ,$$ όπου C μία σταθερά.

Άσκηση 13

Μια ασυμπίεστη ροή περιγράφεται από το πεδίο ταχύτητας $\vec{V} = x^2\hat{i} - z^2\hat{j} - 3xz\hat{k}$. Αν το δυναμικό ιξώδες του ρευστού ισούται με 0,04 υπολογίστε τον τανυστή τάσης στο σημείο $(x,y,z) = (3,2,1)$. Όλα τα μεγέθη είναι εκφρασμένα στο διεθνές σύστημα μονάδων.

Γνωρίζουμε ότι: $\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$, όπου

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = 4\mu x, \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = -6\mu x$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = -2\mu z$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = -3\mu z.$$

Στο σημείο λοιπόν $(x,y,z) = (3,2,1)$ και $\mu = 0,04$ προκύπτει:

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} 0,48 & 0 & -0,12 \\ 0 & 0 & -0,08 \\ -0,12 & -0,08 & -0,72 \end{bmatrix} \text{ σε Pascal.}$$

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

Άσκηση 14

Σχεδιάστε τις γραμμές ροής για $y \geq 0$ για μία ροή που περιγράφεται από την ροϊκή συνάρτηση $\psi = 1,6x^2 + y^2$ και υπολογίστε την ταχύτητα στο σημείο $x=3$ και $y=4$.

Ισχύει ότι: $u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \Rightarrow u = 2y$ και $v = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = -3,2x$.

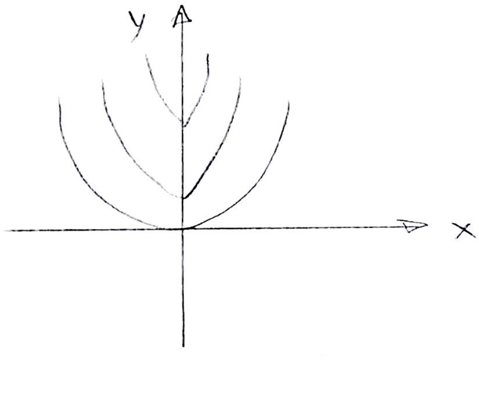
Στο σημείο $(x,y) = (3,4)$ τότε $(u,v) = (2\cdot 4, -3,2\cdot 3) \Rightarrow (u,v) = (8, -9,6)$

με αντίστοιχο μέτρο ταχύτητας $V = (u^2+v^2)^{1/2} \Rightarrow V = (8^2 + 9,6^2)^{1/2} \Rightarrow V = 12,5$ m/s.

Για να υπολογίσουμε τις γραμμές ροής έχουμε

$$\psi = 1,6x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{\psi - 1,6x^2}.$$

Θέτοντας σταθερές τιμές για την ροϊκή συνάρτηση ψ προκύπτουν οι αντίστοιχες γραμμές ροής σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα.



Άσκηση 15

Μια ροή ορίζεται από τις σχέσεις $u = 2x$ και $v = -2y$. Βρείτε την ροϊκή συνάρτηση και το δυναμικό ταχύτητας και σχεδιάστε το δίκτυο ροής.

Το παραπάνω πεδίο ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας αφού

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y) = 2 - 2 = 0$$

και είναι αστρόβιλο αφού $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - 0 = 0$.

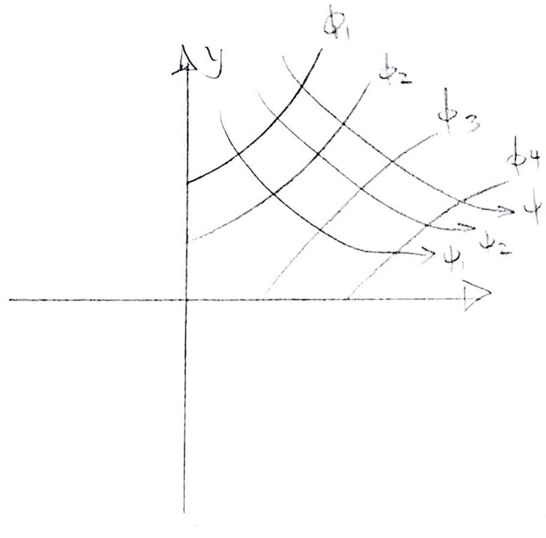
Τότε $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v\,dx + u\,dy \Rightarrow d\psi = 2y\,dx + 2x\,dy \Rightarrow$

$\Rightarrow \psi = 2xy + C$, C σταθερά.

Ομοίως $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = u\,dx + v\,dy \Rightarrow d\phi = 2x\,dx - 2y\,dy \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi = (x^2 - y^2) + c'$, c' σταθερά.

Το δίκτυο ροής φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

Άσκηση 16

Μία τετράγωνη λεπτή πλάκα πλευράς 1,2 m κρατείται παράλληλη σε ένα ρεύμα αέρα ταχύτητας 3m/s. Υπολογίστε (α) τη δύναμη αντίστασης τριβής που ασκείται στην πλάκα από τον αέρα, (β) το πάχος του οριακού στρώματος στο κατάντη της πλάκας και (γ) την διατμητική τάση στην ίδια θέση.

α) Αρχικά υπολογίζουμε την μέγιστη τιμή του αριθμού Re (στην άκρη της πλάκας).

$$Re = \frac{U \cdot L}{\nu} = \frac{3\frac{m}{s} \cdot 1{,}2m}{1{,}486 \cdot 10^{-5}\frac{m^2}{s}} \Rightarrow Re = 242000 < 5 \cdot 10^5 : \text{στρωτή ροή.}$$

έστω $\nu = 1{,}486 \cdot 10^{-5}\frac{m^2}{s}$

Η αντίστοιχη δύναμη τότε ισούται με $D = 0{,}6642 \cdot b\left(U_\infty^3 \mu \rho L\right)^{1/2} =$

$$= 0{,}6642 \cdot b\left(U_\infty^3 \cdot \nu \rho^2 L\right)^{1/2} = 0{,}6642 \cdot 1{,}2\left(3^3 \cdot 1{,}486 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}125^2 \cdot 1{,}2\right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{D = 0{,}02\ N}$$

(β) Το πάχος του οριακού στρώματος στο κατάντη άκρο της πλάκας ισούται με

$$\delta = 5\frac{x}{Re_x^{1/2}} = 5 \cdot \frac{1{,}2}{(242000)^{1/2}} \Rightarrow \boxed{\delta = 0{,}0122\ m}$$

(γ) Η διατμητική τάση τέλος είναι: $\tau_o = 0{,}3321 \dfrac{\mu V_\infty}{x} (Re_x)^{1/2} =$

$$= 0{,}3321 \cdot \frac{(1.8\times10^{-5})\cdot 3}{1{,}2} (242000)^{1/2} \Rightarrow \boxed{\tau_o = 0{,}0074\ Pa}$$

Άσκηση 17

Ακατέργαστο έλαιο $\nu = 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$ και $\rho = 860\ \frac{kg}{m^3}$ ρέει με $V_\infty = 0{,}3\ \frac{m}{s}$ ρέει διαμέσου λεπτής επίπεδης πλάκας πλάτους 1,2m και μήκους 1,8m. Αν η ροή θεωρηθεί στρωτή βρείτε εκφράσεις για το πάχος του οριακού στρώματος και την κατανομή της διατμητικής τάσης.

Το πάχος του οριακού στρώματος $\delta = \dfrac{5x}{Re_x^{1/2}}$

όπου $Re_x = \dfrac{U_\infty x}{\nu} = \dfrac{0{,}3\cdot x}{10^{-5}} \Rightarrow Re_x = 3\cdot10^4 x$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = 8{,}66\cdot10^{-2}\sqrt{x}\ m}$$

Η δε διατμητική τάση είναι

$$\tau_o = 0{,}3321 \frac{\mu U_\infty}{x} Re_x^{1/2} = 0{,}3321\cdot\frac{(8{,}58\cdot10^{-3})\cdot 0{,}3}{x}(3\cdot10^4 x)^{1/2} \Rightarrow \boxed{\tau_o = \frac{0{,}493}{\sqrt{x}}\ Pa}$$

όπου $\mu = \nu\cdot\rho = 10^{-5}\cdot 860 \Rightarrow \mu = 8{,}58\cdot10^{-3}\ Pa\cdot s$

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

Άσκηση 18

Αέρας ρέει παράλληλα πάνω από πλάκα με ταχύτητα 30 m/s. Το οριακό στρώμα είναι αρχικά στρωτό και έπειτα γίνεται τυρβώδες για $Re = 5 \cdot 10^5$. Η πλάκα έχει μήκος 3m και πλάτος 1m. Με τι ισούται ο μέσος συντελεστής διατμητικής τάσης; Ποιά είναι η συνολική διατμητική αντίσταση στη μία πλευρά της πλάκας; Ποια η συνεισφορά του στρωτού και του τυρβώδους οριακού στρώματος στη συνολική διατμητική αντίσταση;

Αν υποθέσουμε ότι $\nu = 1{,}51 \cdot 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$ και $\rho = 1{,}2\ \frac{kg}{m^3}$ τότε,

για $Re = 5 \cdot 10^5$

$$C_f = 0{,}072 \left(\frac{\nu}{U_\infty L}\right)^{1/5} - K\left(\frac{\nu}{U_\infty L}\right) = 0{,}072\left(\frac{1{,}51 \cdot 10^{-5}}{30 \cdot 3}\right)^{1/5} - 1700\left(\frac{1{,}51 \cdot 10^{-5}}{30 \cdot 3}\right) =$$

$$= 0{,}072 \cdot 0{,}044 - 1700 \cdot 1{,}68 \cdot 10^{-7} \Rightarrow \boxed{C_f = 0{,}00289}$$

Η συνολική διατμητική δύναμη ισούται με:

$$D = C_f \cdot \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A = 0{,}00289 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 30^2 \cdot (3 \cdot 1) \Rightarrow \boxed{D = 4{,}68\ N}$$

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε το σημείο πάνω στην πλάκα όπου το οριακό στρώμα από στρωτό γίνεται τυρβώδες.

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

Α) X_k η θέση της πλάκας στην οποία γίνεται η μετάβαση,

$$\frac{U_\infty X_k}{\nu} = 5\cdot 10^5 \Rightarrow X_k = 5\cdot 10^5 \cdot \frac{1,51\cdot 10^{-5}}{30} \Rightarrow X_k = 0,252\,m$$

Για $0 \leq X \leq 0,252\,m$ επομένως το στρώμα είναι στρωτό με συντελεστή διατμητικής τάσης

$$C_{f,\sigma} = \frac{0,6642}{R_k^{1/2}} = \frac{0,6642}{500.000^{1/2}} \Rightarrow C_{f,\sigma} = 0,00094$$

και αντίστοιχη δύναμη λόγω του στρωτού οριακού στρώματος, F_σ, ίση με

$$F_\sigma = C_{f,\sigma} \cdot \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A = 0,00094 \cdot 0,5 \cdot 1,2 \cdot 30^2 \cdot \underbrace{(3\cdot 0,252)}_{A = b\cdot X_k} =$$

$$\Rightarrow \boxed{F_\sigma = 0,48\,N}$$

Η συνεισφορά τέλος του τυρβώδους οριακού στρώματος στη συνολική διατμητική δύναμη D ισούται με,

$$F_\tau = D - F_\sigma = 4,68 - 0,48 \Rightarrow \boxed{F_\tau = 4,2\,N}$$

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

Άσκηση 19

Έστω λεπτή πλάκα 1m πλάτους και 2m μήκους στην οποία ρέει νερό ταχύτητας $V_\infty = 0{,}1\,m/s$. Υπολογίστε τις μέγιστες τιμές των παχών των οριακών στρωμάτων και στην οπισθέλκουσα δύναμη που ασκείται στην πλάκα.

Θεωρούμε ότι $\nu = 10^{-6}\,\frac{m^2}{s}$ και $\rho = 1000\,\frac{kg}{m^3}$.

Για $L = 2m$ έχουμε ότι: $Re_L = \frac{V_\infty \cdot L}{\nu} = \frac{0{,}1\,\frac{m}{s}\cdot 2m}{10^{-6}\,\frac{m^2}{s}} \Rightarrow Re_L = 2\cdot 10^5 < 5\cdot 10^5$.

Το οριακό στρώμα τότε θεωρείται στρωτό και οι υπολογισμοί των παχών γίνεται ως εξής:

- $\delta_{x=L} = 5\cdot \frac{L}{\sqrt{Re_L}} = 5\cdot \frac{2m}{(2\cdot 10^5)^{1/2}} \Rightarrow \boxed{\delta_{x=L} = 0{,}0224\,m}$

- $\delta_{1\,x=L} = 1{,}7208\cdot \frac{L}{\sqrt{Re_x}} = 1{,}7208\cdot \frac{2m}{(2\cdot 10^5)^{1/2}} \Rightarrow \boxed{\delta_{1\,x=L} = 0{,}0077\,m}$

- $\delta_{2\,x=L} = 0{,}664\,\frac{L}{\sqrt{Re_x}} = 0{,}664\cdot \frac{2m}{(2\cdot 10^5)^{1/2}} \Rightarrow \boxed{\delta_{2\,x=L} = 0{,}00297\,m}$

Τέλος η οπισθέλκουσα δύναμη ισούται με:

UNIVERSITY AT BUFFALO
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK

Office of Financial Aid to Students
Hayes Annex C
Buffalo, New York 14214
(716) 831-3724

College Work Study Office
232 Capen Hall
Buffalo, New York 14260
(716) 636-3067

$$D = 0{,}6642\, b \sqrt{v_\infty^3 \mu \rho L} =$$

$$= 0{,}6642 \cdot 1 \cdot \left(0{,}1^3 \cdot \cancel{10^{-3}} \cdot \cancel{1000} \cdot 2\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{D = 0{,}03\ N}$$