

# Εισαγωγή στις βασικές έννοιες της μηχανικής ρευστών

Κωνσταντίνος Τζιράκης



# Εισαγωγή στις βασικές έννοιες της μηχανικής ρευστών

Κωνσταντίνος Τζιράκης

Κωνσταντίνος Τζιράκης, 2025.

*Εισαγωγή στις βασικές έννοιες της μηχανικής ρευστών*

© 2025,

Κωνσταντίνος Τζιράκης

ISBN: 000-0-000000-00-0 (Digital)

000-0-000000-00-0 (Hardcover)

000-0-000000-00-0 (Softcover)

**Απαγορεύεται η ολική ή μερική αναπαραγωγή του βιβλίου με οποιοδήποτε ηλεκτρονικό ή μη μέσο χωρίς την έγγραφη άδεια του συγγραφέα.**

*Το βιβλίο αυτό αφιερώνεται  
στα παιδιά μου Σήφη, Λευτέρη  
και στους γονείς μου Ιωσήφ, Ελευθερία.*



---

---

## Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ</b>	<b>1</b>
1.1	Εισαγωγή . . . . .	1
1.2	Εξίσωση συνέχειας . . . . .	1
1.2.1	Διαφορική διατύπωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες .	1
1.2.2	Διαφορική διατύπωση σε κυλινδρικές συντεταγμένες .	4
1.2.3	Ολοκληρωτική διατύπωση . . . . .	6
1.2.4	Εφαρμογές . . . . .	7
	1.2.4.1 Υπολογισμός παροχής . . . . .	7
	1.2.4.2 Ασυμπίεστη ροή . . . . .	9
1.3	Εξισώσεις ορμής (Navier-Stokes) . . . . .	9
1.3.1	Διαφορική διατύπωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες .	9
1.3.2	Νευτώνεια ρευστά . . . . .	14
1.3.3	Γενικευμένα Νευτώνεια ρευστά . . . . .	16
1.3.4	Ο τανυστής των τάσεων . . . . .	18
1.3.5	Εξισώσεις Navier-Stokes: εφαρμογές . . . . .	21
	1.3.5.1 Μέτρηση πίεσης με χρήση βαρόμετρου . . . .	21
	1.3.5.2 Μόνιμη ροή μεταξύ ακίνητων παράλληλων πλακ- κών . . . . .	22
	1.3.5.3 Μόνιμη ροή μεταξύ κινούμενων παράλληλων πλακών . . . . .	26
	1.3.5.4 Μόνιμη ροή σε ευθύγραμμο κυλινδρικό αγωγό	28
	1.3.5.5 Μόνιμη ροή μεταξύ ομόκεντρων περιστρεφό- μενων κυλίνδρων . . . . .	31
	1.3.5.6 Μόνιμη ροή εκθετικού ρευστού μεταξύ ακίνητων παράλληλων πλακών . . . . .	35
1.4	Εξίσωση Bernoulli . . . . .	36
1.4.1	Για αστρόβιλη ροή . . . . .	36
1.4.2	Κατά μήκος μίας γραμμής ροής . . . . .	39

## Περιεχόμενα

1.4.3	Περιορισμοί της εξίσωσης Bernoulli . . . . .	41
1.4.4	Εφαρμογές . . . . .	42
1.4.4.1	Σωλήνας Pitot . . . . .	42
1.4.4.2	Μετάγχιση ροής . . . . .	43
1.4.4.3	Διάμετρος πίδακα σε εκκένωση δεξαμενής . .	44
1.4.4.4	Υπολογισμός παροχής - ροόμετρο Ventouri .	45
1.4.4.5	Υπολογισμός χρόνου εκκένωσης δεξαμενής .	47
1.5	Εξίσωση διατήρησης της ενέργειας . . . . .	49
1.5.1	Απόδειξη της εξίσωσης διατήρησης της ενέργειας . . .	49
1.5.2	Εξίσωση ενέργειας: εφαρμογές . . . . .	53
1.5.2.1	Ενεργειακή ανάλυση μόνιμων ροών . . . . .	53
1.5.2.2	Ο διορθωτικός συντελεστής της κινητικής ενέργειας, $\alpha$ . . . . .	55
1.5.2.3	Τιμή του διορθωτικού συντελεστή $\alpha$ για στρωτή ροή σε σωλήνα . . . . .	57
1.6	Θεώρημα του Kelvin . . . . .	58
1.7	Εξίσωση στροβιλότητας . . . . .	60
1.8	Εξίσωση του Crocco . . . . .	62
1.8.1	Στοιχεία θερμοδυναμικής . . . . .	62
1.8.1.1	Νόμοι της θερμοδυναμικής . . . . .	62
1.8.1.2	Έργο και ενθαλπία . . . . .	64
1.8.2	Απόδειξη της εξίσωσης του Crocco . . . . .	65
1.9	Λυμένα παραδείγματα . . . . .	66
<b>2</b>	<b>ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ</b>	<b>85</b>
2.1	Εισαγωγή . . . . .	85
2.2	Διαστατική ανάλυση . . . . .	86
2.2.1	Μέθοδος Rayleigh . . . . .	87
2.2.2	Μέθοδος Buckingham . . . . .	90
2.3	Συνήθεις αδιάστατες ομάδες . . . . .	92
2.4	Ομοιότητα . . . . .	94
2.5	Ο αριθμός Reynolds . . . . .	98
2.5.1	Αναλυτική περιγραφή . . . . .	98
2.5.2	Φυσική ερμηνεία . . . . .	100
2.6	Αδιαστατοποίηση και κανονικοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes . . . . .	101
2.6.1	Έρπουσες ροές . . . . .	105
2.6.2	Μη συνεκτική ροή . . . . .	106

2.7	Λυμένα παραδείγματα . . . . .	106
<b>3</b>	<b>ΑΠΩΛΕΙΕΣ ΡΟΗΣ</b>	<b>119</b>
3.1	Εισαγωγή . . . . .	119
3.2	Συνεχείς απώλειες . . . . .	120
3.2.1	Η εξίσωση των Darcy-Weisbach . . . . .	120
3.2.2	Η εξίσωση των Hazen-Williams . . . . .	122
3.2.3	Ο συντελεστής τριβής . . . . .	123
3.2.3.1	Τραχύτητα αγωγού . . . . .	123
3.2.3.2	Εξισώσεις που περιγράφουν το συντελεστή τριβής . . . . .	124
3.2.3.3	Διάγραμμα Moody . . . . .	126
3.3	Τοπικές απώλειες . . . . .	128
3.4	Συνολικές απώλειες και παράλληλη σύνδεση . . . . .	130
3.5	Σύνδεση σωλήνων σε σειρά . . . . .	132
3.6	Λυμένα παραδείγματα . . . . .	133
<b>4</b>	<b>ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ</b>	<b>147</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	147
4.2	Βασικές εξισώσεις οριακού στρώματος . . . . .	148
4.3	Στρωτό οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα . . . . .	152
4.3.1	Πάχος . . . . .	152
4.3.2	Πάχος μετατόπισης . . . . .	156
4.3.3	Πάχος ορμής . . . . .	158
4.3.4	Πάχος ενέργειας . . . . .	159
4.3.5	Διατμητική τάση . . . . .	160
4.4	Εξίσωση ορμής von Kármán . . . . .	161
4.5	Οι σταθμισμένες κατά Reynolds εξισώσεις Navier-Stokes . . . . .	164
4.6	Τυρβώδες οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα . . . . .	167
4.6.1	Δομή του τυρβώδους οριακού στρώματος . . . . .	168
4.6.2	Η κατανομή της ταχύτητας . . . . .	169
4.6.3	Πάχος . . . . .	172
4.6.4	Πάχος μετατόπισης και πάχος ορμής . . . . .	174
4.6.5	Διατμητική τάση . . . . .	175
4.7	Λυμένα παραδείγματα . . . . .	176
<b>5</b>	<b>ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ</b>	<b>185</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	185
5.2	Ταχύτητα του ήχου . . . . .	186

## Περιεχόμενα

5.3	Γραμμές Mach και κώνος Mach . . . . .	189
5.4	Φαινόμενο Doppler . . . . .	191
5.5	Ισεντροπική ροή ιδανικού αερίου . . . . .	193
5.5.1	Επίδραση διατομής αγωγού . . . . .	193
5.5.2	Μεγέθη ανακοπής και ο αριθμός Mach . . . . .	196
5.5.2.1	Ενθαλπία ανακοπής . . . . .	196
5.5.2.2	Θερμοκρασία ανακοπής . . . . .	197
5.5.2.3	Πίεση ανακοπής . . . . .	198
5.5.2.4	Πυκνότητα ανακοπής . . . . .	198
5.5.3	Μεγέθη ανακοπής και κρίσιμα μεγέθη . . . . .	199
5.5.4	Ακροφύσιο de Laval . . . . .	200
5.6	Κρουστικά κύματα . . . . .	203
5.6.1	Κάθετα κρουστικά κύματα . . . . .	203
5.6.2	Πλάγια κρουστικά κύματα . . . . .	206
5.7	Μονοδιάστατη συμπίεστη ροή με μεταφορά θερμότητας ή με απώλειες . . . . .	208
5.7.1	Ροή Rayleigh . . . . .	209
5.7.2	Ροή Fanno . . . . .	212
5.8	Λυμένα παραδείγματα . . . . .	217
	<b>Βιβλιογραφία</b> . . . . .	<b>231</b>
	Ευρετήριο . . . . .	233

---

## ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

### 1.1 Εισαγωγή

---

Όταν σε ένα ρευστό ασκούνται δυνάμεις ή το ενεργειακό περιεχόμενό του επηρεάζει την κίνησή του αναφερόμαστε στη *δυναμική των ρευστών*. Χρησιμοποιώντας μεγέθη όπως η μάζα, η πίεση, η διατμητική τάση και το ιξώδες μεταξύ άλλων, θεμελιώνονται οι βασικές εξισώσεις διατήρησης και μελετώνται μερικές από τις πιο χαρακτηριστικές εφαρμογές τους. Συγκεκριμένα, στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας, καθώς και οι εξισώσεις Crocco, στροβιλότητας και το θεώρημα του Kelvin. Γίνεται μία σύντομη αναφορά σε μη Νευτώνεια ρευστά και μελετώνται μόνιμες και ασυμπίεστες ροές σε διάφορες γεωμετρίες.

### 1.2 Εξίσωση συνέχειας

---

#### 1.2.1 Διαφορική διατύπωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες

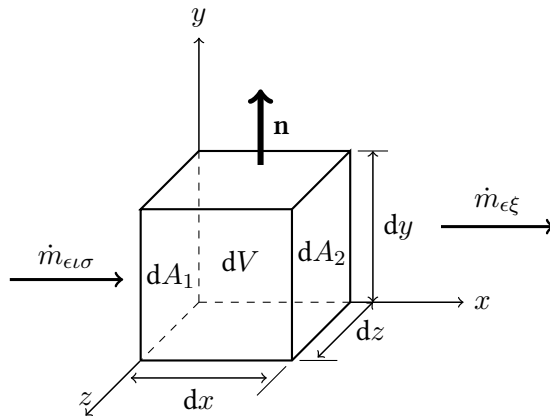
Στην ενότητα αυτή θα διατυπώσουμε τη διαφορική εξίσωση διατήρησης της μάζας κατά τη ροή ενός ρευστού, γνωστή και ως *εξίσωση συνέχειας*. Ας θεωρήσουμε ένα στοιχειώδη όγκο  $dV$  (όγκος ελέγχου) μέσα από τον οποίο διέρχεται ρευστό. Ο όγκος αυτός ορίζεται από μία στοιχειώδη επιφάνεια  $dA$  (επιφάνεια ελέγχου), η οποία με τη σειρά της ορίζεται σε κάθε σημείο της από ένα κάθετο

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

μοναδιαίο διάνυσμα,  $\mathbf{n}$ , με φορά πάντα προς τα έξω. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο όγκος  $dV$  είναι ένας κύβος με πλευρές  $dx$ ,  $dy$  και  $dz$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Η υπόθεση γύρω από την οποία αναπτύσσεται η μαθηματική θεμελίωση της εξίσωσης συνέχειας είναι ότι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η μάζα στο εσωτερικό του υπό μελέτη όγκου θα πρέπει να ισούται με τη διαφορά της μάζας που εισέρχεται σε αυτόν, μείον τη μάζα που εξέρχεται στη μονάδα του χρόνου. Αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν πηγές ή καταβόθρες στο εσωτερικό του όγκου (δηλαδή όλη η μάζα που τον διαρρέει διέρχεται μέσω της συνοριακής επιφάνειας  $dA$ ), η παραπάνω υπόθεση γράφεται

$$d\dot{m}_{ελσ} - d\dot{m}_{εξ} = \frac{\partial m}{\partial t}, \quad (1.1)$$

όπου  $\dot{m}_{ελσ}$  και  $\dot{m}_{εξ}$  οι παροχές μάζας εισόδου και εξόδου από το στοιχειώδη όγκο αντίστοιχα. Η παροχή μάζας μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί και ως



Σχήμα 1.1: Όγκος ελέγχου για τη διαφορική διατύπωση της εξίσωσης συνέχειας.

$$\dot{m} = \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} = \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}A,$$

όπου  $\mathbf{U}$  το διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού. Επομένως το μέγεθος που μας ενδιαφέρει είναι το γινόμενο  $\rho \mathbf{U}$  που έχει μονάδες παροχής μάζας ανά επιφάνεια,  $kg/(sm^2)$ , και εκφράζει την ποσότητα του ρευστού που διέρχεται από μία επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου. Μπορούμε τότε να γράψουμε την παροχή μάζας που εισέρχεται από τη στοιχειώδη επιφάνεια  $dA_1$  ως

$$d\dot{m}_{ελσ} = \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}dA_1, \quad (1.2)$$

καθώς και την αντίστοιχη που εξέρχεται από μία επίσης στοιχειώδη επιφάνεια  $dA_2$  ως

$$d\dot{m}_{εξ} = (\rho + d\rho) (\mathbf{U} + d\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}dA_2. \quad (1.3)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις (1.2) και (1.3) στο ισοζύγιο μάζας (1.1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \rho\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}dA_1 - (\rho + d\rho) (\mathbf{U} + d\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}dA_2 &= \\ \rho\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}dA_1 - \rho\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}dA_2 - \rho d\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}dA_2 - d\rho\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}dA_2 - d\rho d\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}dA_2 &= \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV). \end{aligned}$$

Αμελώντας το διαφορικό δεύτερης τάξης,  $d\rho d\mathbf{U}$ , και θεωρώντας ότι  $dA_1 = dA_2$  έχουμε

$$-\rho d\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}dA - d\rho\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}dA = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) \implies -d(\rho\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}dA = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV). \quad (1.4)$$

Το αριστερό μέλος της Εξίσωσης (1.4) γράφεται σε μορφή συνιστωσών αν παρατηρήσουμε ότι το ρευστό εξέρχεται από τις τρεις επιφάνειες  $dydz$ ,  $dx dz$  και  $dx dy$  με μοναδιαία διανύσματα  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$  και ταχύτητες  $(u, v, w)$  αντίστοιχα δίνοντας

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy dx dz - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz dx dy &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) \implies \\ -\left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dV &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) \implies \\ -\left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] &= \frac{\partial \rho}{\partial t}, \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{U}) = 0. \quad (1.5)$$

Η Εξίσωση (1.5) μπορεί να γραφτεί συναρτηθεί της υλικής παραγώγου της πυκνότητας  $D\rho/Dt$  ως εξής,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{U}) &= \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

και τελικά

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (1.6)$$

Σημειώνεται ότι οι Εξισώσεις (1.5) και (1.6) αποτελούν τη διαφορική διατύπωση της εξίσωσης συνέχειας για συμπιεστό ρευστό (αφού δεν έγινε καμία υπόθεση για την πυκνότητά του και επομένως μπορεί να μεταβάλλεται στο πεδίο ροής). Στην απλή περίπτωση όπου η πυκνότητα του ρευστού είναι σταθερή (ασυμπίεστη ροή), τότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) &= \rho \nabla \cdot \mathbf{U}, \end{aligned}$$

δίνοντας την ακόλουθη εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστη ροή

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (1.7)$$

Το αποτέλεσμα (1.7) αποτελεί την εξίσωση ορισμού της ασυμπίεστης ροής και εκφράζει το γεγονός ότι η απόκλιση της ταχύτητας σε μία τέτοια ροή μηδενίζεται παντού.

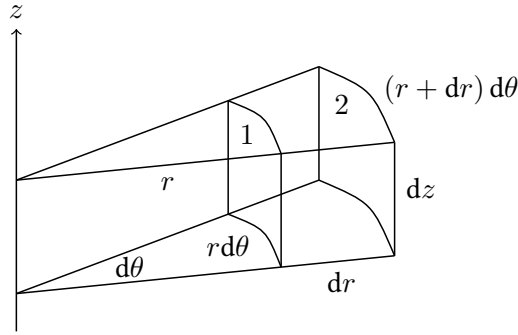
### 1.2.2 Διαφορική διατύπωση σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Παρόλο που η παραπάνω θεώρηση του στοιχειώδους κύβου για τη θεμελίωση της εξίσωσης συνέχειας σε καρτεσιανές συντεταγμένες συναντάται πολύ συχνά στη βιβλιογραφία, δεν αποτελεί τη βέλτιστη επιλογή σε συγκεκριμένες εφαρμογές όπως για παράδειγμα σε ροές που χαρακτηρίζονται από κυλινδρική συμμετρία. Για το λόγο αυτό είναι σημαντικό να εκφράσουμε την εξίσωση συνέχειας ως προς τις κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, z)$ . Στην περίπτωση αυτή ο όγκος ελέγχου δεν είναι τίποτα άλλο από ένα τμήμα κύλινδρου διαστάσεων  $dr, r d\theta$  και  $dz$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2. Όπως και προηγουμένως θα μελετήσουμε την παροχή μάζας που εισέρχεται και εξέρχεται από τον όγκο ελέγχου. Ξεκινώντας από την ακτινική κατεύθυνση και θεωρώντας ότι η μάζα εισέρχεται από την επιφάνεια 1 και εξέρχεται από την επιφάνεια 2 του σχήματος προκύπτει

$$\dot{m}_{\epsilon\iota\sigma,r} = \rho u_r r d\theta dz$$

και

$$\dot{m}_{\epsilon\lambda,r} = \left[ \rho u_r + \frac{\partial (\rho u_r)}{\partial r} dr \right] (r + dr) d\theta dz.$$



Σχήμα 1.2: Όγκος ελέγχου για τη διαφορική διατύπωση της εξίσωσης συνέχειας σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Το ισοζύγιο μάζας επομένως στην ακτινική κατεύθυνση αμελώντας διαφορικά υψηλής τάξης παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_{\epsilon\xi,r} - \dot{m}_{\epsilon\iota\sigma,r} &= \rho u_r r d\theta dz + \rho u_r dr d\theta dz + \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial r} r d\theta dr dz - \rho u_r r d\theta dz \\
 &= \rho u_r dr d\theta dz + \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial r} r d\theta dr dz \\
 &= \frac{\rho u_r}{r} dV + \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial r} dV,
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι ο στοιχειώδης όγκος  $dV = r d\theta dr dz$ . Στην κατεύθυνση  $\theta$  οι αντίστοιχες εκφράσεις για τις παροχές μάζας εισόδου και εξόδου από τις αντίστοιχες επιφάνειες γράφονται

$$\dot{m}_{\epsilon\iota\sigma,\theta} = \rho u_\theta dr dz,$$

και

$$\dot{m}_{\epsilon\xi,\theta} = \left[ \rho u_\theta + \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} d\theta \right] dr dz,$$

δίνοντας

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_{\epsilon\xi,\theta} - \dot{m}_{\epsilon\iota\sigma,\theta} &= \rho u_\theta dr dz + \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} d\theta dr dz - \rho u_\theta dr dz \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} dV.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Τέλος, στη  $z$  κατεύθυνση

$$\dot{m}_{\epsilon\iota\sigma,z} = \rho u_z r d\theta dr$$

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

και

$$\dot{m}_{\epsilon\xi,z} = \left[ \rho u_z + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dz \right] r d\theta dr,$$

με το αντίστοιχο ισοζύγιο στην κατεύθυνση αυτή να ισούται με

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\epsilon\xi,z} - \dot{m}_{\epsilon\iota\sigma,z} &= \rho u_z r d\theta dr + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dz r d\theta dr - \rho u_z r d\theta dr \\ &= \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dV. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Συλλέγοντας τις Εξισώσεις (1.8), (1.9) και (1.10) και αντικαθιστώντας τις στο ισοζύγιο μάζας

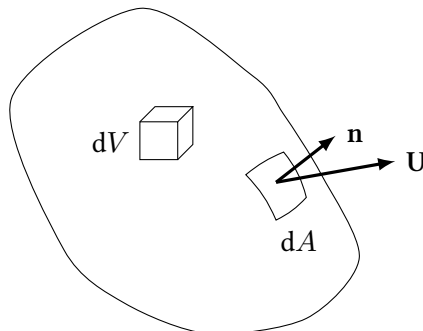
$$\sum_{i=r,\theta,z} \dot{m}_{\epsilon\xi,i} - \sum_{i=r,\theta,z} \dot{m}_{\epsilon\iota\sigma,i} = \frac{\partial m}{\partial t},$$

προκύπτει τελικά η εξίσωση συνέχειας σε κυλινδρικές συντεταγμένες ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \frac{\rho u_r}{r} dV + \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial r} dV + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} dV + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dV &= 0 \implies \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

### 1.2.3 Ολοκληρωτική διατύπωση

Μία διαφορετική, αλλά ισοδύναμη προσέγγιση, είναι δυνατό να προκύψει αν μελετήσουμε ένα αυθαίρετο όγκο ελέγχου, σε αντίθεση με τον στοιχειώδη κύβο που θεωρήθηκε προηγουμένως, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3. Η συνολική μάζα,



Σχήμα 1.3: Όγκος ελέγχου για την ολοκληρωτική διατύπωση της εξίσωσης συνέχειας.

$m$ , που περικλείεται στον όγκο αυτό δίνεται από το χωρικό ολοκλήρωμα της πυκνότητάς του

$$m = \int_V \rho dV. \quad (1.12)$$

Προφανώς, ο ρυθμός μεταβολής της μάζας στον όγκο αυτό θα ισούται με την καθαρή (εισροή - εκροή) παροχή μάζας διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου. Η πρώτη ποσότητα ορίζεται λαμβάνοντας τη χρονική παράγωγο της Εξίσωσης (1.12) και η δεύτερη από το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_A \rho (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) dA.$$

Η χρήση του εσωτερικού γινομένου παραπάνω λαμβάνει υπόψη τόσο την εισροή όσο και την εκροή ρευστού από την επιφάνεια ελέγχου μέσω του προσήμου του. Αν για παράδειγμα το διάνυσμα της ταχύτητας έχει την ίδια φορά με το μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  (το οποίο εξ' ορισμού έχει φορά πάντα προς τα έξω), η αντίστοιχη τιμή του εσωτερικού γινομένου είναι θετική και το ρευστό εξέρχεται της επιφάνειας ελέγχου (εκροή). Αντιθέτως, αν το πρόσημο του γινομένου είναι αρνητικό, το διάνυσμα της ταχύτητας έχει φορά αντίθετη αυτής του μοναδιαίου (δηλαδή προς το εσωτερικό της επιφάνειας ελέγχου) δηλώνοντας εισροή. Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα είναι δυνατό να διατυπωθεί η ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης συνέχειας ως εξής

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_A \rho (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) dA = 0. \quad (1.13)$$

Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι στην παραπάνω μελέτη δεν συμπεριλήφθηκαν πηγές ή καταβόθρες μάζας που πιθανόν να υπάρχουν στο εσωτερικό του όγκου ελέγχου. Στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα (1.13) γενικεύεται στην παρακάτω μορφή

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_A \rho (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) dA = \sum_j \dot{m}_j,$$

ανάλογα με το αν υπάρχει πηγή (+) ή καταβόθρα (-).

## 1.2.4 Εφαρμογές

### 1.2.4.1 Υπολογισμός παροχής

Μία από τις σημαντικότερες εφαρμογές της εξίσωσης συνέχειας είναι ο υπολογισμός της παροχής όγκου,  $Q$ . Ας θεωρήσουμε έναν όγκο ελέγχου,  $V$ , που ορίζεται από μία επιφάνεια,  $A$ , μεταβλητής διατομής. Χωρίς βλάβη της γενικότητας,

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ρευστό εισέρχεται στην επιφάνεια αυτή μέσω μίας μόνο διατομής  $A_1$  και εξέρχεται μέσω μίας δεύτερης διατομής  $A_2$ , όπου εν γένει  $A_1 \neq A_2$ . Για το υπόλοιπο μέρος της επιφάνειας ισχύει η συνθήκη μη ολίσθησης και επομένως δεν διέρχεται ρευστό μέσω αυτής. Οι Εξισώσεις (1.2) και (1.3) γράφονται ως εξής

$$d\dot{m}_i = \rho_i \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n}_i dA_i,$$

όπου  $i = 1, 2$ . Το ισοζύγιο μάζας τότε (1.1) παίρνει τη μορφή

$$\rho_1 \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dA_1 - \rho_2 \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dA_2 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV). \quad (1.14)$$

Ολοκληρώνοντας την Εξίσωση (1.14) ως προς την επιφάνεια ελέγχου  $A$  το αριστερό μέλος και ως προς τον αντίστοιχο όγκο  $V$  το δεξιό προκύπτει

$$\int_A (\rho_1 \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dA_1 - \rho_2 \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dA_2) = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV.$$

Γράφοντας τη μερική χρονική παράγωγο ως ολική μέσα στο ολοκλήρωμα και αναγνωρίζοντας ότι το εσωτερικό γινόμενο  $\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n}_i$  είναι η μέση κάθετη ως προς την επιφάνεια ταχύτητα,

$$\int_{A_1} \rho_1 \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dA_1 - \int_{A_2} \rho_2 \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dA_2 = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV,$$

ή

$$\rho_1 U_1 \int_{A_1} dA_1 - \rho_2 U_2 \int_{A_2} dA_2 = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV. \quad (1.15)$$

Τέλος, στην περίπτωση που η πυκνότητα δεν έχει χρονική εξάρτηση, η Εξίσωση (1.15) παίρνει τη τελική μορφή

$$\rho_1 U_1 A_1 = \rho_2 U_2 A_2. \quad (1.16)$$

Η Εξίσωση (1.16) εκφράζει την αρχή διατήρησης της μάζας για συμπιεστό και μόνιμο ρευστό. Στην απλή περίπτωση που το ρευστό είναι ασυμπίεστο ( $\rho = \text{σταθερό}$ ) η εξίσωση απλοποιείται ως εξής

$$U_1 A_1 = U_2 A_2. \quad (1.17)$$

Το αποτέλεσμα (1.17) αποτελεί τη διατύπωση της εξίσωσης συνέχειας για ασυμπίεστη ροή και εκφράζει το γεγονός ότι το γινόμενο της ταχύτητας επί τη διατομή σε κάθε σημείο είναι σταθερό. Άμεση συνέπεια του αποτελέσματος αυτού είναι ότι η ροή σε αποκλίνουσες (συγκλίνουσες) σωληνογραμμές επιβραδύνεται (επιταχύνεται).

### 1.2.4.2 Ασυμπίεστη ροή

Ας υποθέσουμε ένα πεδίο ταχύτητας με τις εξής συνιστώσες:  $u(x,y,z) = 2x + y + z$ ,  $v(x,y,z) = -\alpha y$  και  $w(x,y,z) = -\beta z$ . Αν η ροή που περιγράφει το πεδίο αυτό είναι ασυμπίεστη, τότε θα πρέπει να ισχύει η Εξίσωση (1.7),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$2 - \alpha - \beta = 0. \quad (1.18)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι για οποιονδήποτε συνδυασμό των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$  που ικανοποιούν την Εξίσωση (1.18) προκύπτει ασυμπίεστη ροή. Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου προβλήματος είναι η περίπτωση κατά την οποία η  $x$  συνιστώσα της ταχύτητας δίνεται από την ακόλουθη γενικευμένη σχέση,

$$u'(x,y,z) = 2x + \gamma g(y) + \delta h(z).$$

Παρατηρούμε ότι  $\partial u' / \partial x = \partial u / \partial x$  και επομένως η συνθήκη ασυμπίεστότητας (1.18) παραμένει η ίδια ανεξαρτήτως των τιμών των παραμέτρων  $\gamma$  και  $\delta$ . Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε αν, για παράδειγμα,

$$v'(x,y,z) = 2f(x) - \alpha y + \delta h(z),$$

$$w'(x,y,z) = 2f(x) + \gamma g(y) - \beta z,$$

αφού το άθροισμα των μερικών παραγώγων των συνιστωσών της ταχύτητας παραμένει αναλλοίωτο,

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 2 - \alpha - \beta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

## 1.3 Εξισώσεις ορμής (Navier-Stokes)

---

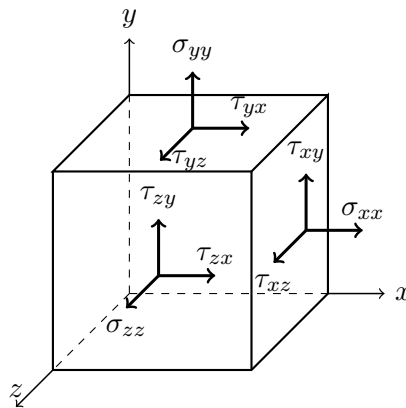
### 1.3.1 Διαφορική διατύπωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Οι εξισώσεις ορμής (γνωστές και ως εξισώσεις Navier-Stokes) αποτελούν τη μαθηματική διατύπωση του θεωρήματος της ορμής για την περιγραφή πραγματικών ροών, δηλαδή ροών στις οποίες αναπτύσσονται φαινόμενα συνεκτικότητας καθώς και εξωτερικές δυνάμεις κατά την κίνηση του ρευστού. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν εφαρμόζοντας ισορροπία δυνάμεων σε ένα στοιχειώδη όγκο

ελέγχου,  $dV$ . Στον όγκο αυτό και λόγω της κίνησης του ρευστού ασκούνται τόσο μαζικές δυνάμεις  $f$  (π.χ. βαρύτητα) όσο και δυνάμεις λόγω των ορθών (κάθετων στην επιφάνεια  $\sigma_{ii}$ ) και διατμητικών (εφαπτόμενων στην επιφάνεια  $\tau_{ij}$ ) τάσεων που αναπτύσσονται σε κάθε πλευρά του στοιχειώδους όγκου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4. Με απλή παρατήρηση του σχήματος διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν έξι διατμητικές τάσεις και τρεις ορθές. Ο στοιχειώδης κύβος επομένως περιγράφεται από εννέα συνολικά τάσεις<sup>1</sup> και ο αντίστοιχος ταυυστής τάσεων,  $\bar{\bar{T}}$ , γράφεται

$$\bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Σημειώνεται ότι οι δείκτες  $i, j$  δεν αντιπροσωπεύουν μερική παραγωγή, αλλά κατευθυντικότητα. Συγκεκριμένα, για την τάση  $\tau_{ij}$  ο δείκτης  $i$  αναφέρεται στην επιφάνεια που είναι κάθετη στη διεύθυνση  $i$  και ο δείκτης  $j$  δηλώνει ότι η τάση είναι παράλληλη στον άξονα  $j$ . Για παράδειγμα, η διατμητική τάση  $\tau_{xy}$  δηλώνει εκείνη τη συνιστώσα που εφαρμόζεται σε μία επιφάνεια που είναι κάθετη στον άξονα  $x$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $y$ .



Σχήμα 1.4: Τάσεις στον όγκο ελέγχου.

Μπορούμε τότε να γράψουμε ότι η συνολική δύναμη ανά μονάδα όγκου στη

<sup>1</sup> Όπως αποδεικνύεται στην επόμενη ενότητα ο ταυυστής των τάσεων είναι ένας συμμετρικός πίνακας δίνοντας  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ . Για το λόγο αυτό, από τα έξι μη διαγώνια στοιχεία μόνο τα τρία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

### 1.3 Εξισώσεις ορμής (Navier-Stokes)

διεύθυνση  $x$  ισούται με

$$F_x = f_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}.$$

Για τις άλλες δύο κατευθύνσεις αντίστοιχα έχουμε

$$F_y = f_y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z},$$

$$F_z = f_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}.$$

Μπορούμε να συμπτύξουμε τις παραπάνω τρεις εξισώσεις ως εξής

$$F_i = f_i + \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1.19)$$

όπου  $i = x, y, z$  και  $T_{ij}$  οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων,  $\bar{\bar{T}}$ . Ανάλογα μπορούμε να γράψουμε για το ρυθμό μεταβολής της ορμής,  $p_i = \rho U_i$ , ανά μονάδα όγκου ως εξής

$$\frac{Dp_i}{Dt} = \rho \frac{DU_i}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_j U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right). \quad (1.20)$$

Με απλή επισκόπηση των Εξισώσεων (1.19) και (1.20) είναι προφανές ότι τα αριστερά μέλη είναι ίσα λόγω του δεύτερου νόμου του Newton και επομένως

$$\rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_j U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = f_i + \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1.21)$$

Σημειώνουμε ότι, ως έχει, η Εξίσωση (1.21) περιέχει τις χωρικές παραγώγους του τανυστή των τάσεων, ο οποίος εν γένει είναι άγνωστος και εκφράζει το γεγονός ότι η μάζα ανά μονάδα όγκου ενός ρευστού επί την επιτάχυνσή του ισούται με τις ανά μονάδα όγκου δυνάμεις και εσωτερικές τάσεις. Το παραπάνω δυστυχώς σύστημα των τριών αλγεβρικών εξισώσεων δεν αποτελεί ένα επιλύσιμο σύστημα καθώς περιέχει δέκα αγνώστους και πιο συγκεκριμένα τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας, τις έξι συνιστώσες του τανυστή τάσεων και την πίεση. Επομένως για να είμαστε σε θέση να τη χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει να εκφράσουμε τον τανυστή συναρτήσει ποσοτήτων που είτε είναι γνωστές

είτε μπορούν να υπολογιστούν. Για λόγους απλότητας θα περιοριστούμε στα λεγόμενα *Νευτώνεια ρευστά*. Στα ρευστά αυτής της κατηγορίας, το ιξώδες παραμένει σταθερό και η αναπτυσσόμενη διατμητική τάση κατά τη ροή τους είναι γραμμικά ανάλογη της παραγώγου της ταχύτητας. Μπορούμε τότε να γράψουμε ότι ο συνολικός τανυστής τάσεων,  $T_{ij}$ , εκφράζεται συναρτησίως της πίεσης,  $p$ , του σταθερού ιξώδους,  $\mu$ , και του πεδίου ταχύτητας,  $\mathbf{U}$ , του ρευστού σύμφωνα με τη σχέση<sup>2</sup>

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.22)$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια την Εξίσωση (1.22) στην (1.21) προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_j U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} f_i + \frac{1}{\rho} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \implies \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_j U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \implies \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_j U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \sum_j \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \implies \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_j U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \sum_j \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}, \end{aligned}$$

θεωρώντας ότι για ένα ασυμπίεστο ρευστό ισχύει η σχέση (1.7) δίνοντας

$$\sum_j \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα αποτελεί τη διαφορική διατύπωση των εξισώσεων Navier-Stokes για Νευτώνειο και ασυμπίεστο ρευστό, εκφρασμένο σε μορφή συνιστωσών ταχύτητας και σε μονάδες  $N/kg$ . Ισοδύναμα, μπορεί να γραφτεί και σε διανυσματική μορφή (συναντάται πιο συχνά στη βιβλιογραφία) ως εξής

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \frac{1}{\rho} \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{U}, \quad (1.23)$$

εκφρασμένο σε μονάδες  $N/m^3$ . Η Εξίσωση (1.23) αποτελεί τη γενική εξίσωση ορμής για ασυμπίεστο και Νευτώνειο ρευστό. Το αριστερό μέλος εκφράζει τη

<sup>2</sup> βλέπε Ενότητα 1.3.2.

### 1.3 Εξισώσεις ορμής (Navier-Stokes)

συνολική επιτάχυνση του ρευστού σαν το άθροισμα της τοπικής επιτάχυνσης που οφείλεται στη μη μονιμότητα του πεδίου ροής και της μεταφορικής επιτάχυνσης λόγω της θέσης του. Η διάκριση μεταξύ των δύο αυτών όρων είναι θεμελιώδους σημασίας για την ουσιαστική κατανόηση της δυναμικής συμπεριφοράς των ρευστών. Ας φανταστούμε για παράδειγμα τη μόνιμη ροή μέσω ακροφυσίου. Καθώς το πεδίο της ταχύτητας παραμένει σταθερό, η τοπική επιτάχυνση μηδενίζεται παντού. Λόγω θέσης όμως, το ρευστό επιταχύνεται καθώς η διατομή ελαττώνεται. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο ο όρος μεταφοράς (advection term),  $(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}$ , ορίζεται ως η χωρική παράγωγος της ταχύτητας στην υλική παράγωγο. Το αριστερό μέλος δηλαδή εκφράζει το γεγονός ότι το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας αλλάζει όχι μόνο στο χρόνο αλλά και στο χώρο. Με απλή επισκόπηση των όρων είναι προφανές ότι αυτοί εκφράζονται σε μονάδες  $N/m^3$  και επομένως περιγράφουν τη συνολική επιτάχυνση ενός ροϊκού στοιχείου ανηγμένου στην πυκνότητά του,  $\rho$ . Το δεξιό μέλος εκφράζει το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στο ρευστό σαν το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων, των δυνάμεων που αναπτύσσονται λόγω κλίσης πίεσης και των δυνάμεων συνεκτικότητας όπως αυτές εκφράζονται μέσω του φαινομένου της διάχυσης (diffusion). Οι εξισώσεις Navier-Stokes σε συνδυασμό με την εξίσωση συνέχειας αποτελούν τότε ένα επιλύσιμο σύστημα τεσσάρων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ως προς τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας και την πίεση. Η διασημότητά τους ακολουθείται από την αντίστοιχη πολυπλοκότητά τους και για το λόγο αυτό είναι ελάχιστες οι περιπτώσεις για τις οποίες υπάρχουν αναλυτικές λύσεις (μερικές από αυτές εξετάζονται στην επόμενη ενότητα). Είναι όμως δυνατό να απλοποιηθεί λαμβάνοντας υπόψη συγκεκριμένες παραδοχές.

- Για μικρούς αριθμούς Reynolds, ο όρος αδράνειας είναι αμελητέος σε σχέση με τον όρο ιξώδους (βλέπε Ενότητα 2.6.1) δίνοντας τις γνωστές εξισώσεις Stokes

$$0 = \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{U}.$$

- Αν η ροή εξελίσσεται σε χαμηλό πεδίο πίεσης απουσία εξωτερικών δυνάμεων, οι εξισώσεις Navier-Stokes παίρνουν τη μορφή εξίσωσης διάχυσης

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \mathbf{U}.$$

- Τέλος, για μεγάλους αριθμούς Reynolds, η δύναμη ιξώδους είναι αμελητέα σε σχέση με τη δύναμη αδράνειας δίνοντας την εξίσωση του Euler

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{f} - \nabla p).$$

Ισοδύναμα, η εξίσωση Navier-Stokes (1.23) μπορεί να γραφτεί σε μορφή συνιστωσών ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

### 1.3.2 Νευτώνεια ρευστά

Σε όλη την έκταση του βιβλίου αυτού υποθέσαμε ότι τα υπό μελέτη ρευστά ανήκουν στην κατηγορία των Νευτώνειων ρευστών, δηλαδή εκείνων των ρευστών που χαρακτηρίζονται από σταθερό ιξώδες. Ο λόγος είναι ότι στις περισσότερες περιπτώσεις τα συνήθη ρευστά, όπως για παράδειγμα το νερό και ο αέρας, συμπεριφέρονται με παρόμοιο τρόπο για ένα μεγάλο εύρος συνθηκών. Δεν έχει δοθεί όμως ένας αυστηρός ορισμός της έννοιας του Νευτώνειου ρευστού και αυτός είναι ο σκοπός της ενότητας αυτής. Για να ορίσουμε επομένως τότε ένα ρευστό μπορεί να χαρακτηριστεί ως Νευτώνειο,<sup>3</sup> αρκεί να βρούμε τη σχέση που συνδέει τον τανυστή τάσης  $T_{ij}$  με τον αντίστοιχο του ρυθμού παραμόρφωσης,  $S_{ij}$ , όπως αυτός ορίστηκε στην Ενότητα ???. Θεωρούμε λοιπόν τις παρακάτω δύο παραδοχές:

- όταν το ρευστό είναι ακίνητο και ο ρυθμός παραμόρφωσης μηδενίζεται, η τάση που ασκεί το ρευστό είναι η υδροστατική πίεση,
- ο τανυστής τάσης εξαρτάται γραμμικά από τον τανυστή παραμόρφωσης και δεν εξαρτάται από οποιοδήποτε άλλο τανυστή.

<sup>3</sup> Αξίζει να σημειωθεί ότι στην πραγματικότητα κανένα ρευστό δεν είναι απόλυτα Νευτώνειο, καθώς όλα αποκλίνουν σε κάποιο βαθμό από την ιδεατή κατάσταση που ορίζει η Νευτώνεια ρεολογία. Για πρακτικούς όμως λόγους, θεωρούμε ότι αρκετά ρευστά συμπεριφέρονται ως Νευτώνεια, καθώς το σφάλμα στην παραδοχή αυτή είναι τις περισσότερες φορές ασήμαντο.

### 1.3 Εξισώσεις ορμής (Navier-Stokes)

Η πρώτη συνθήκη μας επιτρέπει να εκφράσουμε τον τανυστή τάσης σύμφωνα με την εξίσωση

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (1.24)$$

όπου  $\delta_{ij}$  το δέλτα του Kronecker που ορίζεται ως εξής

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{όταν } i \neq j, \\ 1 & \text{όταν } i = j. \end{cases}$$

Από τον ορισμό (1.24) φαίνεται επομένως ότι η πίεση εμφανίζεται μόνο στα διαγώνια στοιχεία του τανυστή τάσης, δηλαδή η πίεση συνεισφέρει μόνο στην κάθετη προς την επιφάνεια κατεύθυνση. Το αρνητικό πρόσημο επίσης οφείλεται στο γεγονός ότι η δύναμη πίεσης ασκείται προς τα μέσα και επομένως έχει αντίθετη φορά με τη σύμβαση που έχει επικρατήσει να ορίζεται θετική αν είναι εφελκυστική.

Για να ικανοποιείται η δεύτερη συνθήκη θα πρέπει να εκφράσουμε τον τανυστή διατμητικής τάσης,  $\tau_{ij}$ , συναρτήσει του τανυστή παραμόρφωσης αφού είναι προφανές ότι η πίεση δεν εξαρτάται από αυτόν. Αποδεικνύεται λοιπόν ότι

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial U_l}{\partial x_l} + \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right),$$

όπου  $\lambda$  ένας συντελεστής που είναι γνωστός και ως *δεύτερος συντελεστής ιξώδους* και  $\mu$  το (σταθερό) δυναμικό ιξώδες. Για ασυμπίεστα ρευστά όμως

$$\sum_{l=1}^3 \frac{\partial U_l}{\partial x_l} = 0,$$

δίνοντας τελικά

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Επομένως, ο τανυστής των διατμητικών τάσεων εξαρτάται μόνο από τον συμμετρικό τανυστή παραμόρφωσης,  $S_{ij}$ , δηλαδή

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij}. \quad (1.25)$$

Η Εξίσωση (1.25) αποτελεί την καταστατική εξίσωση ενός Νευτώνειου ρευστού, όπου ο τανυστής των διατμητικών τάσεων δεν εξαρτάται από τη μετατόπιση ή την περιστροφή ενός ροϊκού στοιχείου. Επιβεβαιώνεται επίσης η δεύτερη παραδοχή που διατυπώθηκε στην αρχή της ενότητας, αφού πράγματι ο τανυστής

αυτός εξαρτάται γραμμικά από τον τανυστή παραμόρφωσης, με το ιξώδες να αποτελεί τη σταθερά αναλογίας. Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε την Εξίσωση (1.25) για να μελετήσουμε ρευστά που αποκλίνουν σημαντικά από την παραπάνω γραμμικότητα και ως εκ τούτου επιδεικνύουν μη Νευτώνεια συμπεριφορά.

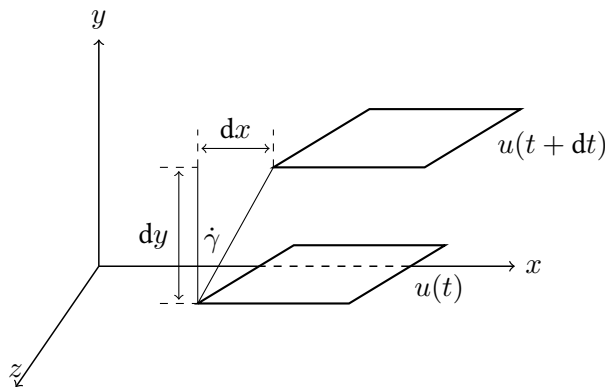
### 1.3.3 Γενικευμένα Νευτώνεια ρευστά

Η γενίκευση της γραμμικής σχέσης (1.25) για την περίπτωση μη Νευτώνειων ρευστών κατέστη αναγκαία με την ανάπτυξη της σύγχρονης βιομηχανίας και την παραγωγή προϊόντων που δεν ήταν δυνατό να μελετηθούν με βάση τη Νευτώνεια ρεολογία. Η οδοντόκρεμα, τα χρώματα βαφής, το μελάνι εκτύπωσης και τα λιπαντικά είναι μερικά μόνο παραδείγματα μη Νευτώνειων ρευστών.

Για να μελετήσουμε τα ρευστά αυτά εισάγουμε την έννοια του ρυθμού διάτμησης  $\dot{\gamma}$ . Για απλές διατμητικές ροές, όπως η ροή Couette που παρουσιάζεται στην Ενότητα 1.3.5.3, το αποτέλεσμα (1.25) ανάγεται στο νόμο του Newton για το ιξώδες

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}.$$

Στην περίπτωση αυτή, αν θεωρήσουμε δύο παράλληλα στρώματα ροής με χρονική διαφορά ίση με  $dt$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.5, μπορούμε να εκφράσουμε



Σχήμα 1.5: Ρυθμός διάτμησης και κλίση της ταχύτητας σε ροή Couette.

το ρυθμό διάτμησης συναρτήσει της κλίσης της ταχύτητας ως εξής

$$\frac{du}{dy} = \frac{d}{dy} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \tan \dot{\gamma}.$$

### 1.3 Εξισώσεις ορμής (Navier-Stokes)

Αναπτύσσοντας κατά Taylor την εφαπτομένη του ρυθμού διάτμησης γύρω από το σημείο μηδέν

$$\tan \dot{\gamma} = \dot{\gamma} + \frac{1}{3}\dot{\gamma}^3 + \frac{2}{15}\dot{\gamma}^5 + \dots$$

δίνοντας τέλος για μικρές τιμές του  $\dot{\gamma}$  ότι

$$\tau = \mu \dot{\gamma}. \quad (1.26)$$

Ο νόμος του Newton επομένως για Νευτώνεια ρευστά είναι μία ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $(\dot{\gamma}, \tau)$ . Οποιοδήποτε λοιπόν ρευστό δεν ικανοποιεί την Εξίσωση (1.26) επιδεικνύει μη Νευτώνεια συμπεριφορά και περιγράφεται από μία γενικότερη σχέση

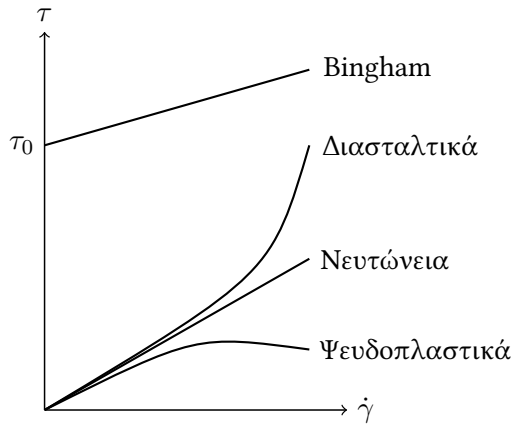
$$\tau = f(\dot{\gamma}).$$

Επειδή όμως είναι αδύνατο να μελετηθεί η ροϊκή συμπεριφορά ενός ρευστού για οποιαδήποτε συνάρτηση  $f$ , περιοριζόμαστε σε ροές που χαρακτηρίζονται από την παρακάτω γενικευμένη έκφραση του γραμμικού νόμου ιξώδους

$$\tau = \mu(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}. \quad (1.27)$$

Τα ρευστά που υπακούουν την Εξίσωση (1.27) ονομάζονται *γενικευμένα Νευτώνεια ρευστά* και χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες.

- Ψευδοπλαστικά (Pseudoplastic): στην κατηγορία αυτή ανήκουν όλα τα ρευστά των οποίων το ιξώδες ελαττώνεται με αύξηση του ρυθμού διάτμησης, όπως για παράδειγμα παρατηρείται σε διάφορα πολυμερή και στο αίμα.
- Διασταλτικά (Dilatant): όταν το ιξώδες αυξάνεται με αύξηση του ρυθμού διάτμησης, το ρευστό ονομάζεται διασταλτικό. Το βασικότερο χαρακτηριστικό ρευστών που ανήκουν στην κατηγορία αυτή είναι ότι μπορούν να μετατραπούν από ρευστά σε στερεά με απλή εφαρμογή τάσης.
- Ιξωδοπλαστικά (Viscoplastic): ρευστά τα οποία δεν ρέουν για τιμές της διατμητικής τάσης μικρότερες από μία κρίσιμη τιμή (τάση διαρροής) ονομάζονται ιξωδοπλαστικά. Αν επίσης τα ρευστά αυτά συμπεριφέρονται ως Νευτώνεια για τάσεις μεγαλύτερες της τάσης διαρροής, ονομάζονται και ρευστά Bingham.



Σχήμα 1.6: Χαρακτηριστικές καμπύλες γενικευμένων Νευτώνειων ρευστών.

Όλες οι παραπάνω κατηγορίες γενικευμένων Νευτώνειων ρευστών απεικονίζονται γραφικά στο Σχήμα 1.6. Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι η μελέτη μη Νευτώνειων ρευστών είναι αρκετά πολύπλοκη και δεν εμπίπτει στους στόχους του παρόντος βιβλίου. Για το λόγο αυτό παρουσιάζεται μόνο ένα παράδειγμα στην ενότητα των εφαρμογών 1.4.4 και δεν αναλύεται περαιτέρω η ροϊκή τους συμπεριφορά στα κεφάλαια που ακολουθούν.

### 1.3.4 Ο τανυστής των τάσεων

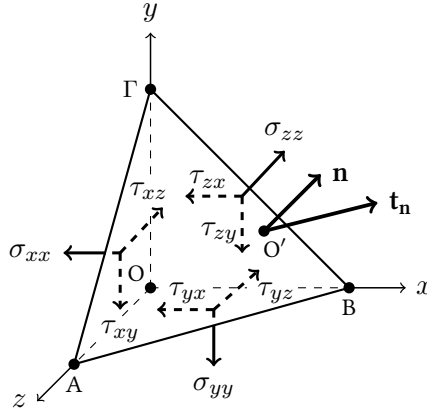
Η έννοια της τάσης αποτελεί μία από τις σημαντικότερες έννοιες τόσο στη μηχανική των ρευστών όσο και στους περισσότερους τομείς της επιστήμης και των τεχνολογικών εφαρμογών. Για το λόγο αυτό στην παρούσα ενότητα θα μελετηθεί με πιο συστηματικό τρόπο με τη βοήθεια του τετραέδρου Cauchy<sup>4</sup> όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.7.

Έστω ένα παραλληλεπίπεδο το οποίο τέμνεται κατά τη διεύθυνση ενός αυθαίρετου επιπέδου, όπως αυτό ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n}$ . Το επίπεδο  $AB\Gamma$  που προκύπτει σχηματίζει μαζί με τα άλλα επίπεδα το λεγόμενο *τετράεδρο Cauchy* και περιγράφεται από τα συνημίτονα κατεύθυνσης (ή κατευθύνοντα συνημίτονα)  $(n_x, n_y, n_z) = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{i}}, \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{j}}, \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{k}})$ . Μπορούμε τότε να εκφράσουμε τα εμβαδά των τριών υπολοίπων επιπέδων σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις

$$(A\Gamma O) = n_x(AB\Gamma), \quad (ABO) = n_y(AB\Gamma), \quad (B\Gamma O) = n_z(AB\Gamma). \quad (1.28)$$

<sup>4</sup> Ο Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857, ήταν Γάλλος μαθηματικός, φυσικός και μηχανικός με πολύ σημαντική συνεισφορά στη μαθηματική Ανάλυση και τη μηχανική του συνεχούς μέσου.

### 1.3 Εξισώσεις ορμής (Navier-Stokes)



Σχήμα 1.7: Το τετράεδρο του Cauchy και οι αναπτυσσόμενες τάσεις στις έδρες του.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας θεωρήσουμε την ισορροπία δυνάμεων εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Newton κατά μήκος της κατεύθυνσης  $x$  στο τετράεδρο. Προκύπτει τότε ότι

$$t_{n_x}(AB\Gamma) - \sigma_{xx}(A\Gamma O) - \tau_{yx}(ABO) - \tau_{zx}(BO\Gamma) = \rho \frac{(OO')}{3} (AB\Gamma)\alpha_x,$$

όπου  $(OO')$  η απόσταση μεταξύ των σημείων  $O$ ,  $O'$  και  $\alpha_x$  η συνιστώσα της επιτάχυνσης κατά την διεύθυνση του άξονα των  $x$ . Λαμβάνοντας στη συνέχεια το όριο  $(OO') \Rightarrow 0$ ,

$$t_{n_x}(AB\Gamma) - \sigma_{xx}(A\Gamma O) - \tau_{yx}(ABO) - \tau_{zx}(BO\Gamma) = 0$$

και χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (1.28)

$$t_{n_x}(AB\Gamma) = \sigma_{xx}n_x(AB\Gamma) + \tau_{yx}n_y(AB\Gamma) + \tau_{zx}n_z(AB\Gamma) \Rightarrow$$

$$t_{n_x} = \sigma_{xx}n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z.$$

Ισοδύναμα για τις άλλες δύο κατευθύνσεις

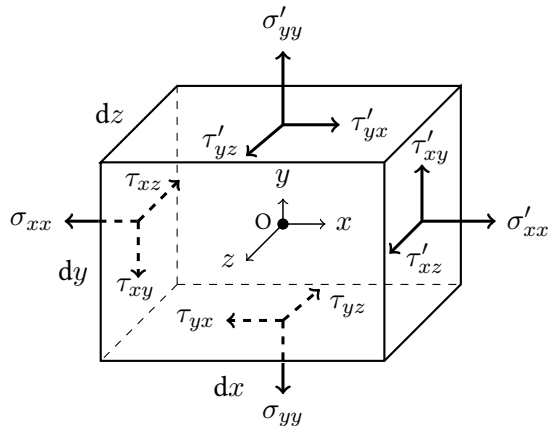
$$t_{n_y} = \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{zy}n_z,$$

$$t_{n_z} = \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z.$$

Συλλέγοντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να εκφράσουμε το διάνυσμα της τάσης  $\mathbf{t}_n$  σε μορφή πίνακα ως εξής

$$\begin{bmatrix} t_{n_x} \\ t_{n_y} \\ t_{n_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \bar{\bar{\mathbf{T}}} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix},$$

σύμφωνα με τον ορισμό για τον τανυστή των τάσεων που δόθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Για να αποδείξουμε στη συνέχεια ότι ο τανυστής αυτός είναι συμμετρικός (δηλαδή  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ), θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο του Σχήματος 1.8 όπου η αρχή των αξόνων έχει τοποθετηθεί στο κέντρο βάρους του. Οι αντί-



Σχήμα 1.8: Συμμετρία του τανυστή τάσεων. Οι αναπτυσσόμενες τάσεις στις επιφάνειες εμβαδού  $dx dy$  δεν σχεδιάστηκαν καθώς δε συνεισφέρουν ως προς τη ροπή κατά μήκος του άξονα  $Oz$ .

στοιχες συνιστώσες τόσο των ορθών όσο και των διατμητικών τάσεων μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor, καθώς όπως είναι λογικό να υποθέσουμε αυτές μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο στο εσωτερικό του παραλληλεπιπέδου. Μπορούμε τότε για παράδειγμα να γράψουμε ότι

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx + \dots \quad \text{και} \quad \tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy + \dots \quad (1.29)$$

Θεωρώντας στη συνέχεια ως θετική την ανθρωρολογιακή φορά, παρατηρούμε ότι η αναπτυσσόμενη ροπή ως προς τον άξονα  $Oz$ , παίρνει τη μορφή

$$M_z = \tau'_{xy} dz dy \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dz dy \frac{dx}{2} - \tau'_{yx} dz dx \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dz dx \frac{dy}{2}. \quad (1.30)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις (1.29) στην (1.30) και λαμβάνοντας υπόψη τη συνθήκη ισορροπίας  $M_z = 0$  προκύπτει

$$\begin{aligned} \left( 2\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dz dy \frac{dx}{2} - \left( 2\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dz dx \frac{dy}{2} = 0 \implies \\ \left( 2\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \frac{dV}{2} - \left( 2\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \frac{dV}{2} = 0, \end{aligned}$$

όπου  $dV = dx dy dz$  ο στοιχειώδης όγκος του παραλληλεπιπέδου. Επειδή  $dV \neq 0$  και αγνοώντας τις μεταβολές των τάσεων κατά μήκος των αντίστοιχων διευθύνσεων βρίσκουμε τέλος ότι

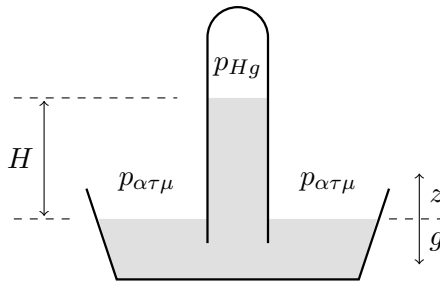
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Λαμβάνοντας την ισορροπία των ροπών ως προς τους άξονες  $Ox$  και  $Oy$  προκύπτει αντίστοιχα ότι  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  και  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ . Ο τανυστής επομένως των τάσεων είναι συμμετρικός καθώς  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  αποδεικνύοντας την πρόταση ότι απαιτούνται έξι μόνο συνιστώσες (από τις εννέα συνολικά) για τον υπολογισμό της εντατικής κατάστασης.

### 1.3.5 Εξισώσεις Navier-Stokes: εφαρμογές

#### 1.3.5.1 Μέτρηση πίεσης με χρήση βαρόμετρου

Το βαρόμετρο είναι μία απλή πειραματική διάταξη για την μέτρηση της ατμοσφαιρικής πίεσης. Επινοήθηκε από τον Torricelli (Evangelista Torricelli, 1608-1647) και στην απλούστερη μορφή του αποτελείται από ένα δοκιμαστικό σωλήνα τοποθετημένο ανάποδα σε ένα δοχείο μερικώς γεμισμένο με υδράργυρο, Hg.<sup>5</sup> Η υπό μελέτη διάταξη ανήκει στην κατηγορία της στατικής των ρευστών,



Σχήμα 1.9: Σχηματική αναπαράσταση απλού βαρόμετρου.

όπου  $u = v = w = 0$ . Οι εξισώσεις Navier-Stokes επομένως εκφρασμένες σε καρτεσιανές συντεταγμένες απλοποιούνται στην κάτωθι μορφή

$$f_x - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad f_y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{και} \quad f_z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

<sup>5</sup> Ο υδράργυρος χρησιμοποιούνταν σχεδόν αποκλειστικά στα βαρόμετρα μέχρι που ανακαλύφθηκε ότι οι ατμοί του είναι ιδιαίτερα επιβλαβείς για την υγεία.

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Θεωρώντας ότι η μόνη εξωτερική δύναμη που δρα στο βαρόμετρο είναι η βαρύτητα με κατεύθυνση τον άξονα των  $-z$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.9, βρίσκουμε τελικά ότι

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση προκύπτει

$$p(z) = -\rho g z + C, \quad (1.31)$$

όπου  $C$  η σταθερά ολοκλήρωσης. Θέτοντας  $z = H$  η Εξίσωση (1.31) γράφεται

$$p(H) = -\rho g H + C = p_{Hg},$$

ή ισοδύναμα

$$C = p_{Hg} + \rho g H \approx \rho g H, \quad (1.32)$$

για αμελητέα τάση ατμών του υδραργύρου. Αντικαθιστώντας τέλος το αποτέλεσμα (1.32) στην Εξίσωση (1.31), υπολογίζουμε την κατανομή της πίεσης συναρτήσει του ύψους

$$p(z) = \rho g (H - z).$$

Προφανώς για  $z = 0$  βρίσκουμε την ατμοσφαιρική πίεση

$$p_{\alpha\tau\mu} = \rho g H.$$

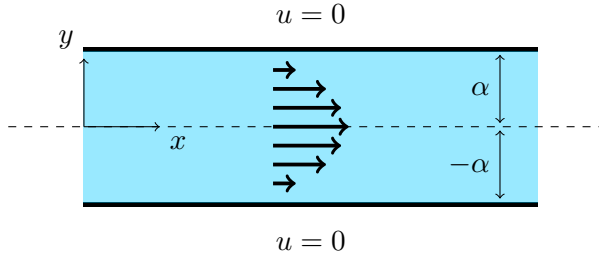
Η σημαντικότητα επομένως του βαρόμετρου έγκειται στο γεγονός ότι μπορούμε να μετρήσουμε την ατμοσφαιρική πίεση, μετρώντας απλά το ύψος του υδραργύρου στον ανεστραμμένο σωλήνα. Αξίζει να σημειωθεί τέλος ότι η πίεση αυτή είναι η απόλυτη πίεση (μετρημένη ως προς το απόλυτο κενό) και όχι η σχετική πίεση.

### 1.3.5.2 Μόνιμη ροή μεταξύ ακίνητων παράλληλων πλακών

**1.3.5.2.1 Κατανομή πίεσης και ταχύτητας:** Έστω ασυμπίεστη ροή κατά μήκος του άξονα  $x$  μεταξύ παράλληλων πλακών μεγάλης έκτασης που είναι κάθετες στον άξονα  $y$  στις θέσεις  $y = \pm a$  όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.10 (γνωστή και ως ροή Hele-Shaw). Αν η διάσταση των πλακών κατά τη διεύθυνση του άξονα  $z$  είναι πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με το πλάτος  $2a$ , το υπό μελέτη πρόβλημα είναι διδιάστατο και εξελίσσεται στο επίπεδο  $xy$ . Αν επίσης υποθέσουμε ότι η ροή είναι μόνιμη ( $\partial \mathbf{U} / \partial t = 0$ ) και ότι δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο ρευστό ( $\mathbf{f} = 0$ ), η Εξίσωση (1.23) απλοποιείται ως εξής

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \nu \nabla^2 \mathbf{U} = -\frac{\nabla p}{\rho},$$

### 1.3 Εξισώσεις ορμής (Navier-Stokes)



Σχήμα 1.10: Ροή Hele-Shaw.

ή σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Είναι προφανές ότι για πλήρως ανεπτυγμένη ροή, το διάνυσμα της ταχύτητας δεν θα έχει συνιστώσα στον άξονα  $y$  και επομένως  $v = 0$ . Η διδιάστατη έκφραση τότε της εξίσωσης συνέχειας

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

δίνει

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \implies u = u(y). \quad (1.34)$$

Από το αποτέλεσμα (1.34) βλέπουμε ότι η συνιστώσα της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση της ροής δεν εξαρτάται από τη συνιστώσα  $x$  παρά μόνο από τη συνιστώσα  $y$ . Για να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες εκφράσεις για την πίεση, εξετάζουμε τις Εξισώσεις (1.33). Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \mu \frac{d^2 u}{dy^2}, \\ \frac{dp}{dy} &= 0 \implies p = p(x). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Από τη δεύτερη Εξίσωση (1.35) προκύπτει ότι η πίεση του ρευστού, αντίθετα με την ταχύτητα, δεν εξαρτάται από τη συνιστώσα  $y$  αλλά μόνο από την  $x$ . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, κάθε επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα  $x$  να είναι

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

επίπεδο σταθερής πίεσης. Επιπλέον, όπως φαίνεται από την πρώτη εξίσωση,  $dp/dx = c$ , όπου  $c$  σταθερός αριθμός. Αυτό συμβαίνει διότι το αριστερό μέρος της είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής  $x$ , ενώ το δεξιό μέλος είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής  $y$ . Επομένως, η μόνη περίπτωση για να συμβαίνει κάτι τέτοιο είναι και τα δύο μέλη να είναι σταθερά και ανεξάρτητα των  $x$  και  $y$ . Οι λύσεις που επιδέχονται οι παραπάνω εξισώσεις υπολογίζονται με ολοκλήρωση και δίνουν τις ακόλουθες εκφράσεις για την ταχύτητα και την πίεση αντίστοιχα

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{c}{2\mu}y^2 + c_1y + c_2, \\ p(x) &= cx + c_3, \end{aligned} \quad (1.36)$$

όπου  $c_1, c_2, c_3$  σταθερές. Όλες οι σταθερές υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες οριακές συνθήκες. Θέτοντας λοιπόν

$$p(0,y) = p_1 \quad \text{και} \quad p(L,y) = p_2,$$

βρίσκουμε από τη δεύτερη εξίσωση ότι  $c_3 = p_1$  και  $c = (p_2 - p_1)/L = \Delta p/L$ . Η κατανομή της πίεσης τότε σε κάποια θέση  $x$  θα δίνεται από την ακόλουθη απλή σχέση

$$p(x) = \frac{\Delta p}{L}x + p_1.$$

Για τον υπολογισμό της ταχύτητας μέσω των συντελεστών  $c_1$  και  $c_2$  αρκεί η εφαρμογή της συνθήκης μη ολίσθησης επάνω στις δύο πλάκες

$$u(x, -\alpha) = 0 \quad \text{και} \quad u(x, \alpha) = 0.$$

Το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\Delta p}{2\mu L}\alpha^2 + c_1\alpha + c_2, \\ 0 &= \frac{\Delta p}{2\mu L}\alpha^2 - c_1\alpha + c_2, \end{aligned}$$

δίνοντας  $c_1 = 0$  και  $c_2 = -\Delta p\alpha^2 \cdot (2\mu L)^{-1}$ . Επομένως η κατανομή της ταχύτητας για οποιαδήποτε διατομή είναι παραβολική και δίνεται από τη σχέση

$$u(y) = \frac{\Delta p}{2\mu L} (y^2 - \alpha^2). \quad (1.37)$$

Είναι προφανές από την Εξίσωση (1.37) ότι  $u(y) > 0$  εάν και μόνο εάν  $\Delta p < 0$ . Στην περίπτωση αυτή η πίεση μειώνεται κατά τη φορά της ροής (όπως άλλωστε

είναι αναγκαίο) και η κατανομή της ταχύτητας λαμβάνει την ισοδύναμη μορφή

$$u(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} \alpha^2 \left[ 1 - \left( \frac{y}{\alpha} \right)^2 \right].$$

Σημειώνοντας επίσης ότι η μέγιστη ταχύτητα του ρευστού  $u_{\mu\epsilon\gamma}$  λαμβάνει χώρα στο επίπεδο συμμετρίας  $y = 0$  προκύπτει ότι

$$u(y) = u_{\mu\epsilon\gamma} \left[ 1 - \left( \frac{y}{\alpha} \right)^2 \right], \quad (1.38)$$

όπου

$$u_{\mu\epsilon\gamma} = -\frac{\Delta p}{2\mu L} \alpha^2.$$

Τέλος, ο διδιάστατος τανυστής των τάσεων,  $\bar{\bar{T}}$ , μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του αποτελέσματος (1.22) δίνοντας

$$\bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & \frac{\Delta p}{L} y \\ \frac{\Delta p}{L} y & -p \end{bmatrix}.$$

Επομένως η διατμητική τάση στο ρευστό είναι αρνητική, δηλαδή έχει φορά αντίθετη της ροής και είναι ανάλογη της απόστασης  $y$  από το επίπεδο συμμετρίας. Η διατμητική τάση πάνω στο τοίχωμα,  $\tau_w$ , τότε μπορεί να βρεθεί με απλή εφαρμογή του αξιώματος δράσης-αντίδρασης

$$\tau_w = \frac{\Delta p}{L} \alpha. \quad (1.39)$$

**1.3.5.2.2 Μέση ταχύτητα:** Η μέση ταχύτητα,  $\bar{u}$ , για ροή μόνιμου και ασυμπίεστου ρευστού μεταξύ δύο παράλληλων πλακών όπως αναπτύχθηκε στην προηγούμενη, υπολογίζεται εύκολα με ολοκλήρωση της Εξίσωσης (1.38). Συγκεκριμένα, επειδή η παροχή διαμέσου μίας διατομής είναι σταθερή και ίση με  $Q$

$$\bar{u} = \frac{dQ}{dA},$$

όπου  $dA$  το στοιχειώδες εμβαδό της υπό μελέτη διατομής. Λόγω συμμετρίας η παραπάνω εξίσωση μπορεί να εκφραστεί ανά μονάδα μήκους κατά τον άξονα

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

z δίνοντας

$$\bar{u} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} u(y) dy}{\int_{-\alpha}^{\alpha} dy} \quad (1.40)$$

και συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (1.38) και (1.40) βρίσκουμε

$$\bar{u} = \frac{u_{\mu\epsilon\gamma}}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[ 1 - \left( \frac{y}{\alpha} \right)^2 \right] dy. \quad (1.41)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί εύκολα να υπολογιστεί ως εξής

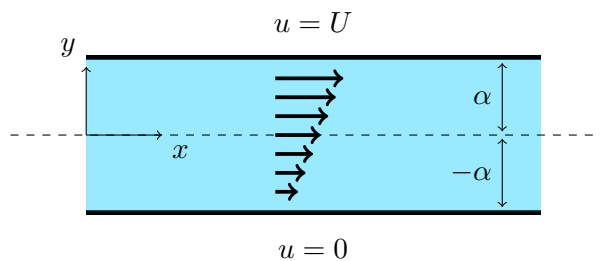
$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \left[ 1 - \left( \frac{y}{\alpha} \right)^2 \right] dy = \int_{-\alpha}^{\alpha} dy - \int_{-\alpha}^{\alpha} \left( \frac{y}{\alpha} \right)^2 dy = 2\alpha - \frac{1}{\alpha^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 dy = \frac{4}{3}\alpha.$$

Αντικαθιστώντας τέλος το αποτέλεσμα αυτό στην Εξίσωση (1.41) προκύπτει ότι

$$\bar{u} = \frac{2}{3} u_{\mu\epsilon\gamma}. \quad (1.42)$$

Επομένως η κατανομή της ταχύτητας για στρωτή ροή ασυμπίεστου ρευστού μεταξύ παράλληλων πλακών είναι παραβολική με μέση ταχύτητα ίση με τα δύο τρίτα της μέγιστης.

### 1.3.5.3 Μόνιμη ροή μεταξύ κινούμενων παράλληλων πλακών



Σχήμα 1.11: Ροή Couette.

Στην περίπτωση που μία εκ των δύο πλακών κινείται με σταθερή ταχύτητα  $U$  (γνωστή και ως ροή Couette, Σχήμα 1.11), η λύση (1.36) των εξισώσεων Navier-Stokes παραμένει αναλλοίωτη, αλλάζουν όμως οι οριακές συνθήκες. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι μόνο η πλάκα που ανήκει

### 1.3 Εξισώσεις ορμής (Navier-Stokes)

στο επίπεδο  $y = \alpha$  κινείται. Τότε, οι οριακές συνθήκες για την πίεση και την ταχύτητα παίρνουν την ακόλουθη αντίστοιχη μορφή

$$p(0,y) = p_1, \quad p(L,y) = p_2, \quad u(x, -\alpha) = 0 \quad \text{και} \quad u(x,\alpha) = U.$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω οριακές συνθήκες στις γενικές λύσεις (1.36) και παρατηρώντας ότι οι σταθερές  $c$  και  $c_3$  δεν μεταβάλλονται, προκύπτει ότι

$$c_1 = \frac{U}{2\alpha} \quad \text{και} \quad c_2 = \frac{U}{2} - \frac{\Delta p}{2\mu L}\alpha^2,$$

δίνοντας τις εξής εκφράσεις για την κατανομή της πίεσης και της ταχύτητας αντίστοιχα σε τυχαίο σημείο μεταξύ των πλακών

$$p(x) = \frac{\Delta p}{L}x + p_1,$$

$$u(y) = \frac{\Delta p}{2\mu L}(y^2 - \alpha^2) + \frac{U}{2}\left(1 + \frac{y}{\alpha}\right).$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ταχύτητα του ρευστού μπορεί να γίνει αρνητική σχηματίζοντας τις λεγόμενες ανάστροφες ή οπίσθιες ροές. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα υπολογίζοντας την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της ταχύτητας

$$\frac{du(y)}{dy} = \frac{\Delta p}{\mu L}y + \frac{U}{2\alpha},$$

$$\frac{d^2u(y)}{dy^2} = \frac{\Delta p}{\mu L}.$$
(1.43)

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα έχει ένα μοναδικό ακρότατο όταν

$$y = -\frac{U}{2\alpha} \frac{\mu L}{\Delta p},$$

το είδος του οποίου (ελάχιστο ή μέγιστο) καθορίζεται από το πρόσημο του όρου  $\Delta p$ . Πιο συγκεκριμένα, όταν η ροή συνοδεύεται από πτώση πίεσης, η δεύτερη παράγωγος στην Εξίσωση (1.43) γίνεται αρνητική και η ταχύτητα του ρευστού στο αντίστοιχο σημείο μεγιστοποιείται. Αντιθέτως, ολικό ελάχιστο εμφανίζεται όταν  $\Delta p > 0$  σχηματίζοντας οπίσθια ροή σε κάποιο τμήμα μεταξύ των πλακών. Επειδή η ροή αυτή συνδυάζει την κίνηση της πλάκας με σταθερή κλίση πίεσης κατά τη διεύθυνση της ροής, ονομάζεται συνδυασμένη ροή Couette-Poiseuille. Στην περίπτωση όπου  $\Delta p = 0$ , η ροή ονομάζεται Couette, η ταχύτητα αποκτά την ακόλουθη γραμμική κατανομή

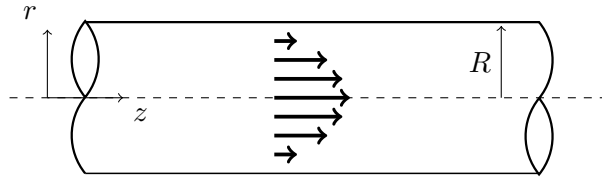
$$u(y) = \frac{U}{2}\left(1 + \frac{y}{\alpha}\right)$$

και η πίεση δεν μεταβάλλεται κατά μήκος των πλακών αποκτώντας σταθερή τιμή ίση με  $p_1$ . Η ροή αναπτύσσεται επομένως αποκλειστικά λόγω της κίνησης της πλάκας και για το λόγο αυτό το δυναμικό ιξώδες του ρευστού δεν επηρεάζει καθόλου την κίνησή του. Τέλος, η διατμητική τάση στο τοίχωμα  $\tau_w$  είναι τότε

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy} = \frac{\mu U}{2\alpha}.$$

### 1.3.5.4 Μόνιμη ροή σε ευθύγραμμο κυλινδρικό αγωγό

**1.3.5.4.1 Κατανομή πίεσης και ταχύτητας:** Θεωρούμε τη μόνιμη και πλήρως ανεπτυγμένη ροή ενός ασυμπίεστου ρευστού κατά τον άξονα των  $z$ , διαμέσου ενός ευθύγραμμου αγωγού σταθερής ακτίνας  $R$  (ροή Poiseuille), όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.12. Ο υπολογισμός της κατανομής της ταχύτητας και της πί-



Σχήμα 1.12: Ροή Poiseuille.

σης μπορεί να γίνει με επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes ακολουθώντας ανάλογη προσέγγιση με αυτή της προηγούμενης ενότητας. Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας όμως, είναι προτιμότερο να εκφράσουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων δίνοντας<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right], \\ & \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right], \end{aligned}$$

<sup>6</sup> Η μαθηματική θεμελίωση των εξισώσεων Navier-Stokes σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι αρκετά πολύπλοκη και δεν παρουσιάζεται στο βιβλίο αυτό.

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]. \end{aligned}$$

Παρά την αυξημένη πολυπλοκότητα των παραπάνω εξισώσεων είναι δυνατόν να λυθούν αναλυτικά για την περίπτωση της υπό εξέταση ροής αφού πρώτα γίνουν οι κατάλληλες παραδοχές και απλοποιήσεις. Επειδή η ροή είναι παράλληλη στον άξονα  $z$ , συνεπάγεται ότι  $u_\theta = u_r = \partial u_z / \partial \theta = 0$  και επειδή είναι πλήρως ανεπτυγμένη,  $\partial u_z / \partial z = 0$ . Οι Εξισώσεις (1.44) τότε απλοποιούνται ως εξής

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις προκύπτει ότι η πίεση δεν εξαρτάται από τις μεταβλητές  $r$  και  $\theta$  και επομένως είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής  $z$ . Επειδή το αριστερό μέλος της τρίτης εξίσωσης είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής  $z$  ενώ το δεξιό μόνο της  $r$ , συμπεραίνουμε (όπως και στην Ενότητα 1.3.5.2.1) ότι και τα δύο μέλη πρέπει να είναι σταθερά και ίσα έστω με  $c$ . Μπορούμε τότε να γράψουμε

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{du_z}{dr} \right) = c. \quad (1.44)$$

Από την Εξίσωση (1.44) έχουμε

$$p(z) = cz + c_1,$$

η οποία θέτοντας

$$p(0) = p_1 \quad \text{και} \quad p(L) = p_2,$$

δίνει  $c_1 = p_1$  και  $c = (p_2 - p_1)/L = \Delta p/L$ . Η κατανομή της πίεσης τότε για οποιαδήποτε διατομή  $z$  γράφεται

$$p(z) = \frac{\Delta p}{L} z + p_1.$$

Η δε κατανομή της ταχύτητας υπολογίζεται από την Εξίσωση (1.44) εφαρμόζοντας διπλή ολοκλήρωση

$$u_z(r) = \frac{c}{4\mu} r^2 + c_2 \ln r + c_3 = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{L} r^2 + c_2 \ln r + c_3. \quad (1.45)$$

Επειδή η ταχύτητα πρέπει να είναι πεπερασμένη για κάθε σημείο στο εσωτερικό του κυκλικού αγωγού (άρα και στο κέντρο του όπου  $r = 0$ ), προκύπτει ότι  $c_2 = 0$ . Επιπλέον, από τη συνθήκη μη ολίσθησης η ταχύτητα μηδενίζεται πάνω στο τοίχωμα (όπου  $r = R$ ) δίνοντας

$$c_3 = -\frac{R^2 \Delta p}{4\mu L}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων  $c_2$  και  $c_3$  στην Εξίσωση (1.45) προκύπτει ότι η κατανομή της ταχύτητας για μόνιμη, ασυμπίεστη και πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε ευθύγραμμο κυκλικό αγωγό σταθερής διατομής δίνεται από το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$u_z(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{L} r^2 - \frac{R^2 \Delta p}{4\mu L} = -\frac{R^2 \Delta p}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (1.46)$$

Μια άμεση συνέπεια του παραπάνω αποτελέσματος είναι ότι η μέγιστη ταχύτητα,  $u_{z,\mu\epsilon\gamma}$ , λαμβάνει χώρα για  $r = 0$ . Η Εξίσωση (1.46) τότε γράφεται στην ισοδύναμη μορφή

$$u_z(r) = u_{z,\mu\epsilon\gamma} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (1.47)$$

όπου

$$u_{z,\mu\epsilon\gamma} = -\frac{R^2 \Delta p}{4\mu L}.$$

Εφαρμόζοντας ανάλογους συλλογισμούς όπως στην περίπτωση των παράλληλων πλακών, αποδεικνύεται ότι η μοναδική μη μηδενική συνιστώσα του τανυστή τάσεων,  $\bar{\bar{T}}$ , στο ρευστό είναι η  $\sigma_{rz} = \sigma_{zr}$  η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\Delta p}{2L} r.$$

Η διατμητική τάση επομένως πάνω στο τοίχωμα,  $\tau_w$ , ισούται με

$$\tau_w = \frac{\Delta p}{2L} R.$$

**1.3.5.4.2 Μέση ταχύτητα:** Χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη διατύπωση της Εξίσωσης (1.40) για τη μέση ταχύτητα και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα

(1.47) έχουμε ότι

$$\bar{u}_z = \frac{\int_0^R u_z(r) dA}{\int_0^R dA} = \frac{2u_{z,\mu\epsilon\gamma}}{R^2} \int_0^R r \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] dr, \quad (1.48)$$

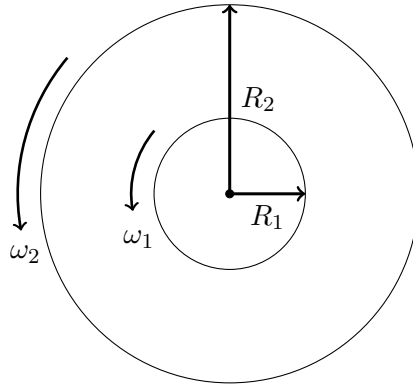
όπου το στοιχειώδες εμβαδό  $dA = 2\pi r dr$ . Το παραπάνω ολοκλήρωμα λύνεται ως εξής

$$\int_0^R r \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] dr = \int_0^R r dr - \frac{1}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2} = \frac{R^2}{4}. \quad (1.49)$$

Αντικαθιστώντας τέλος το αποτέλεσμα (1.49) στην Εξίσωση (1.119) βρίσκουμε ότι η μέση ταχύτητα για στρωτή και πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε αγωγό σταθερής διατομής ισούται με το μισό της μέγιστης, δηλαδή

$$\bar{u}_z = \frac{1}{2} u_{z,\mu\epsilon\gamma}. \quad (1.50)$$

### 1.3.5.5 Μόνιμη ροή μεταξύ ομόκεντρων περιστρεφόμενων κυλίνδρων



Σχήμα 1.13: Ροή μεταξύ ομόκεντρων περιστρεφόμενων κυλίνδρων.

Ας υποθέσουμε δύο ομόκεντρους κυλίνδρους ακτίνας  $R_1$  και  $R_2$  οι οποίοι περιστρέφονται με σταθερές γωνιακές ταχύτητες  $\omega_1$  και  $\omega_2$  αντίστοιχα. Στη μόνιμη κατάσταση η ροή (γνωστή και ως ροή Taylor-Couette) μπορεί να μελετηθεί για ένα σταθερό επίπεδο κάθετο στον άξονα των κυλίνδρων (έστω  $z$ ). Είναι

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

προφανές ότι η συνιστώσα του διανύσματος κατά τη διεύθυνση της ακτίνας θα ισούται με μηδέν ( $u_r = 0$ ) και επομένως η μόνη μη μηδενική συνιστώσα θα είναι η  $u_\theta$ . Η εξίσωση συνέχειας (1.11) σε κυλινδρικές συντεταγμένες για ασυμπίεστο ρευστό παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

και εφαρμόζοντας τις παραπάνω παραδοχές προκύπτει ότι

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \implies u_\theta = u_\theta(r). \quad (1.51)$$

Η ταχύτητα επομένως κατά τη διεύθυνση της γωνίας δεν εξαρτάται από τη γωνία αλλά από την απόσταση  $r$ . Επιπλέον, οι εξισώσεις Navier-Stokes σε κυλινδρικές συντεταγμένες απλοποιούνται δίνοντας

$$\begin{aligned} \rho \frac{u_\theta^2}{r} &= \frac{\partial p}{\partial r}, \\ 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} \right], \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Η τρίτη εξίσωση της (1.52) μας δίνει ότι η πίεση δεν εξαρτάται από την  $z$  συνιστώσα. Επίσης, από την πρώτη εξίσωση (σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα (1.51)) προκύπτει ότι η πίεση εξαρτάται μόνο από την ακτινική συνιστώσα  $r$ . Το σύστημα (1.52) επομένως απλοποιείται ως εξής

$$\begin{aligned} \rho \frac{u_\theta^2}{r} &= \frac{\partial p}{\partial r}, \\ 0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Με απλή επισκόπηση της δεύτερης εξίσωσης, παρατηρούμε ότι αυτή μπορεί να γραφτεί στην ισοδύναμη αλλά απλούστερη μορφή

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u_\theta) \right] = 0.$$

Με διπλή ολοκλήρωση της εξίσωσης αυτής προκύπτει η ακόλουθη εξάρτηση της ταχύτητας ως προς την ακτινική συνιστώσα

$$u_\theta(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r}, \quad (1.54)$$

### 1.3 Εξισώσεις ορμής (Navier-Stokes)

όπου  $c_1$  και  $c_2$  σταθερές. Αντικαθιστώντας στη συνέχεια το αποτέλεσμα (1.54) στην πρώτη εξίσωση του συστήματος (1.53) και ολοκληρώνοντας παίρνουμε την έκφραση για την κατανομή της πίεσης στο εσωτερικό των δύο κυλίνδρων

$$p(r) = \frac{1}{2}\rho \left[ (c_1 r)^2 + 4c_1 c_2 \ln r - \left( \frac{c_2}{r} \right)^2 \right] + c_3, \quad (1.55)$$

όπου  $c_3$  μία σταθερά. Οι Εξισώσεις (1.54) και (1.55) αποτελούν τη λύση του υπό μελέτη προβλήματος. Ο υπολογισμός όμως των τριών σταθερών επιβάλλει την εφαρμογή αντίστοιχων οριακών συνθηκών. Ένας συνδυασμός είναι η επιβολή ταχυτήτων στις επιφάνειες των κυλίνδρων και πίεσης σε μία εκ των δύο αυτών επιφανειών, δηλαδή

$$\begin{aligned} u_\theta(R_1) &= \omega_1 R_1, \\ u_\theta(R_2) &= \omega_2 R_2, \\ p(R_1) &= p_1. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο πρώτες οριακές συνθήκες στην Εξίσωση (1.54) και λύνοντας ως προς  $c_1$  και  $c_2$  προκύπτει ότι

$$c_1 = \frac{R_2^2 \omega_2 - R_1^2 \omega_1}{R_2^2 - R_1^2}, \quad c_2 = \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{R_2^2 - R_1^2}$$

και η κατανομή της ταχύτητας τελικά δίνεται από την ακόλουθη έκφραση

$$u_\theta(r) = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left[ (R_2^2 \omega_2 - R_1^2 \omega_1) r + R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2) \frac{1}{r} \right]. \quad (1.56)$$

Δύο ειδικές περιπτώσεις ροής είναι εκείνες κατά τις οποίες ένας εκ των δύο κυλίνδρων σταματά να περιστρέφεται ( $\omega_i = 0$ ). Από την Εξίσωση (1.56) έχουμε τότε

- ο εσωτερικός κύλινδρος είναι σταθερός ( $\omega_1 = 0$ ),

$$u_\theta(r) = \frac{R_2^2 \omega_2}{R_2^2 - R_1^2} \left( r - R_1^2 \frac{1}{r} \right),$$

- ο εξωτερικός κύλινδρος είναι σταθερός ( $\omega_2 = 0$ ),

$$u_\theta(r) = \frac{R_1^2 \omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \left( -r + R_2^2 \frac{1}{r} \right).$$

Η περίπτωση μόνιμης ροής μεταξύ κυλίνδρων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του ιξώδους,  $\mu$ , ρευστού σταθερής πυκνότητας. Για το σκοπό

αυτό υπολογίζουμε τη μοναδική μη μηδενική συνιστώσα του ταυστή των τάσεων ως εξής

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta} &= \mu r \frac{d}{dr} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \\ &= \mu \frac{r}{R_2^2 - R_1^2} \frac{d}{dr} \left[ (R_2^2 \omega_2 - R_1^2 \omega_1) + R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2) \frac{1}{r^2} \right] \\ &= \mu \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\omega_1 - \omega_2) r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \right) = -2\mu \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\omega_1 - \omega_2) \frac{1}{r^2}.\end{aligned}$$

Στην επιφάνεια του εσωτερικού κυλίνδρου,  $r = R_1$ , δίνοντας

$$\tau_{r\theta}(R_1) = -2\mu \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\omega_1 - \omega_2).$$

Η ροπή  $M$  που θα ασκηθεί τότε στον εσωτερικό κύλινδρο ανά μονάδα μήκους θα ισούται με

$$M(r = R_1) = 2\pi R_1^2 \tau_{r\theta}(R_1) = 4\pi\mu \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\omega_2 - \omega_1). \quad (1.57)$$

Προφανώς η ροπή στον εξωτερικό κύλινδρο θα είναι

$$M(r = R_2) = 2\pi R_1^2 \tau_{r\theta}(R_2) = -4\pi\mu \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\omega_2 - \omega_1). \quad (1.58)$$

Τα αποτελέσματα (1.57) και (1.58) χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του ιξώδους ενός άγνωστου υγρού. Για το σκοπό αυτό κατασκευάζονται διατάξεις που ονομάζονται ιξωδόμετρα και τα οποία αποτελούνται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους με το ρευστό τοποθετείται ανάμεσα τους. Ο εσωτερικός κύλινδρος ασφαλίζεται (δίνοντας  $\omega_1 = 0$ ) και ο εξωτερικός περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα,  $\omega_2$ . Το ιξώδες,  $\mu$ , τότε δίνεται από την απόλυτη τιμή των Εξισώσεων (1.57) ή (1.58)

$$\mu = \left| \frac{M (R_2^2 - R_1^2)}{4\pi\omega_2 R_1^2 R_2^2 L} \right|.$$

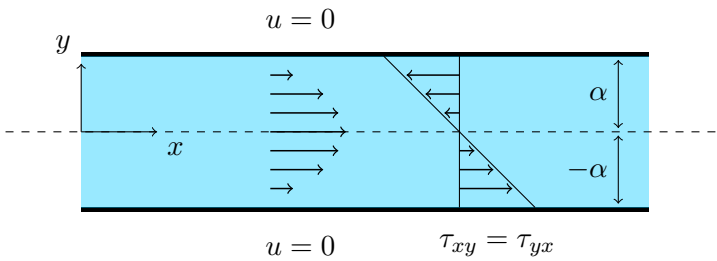
Για να υπολογίσουμε επομένως το δυναμικό ιξώδες είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα και τη ροπή που αναπτύσσεται στην πειραματική διάταξη.

1.3.5.6 Μόνιμη ροή εκθετικού ρευστού μεταξύ ακίνητων παράλληλων πλακών

Η απλούστερη ροή γενικευμένου Νευτώνειου ρευστού είναι αυτή ενός εκθετικού ρευστού που ορίζεται ως

$$\tau = k\dot{\gamma}^n,$$

όπου  $k$  ένας συντελεστής που ονομάζεται συντελεστής συνάφειας και  $n$  αδιάστατος εκθέτης. Αν το ρευστό αυτό ρέει μεταξύ δύο παράλληλων και ακίνητων πλακών όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.14, μπορούμε να εκφράσουμε τη διατμητική



Σχήμα 1.14: Ροή εκθετικού ρευστού μεταξύ ακίνητων και παράλληλων πλακών.

τάση  $\tau_{yx}$  γενικεύοντας τη σχέση (1.39) ως εξής

$$\tau_{yx} = \frac{\partial p}{\partial x} y.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω δύο εξισώσεις προκύπτει ότι

$$\frac{du}{dy} = - \left( -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} y^{1/n} \implies du = - \left( -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} y^{1/n} dy. \quad (1.59)$$

Επομένως για να υπολογίσουμε την κατανομή της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα  $y$ , ολοκληρώνουμε την Εξίσωση (1.59) από  $y$  ως  $\alpha$  λαμβάνοντας

$$\begin{aligned} \int_{u(y)}^{u(\alpha)} du &= - \int_y^\alpha \left( -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} y^{1/n} dy = - \left( -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} \int_y^\alpha y^{1/n} dy \\ &= -\frac{n}{n+1} \left( -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} \int_y^\alpha \left( y^{1/n+1} \right)' dy \\ &= -\frac{n}{n+1} \left( -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} \left( \alpha^{1/n+1} - y^{1/n+1} \right). \end{aligned}$$

Θεωρώντας ότι η ταχύτητα του ρευστού μηδενίζεται στο τοίχωμα, προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για την κατανομή της ταχύτητας

$$u(y) = \frac{n}{n+1} \left( -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} \alpha^{1/n+1} \left[ 1 - \left( \frac{y}{\alpha} \right)^{1/n+1} \right]. \quad (1.60)$$

Η μέγιστη ταχύτητα  $u_{\mu\epsilon\gamma}$  λαμβάνει χώρα στο σημείο που ελαχιστοποιείται η δεύτερη παρένθεση στο δεξιό μέλος της Εξίσωσης (1.60). Αυτό συμβαίνει για  $y = 0$ , δηλαδή κατά μήκος του επιπέδου συμμετρίας των πλακών δίνοντας

$$u_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{n}{n+1} \left( -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} \alpha^{1/n+1}. \quad (1.61)$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα (1.60) και (1.61) προκύπτει τελικά ότι

$$u(y) = u_{\mu\epsilon\gamma} \left[ 1 - \left( \frac{y}{\alpha} \right)^{1/n+1} \right]. \quad (1.62)$$

Παρατηρούμε τέλος ότι για  $n = 1$  και  $k = \mu$  (περίπτωση Νευτώνειου ρευστού) οι Εξισώσεις (1.61) και (1.62) απλοποιούνται στις (1.37) και (1.38) αντίστοιχα.

## 1.4 Εξίσωση Bernoulli

### 1.4.1 Για αστρόβιλη ροή

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε την εξίσωση Bernoulli για ένα μη συνεκτικό ρευστό σταθερής πυκνότητας σε μόνιμη και αστρόβιλη ροή. Αμελώντας λοιπόν τον όρο του ιξώδους από την διαφορική διατύπωση των εξισώσεων Navier-Stokes (1.23) για μόνιμη ροή προκύπτει ότι

$$\rho (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + \mathbf{f}. \quad (1.63)$$

Για λόγους που θα γίνουν προφανείς παρακάτω, από το παράρτημα Δ των διανυσματικών ταυτοτήτων ισχύει

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) \quad (1.64)$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ροή είναι αστρόβιλη. Η Εξίσωση (1.63) τότε δέχεται την ισοδύναμη μορφή

$$\frac{\rho}{2} \nabla (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) = -\nabla p + \mathbf{f}.$$

Αν τέλος θεωρήσουμε ότι η μοναδική εξωτερική δύναμη που δρα στο ρευστό είναι αυτή της βαρύτητας με κατεύθυνση προς τον αρνητικό άξονα των  $z$ , μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω αποτέλεσμα σε μορφή συνιστωσών ως εξής

$$\begin{aligned} x \text{ διεύθυνση: } & \left(\frac{\rho}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ y \text{ διεύθυνση: } & \left(\frac{\rho}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ z \text{ διεύθυνση: } & \left(\frac{\rho}{2}\right) \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Με τη βοήθεια δηλαδή της διανυσματικής ταυτότητας (1.64) κατέστη δυνατό να εκφραστούν τα αριστερά μέλη των εξισώσεων ορμής (1.65) συναρτήσεως του μέτρου της ταχύτητας του ρευστού μόνο. Αν επιπλέον παρατηρήσουμε ότι όλα τα δεξιά μέλη αποτελούν τις μερικές παραγώγους της ποσότητας  $p + \rho gz$  (αφού  $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y = 0$ ), προκύπτει

$$\begin{aligned} x \text{ διεύθυνση: } & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho U^2 + p + \rho gz \right) = 0, \\ y \text{ διεύθυνση: } & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \rho U^2 + p + \rho gz \right) = 0, \\ z \text{ διεύθυνση: } & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \rho U^2 + p + \rho gz \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Σύμφωνα λοιπόν με τις Εξισώσεις (1.66) η ποσότητα  $1/2\rho U^2 + p + \rho gz$  δεν εξαρτάται από τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$ ,  $y$ , και  $z$ . Αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο και μόνο όταν η ποσότητα αυτή είναι σταθερή. Επομένως μπορούμε να συνοψίσουμε το αποτέλεσμα της παραγράφου αυτής διατυπώνοντας το θεώρημα Bernoulli σύμφωνα με το οποίο για μία ασυμπίεστη, αστρόβιλη και μόνιμη ροή ενός μη συνεκτικού ρευστού ισχύει ότι

$$\frac{1}{2} \rho U^2 + p + \rho gz = \text{σταθερό}. \quad (1.67)$$

#### ΦΥΣΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ BERNOULLI

Διαιρώντας κάθε όρο με το (σταθερό) ειδικό βάρος του υπό μελέτη ρευστού, το αποτέλεσμα (1.67) δέχεται την ακόλουθη ισοδύναμη μορφή

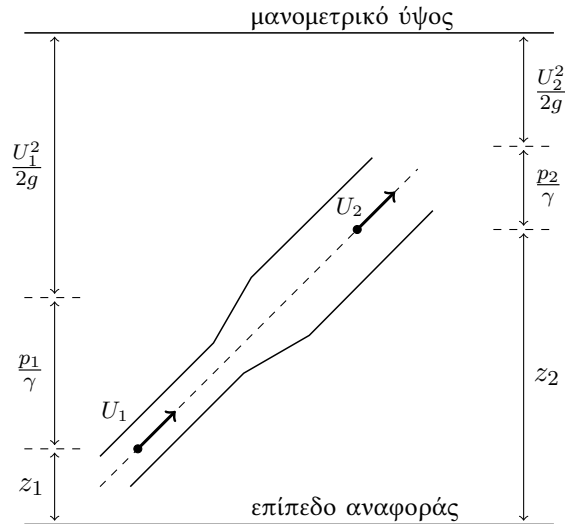
$$\frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{σταθερό}. \quad (1.68)$$

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Με απλή επισκόπηση της Εξίσωσης (1.68) προκύπτει ότι ο κάθε όρος εκφράζεται σε μονάδες  $J/N$ . Ο συγκεκριμένος λόγος μονάδων ισοδύναμα αντιστοιχεί σε μήκος, οπότε μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τους όρους της (1.68) ως εξής:

$U^2/2g$ : ύψος ταχύτητας,  $p/\gamma$ : ύψος πίεσης,  $z$ : ύψος δυναμικού,

όπου το άθροισμα των τριών υψών ονομάζεται ολικό ή μανομετρικό ύψος,  $H$ . Βλέπουμε δηλαδή ότι μπορεί οι μεταβολές των υψών να εξαρτώνται από πολλούς παράγοντες (γεωμετρία, κλίση, παροχή κ.λπ.) στη γενική περίπτωση, αλλά πάντα λαμβάνουν χώρα με τέτοιο τρόπο ώστε το άθροισμά τους να παραμένει σταθερό. Αυτό φαίνεται και στο Σχήμα 1.15 όπου το ολικό ύψος μεταξύ των σημείων 1 και 2 παραμένει σταθερό σε όλο το μήκος του αγωγού.



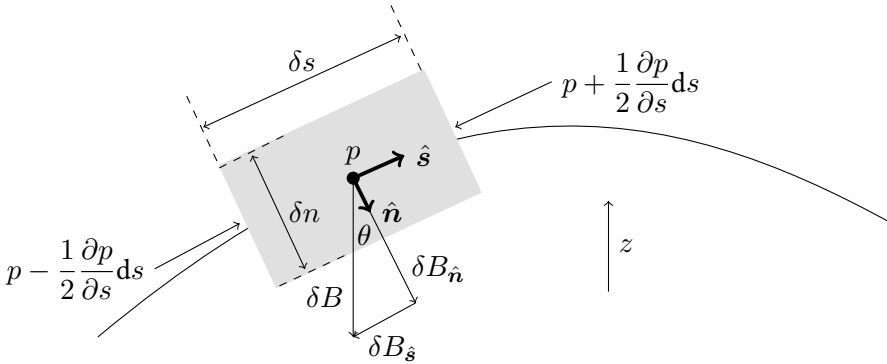
Σχήμα 1.15: Φυσική ερμηνεία της εξίσωσης Bernoulli.

Από το Σχήμα 1.15 και την εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστο ρευστό (1.17) είναι προφανές ότι σε σωληνογραμμές με μικρή (μεγάλη) διατομή η ροή αναπτύσσει μεγάλη (μικρή) ταχύτητα. Επομένως το κινηματικό ύψος εξαρτάται από τη διάμετρο της σωλήνωσης σε κάθε σημείο της. Το δυναμικό ύψος με τη σειρά του εξαρτάται από την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ του αντίστοιχου σημείου και του αυθαίρετου επιπέδου αναφοράς, δίνοντας τέλος στο ύψος πίεσης το υπόλοιπο μέρος του ολικού μανομετρικού,  $H$ . Βλέπουμε δηλαδή ότι το ύψος περιγράφει ενέργεια ανά μονάδα δύναμης, αφού η διατήρηση του ολικού ύψους δεν είναι τίποτα άλλο από την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Το ύψος

ταχύτητας τότε αποτελεί μία ισοδύναμη έκφραση της κινητικής ενέργειας του ρευστού, το δυναμικό ύψος της δυναμικής ενέργειας του λόγω θέσης και τέλος το ύψος πίεσης της ενέργειας ή του έργου που μπορεί να παράξει η δύναμη της πίεσης.

### 1.4.2 Κατά μήκος μίας γραμμής ροής

Μία ισοδύναμη αλλά περισσότερο αυστηρά μαθηματική απόδειξη της εξίσωσης Bernoulli είναι δυνατό να προκύψει θεωρώντας ένα στοιχειώδες ροϊκό στοιχείο διαστάσεων  $\delta s$ ,  $\delta n$  και πάχους  $\delta y$ , που κινείται κατά μήκος μίας γραμμής ροής σύμφωνα με το Σχήμα 1.16. Ο όγκος τότε του στοιχείου αυτού θα ισούται



Σχήμα 1.16: Ροϊκό στοιχείο σε γραμμή ροής και η εξίσωση Bernoulli.

με  $\delta V = \delta s \cdot \delta n \cdot \delta y$ . Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Newton κατά την  $\hat{s}$  διεύθυνση προκύπτει

$$\sum \delta F_{\hat{s}} = \rho \delta V a_{\hat{s}},$$

όπου

$$a_{\hat{s}} = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial U}{\partial s} U,$$

δίνοντας

$$\sum \delta F_{\hat{s}} = \rho \delta V \frac{\partial U}{\partial s} U. \quad (1.69)$$

Κατά τη διεύθυνση της γραμμής ροής ασκούνται δύο δυνάμεις. Η συνιστώσα τους βάρους του και η δύναμη που αναπτύσσεται λόγω μεταβολής της πίεσης στις δύο απέναντι επιφάνειες εμβαδού  $\delta n \cdot \delta y$ . Μπορούμε τότε να γράψουμε ότι

$$\sum \delta F_{\hat{s}} = \delta B_{\hat{s}} + \delta p_{\hat{s}} (\delta n \cdot \delta y).$$

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Τακτοποιώντας τα πρόσημα

$$\begin{aligned}\sum \delta F_s &= -\rho g \delta V \sin \theta + \left[ \left( p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) - \left( p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) \right] (\delta n \cdot \delta y) \\ &= -\rho g \delta V \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial s} ds (\delta n \cdot \delta y) \\ &= - \left( \rho g \sin \theta + \frac{\partial p}{\partial s} \right) \delta V.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω αποτέλεσμα στην Εξίσωση (1.69)

$$\rho \delta V \frac{\partial U}{\partial s} U = - \left( \rho g \sin \theta + \frac{\partial p}{\partial s} \right) \delta V,$$

ή ισοδύναμα

$$\rho U \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \sin \theta = 0. \quad (1.70)$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια ότι κατά τη διεύθυνση της γραμμής ροής

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\partial p}{\partial s}$$

και ότι

$$\sin \theta = \frac{dz}{ds}, \quad U \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{dU^2}{ds},$$

η Εξίσωση (1.70) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{2} \rho dU^2 + dp + \rho g dz = 0.$$

Ολοκληρώνοντας τέλος κατά μήκος της γραμμής ροής

$$\frac{1}{2} U^2 + \int_s \frac{dp}{\rho} + gz = \text{σταθερό}. \quad (1.71)$$

Για να είμαστε σε θέση να επιλύσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα θα πρέπει να είναι γνωστή η μεταβολή της πυκνότητας κατά μήκος της υπό μελέτη γραμμής ροής. Επειδή όμως στις περισσότερες εφαρμογές κάτι τέτοιο δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί, συνήθως γίνεται η θεώρηση ότι το υπό μελέτη ρευστό είναι ασυμπίεστο. Στην περίπτωση αυτή η πυκνότητα είναι σταθερή και η Εξίσωση (1.71) δέχεται την ακόλουθη τελική μορφή

$$\frac{1}{2} \rho U^2 + p + \rho gz = \text{σταθερό}.$$

Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι η παραπάνω εξίσωση παρόλο που αποδείχθηκε για διδιάστατο πεδίο ροής ισχύει και για τρισδιάστατο, αρκεί να ικανοποιούνται οι συνθήκες του μόνιμου πεδίου ροής για μη συνεκτικό και ασυμπίεστο ρευστό κατά μήκος μίας γραμμής ροής.

### 1.4.3 Περιορισμοί της εξίσωσης Bernoulli

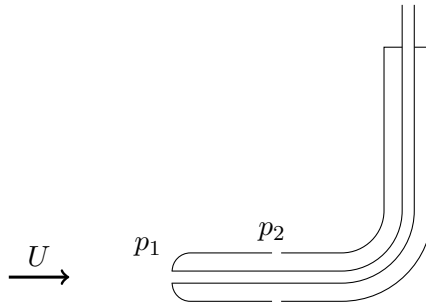
Η εξίσωση Bernoulli είναι μία από τις πιο χρήσιμες εξισώσεις στη μηχανική των ρευστών. Παρ' όλα αυτά απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή καθώς εξαρτάται από μία σειρά παραδοχών που εξασφαλίζουν την εγκυρότητά της. Συγκεκριμένα,

- *Αμελητέα συνεκτικά φαινόμενα:* όλες οι πραγματικές ροές συνοδεύονται από φαινόμενα συνεκτικότητας. Τα φαινόμενα αυτά μπορεί να είναι αμελητέα και να αγνοούνται, όπως για παράδειγμα σε αγωγούς μικρού μήκους, μεγάλης διαμέτρου και για μικρές ταχύτητες ροής. Αντιθέτως, σε μακρύν και στενούς αγωγούς τα φαινόμενα αυτά είναι συνήθως σημαντικά καθιστώντας την εξίσωση Bernoulli μη εφαρμόσιμη.
- *Μόνιμη ροή:* η μονιμότητα της ροής είναι μία βασική προϋπόθεση για την εγκυρότητα της εξίσωσης Bernoulli. Επομένως δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε μεταβατικές ή περιοδικές ροές κατά τη διάρκεια των οποίων οι χρονικές παράγωγοι των ρευστομηχανικών μεγεθών είναι διάφορες του μηδενός.
- *Ασυμπίεστη ροή:* η συνθήκη της ασυμπιεστότητας είναι βασική καθώς για την απόδειξη της εξίσωσης θεωρήσαμε ότι  $d\rho/dt = 0$ . Αξίζει βέβαια να σημειωθεί ότι η συνθήκη αυτή δεν είναι τόσο αυστηρή καθώς, ικανοποιείται από όλα τα υγρά και τα αέρια με αριθμούς Mach μικρότερους του 0,25.
- *Αμελητέα θερμοροή:* η προϋπόθεση αυτή είναι άμεση συνέπεια της παραπάνω, αφού μία σημαντική θερμοροή θα επηρέαζε τη μέση θερμοκρασία του ρευστού και επομένως την πυκνότητά του παραβιάζοντας τη συνθήκη ασυμπιεστότητας.
- *Μηδενικό έργο άξονα:* προφανώς η εξίσωση Bernoulli δεν ισχύει αν στο ρευστό επιδρούν μηχανικές διατάξεις που μεταβάλλουν το ενεργειακό ισοζύγιο του ρευστού όπως αντλίες, στρόβιλοι κ.ά.

## 1.4.4 Εφαρμογές

### 1.4.4.1 Σωλήνας Pitot

Μία από τις σημαντικότερες πρακτικές εφαρμογές της εξίσωσης Bernoulli είναι η μέτρηση της ταχύτητας και της πίεσης με χρήση του σωλήνα Pitot. Η αρχή λειτουργίας των σωλήνων αυτών είναι σχετικά απλή. Αποτελείται από δύο ομόκεντρους σωλήνες οι οποίοι είναι κατασκευασμένοι με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργούν δύο ξεχωριστούς χώρους. Ο εσωτερικός σωλήνας είναι ανοιχτός στον εισερχόμενο αέρα ο οποίος αποκόπτεται στο εσωτερικό του. Αυτό δημιουργεί ένα σημείο αποκοπής σε αυτόν και μία αντίστοιχη πίεση αποκοπής, έστω  $p_1$ . Ο εξωτερικός σωλήνας είναι κλειστός στον εισερχόμενο αέρα και περιέχει μικρές οπές περιμετρικά για τον υπολογισμό της στατικής πίεσης του αέρα που διέρχεται από τις οπές αυτές, έστω  $p_2$ . Αν είναι γνωστή η πυκνότητα,



Σχήμα 1.17: Σωλήνας Pitot.

$\rho$ , μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 και 2 ως εξής

$$\frac{1}{2}\rho U_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + p_2 + \rho g z_2. \quad (1.72)$$

Επειδή όμως το σημείο 1 είναι το σημείο αποκοπής προκύπτει εξ' ορισμού ότι  $U_1 = 0$ . Επίσης οι γραμμές ροής που διέρχονται από τις οπές του εξωτερικού σωλήνα προέρχονται από περιοχές του ρευστού που αντιστοιχούν στην άγνωστη ταχύτητα,  $U$ , που θέλουμε να υπολογίσουμε. Λαμβάνοντας τέλος υπόψη ότι  $z_1 \approx z_2$  η Εξίσωση (1.72) γράφεται

$$U = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}.$$

Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι για το παραπάνω αποτέλεσμα χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικές γραμμές ροής, εισάγοντας ένα μικρό σφάλμα

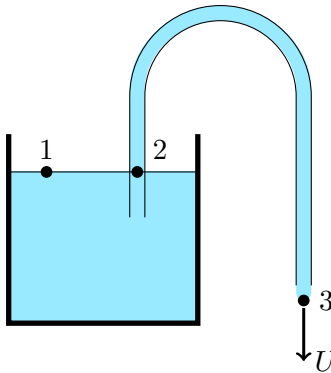
στη μέτρηση της διάταξης. Εντούτοις το σφάλμα αυτό είναι αμελητέο και τις περισσότερες φορές αγνοείται. Τέλος, σε ροές πραγματικών ρευστών λαμβάνεται υπόψη και η επίδραση της τριβής με την εισαγωγή διορθωτικού παράγοντα (έστω  $C$ ) ως εξής

$$U = C \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}, \quad (1.73)$$

όπου  $C < 1$ . Ο συντελεστής αυτός εξαρτάται από διάφορους παράγοντες όπως ο αριθμός Reynolds και δίνεται συνήθως από τον κατασκευαστή μετά από κατάλληλες μετρήσεις βαθμονόμησης.

#### 1.4.4.2 Μετάγχιση ροής

Μία επιπλέον εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli είναι η μετάγχιση υγρού μεταξύ δύο δοχείων χωρίς τη χρήση αντλίας. Για το σκοπό αυτό ας θεωρήσουμε μία δεξαμενή στην οποία βυθίζεται ένας σωλήνας σταθερής διατομής όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.18. Στόχος είναι ο υπολογισμός της πίεσης εισόδου του υγρού στο σωλήνα,  $p_2$ , και η ταχύτητα εξόδου από το σωλήνα,  $U_3$ . Η εξίσωση Bernoulli



Σχήμα 1.18: Μετάγχιση ροής χωρίς τη χρήση αντλίας.

μεταξύ των σημείων 1 και 2 γράφεται

$$\frac{1}{2}\rho U_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + p_2 + \rho g z_2. \quad (1.74)$$

Θεωρώντας ότι  $A_2 \ll A_1$  (ή ισοδύναμα  $U_2 \gg U_1$ ) και ότι  $z_1 = z_2$ , η έκφραση (1.74) απλοποιείται ως εξής

$$p_1 = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + p_2. \quad (1.75)$$

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Με εντελώς ανάλογους συλλογισμούς και χρησιμοποιώντας ότι  $U_2 = U_3$ , η εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων 2 και 3 γράφεται

$$p_2 + \rho g z_2 = p_3 + \rho g z_3 \implies p_3 = p_2 + \rho g(z_2 - z_3). \quad (1.76)$$

Τα αριστερά μέλη των Εξισώσεων (1.75) και (1.76) ισούνται με την ατμοσφαιρική πίεση και επομένως είναι ίσα. Εξισώνοντας λοιπόν τα αντίστοιχα δεξιά βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{2}\rho U_2^2 + p_2 = p_2 + \rho g(z_2 - z_3),$$

ή ισοδύναμα

$$U_2 = U_3 = \sqrt{2g(z_2 - z_3)}. \quad (1.77)$$

Από το αποτέλεσμα αυτό είναι προφανές ότι το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού μέσα στο σωλήνα θα πρέπει να είναι υψηλότερα από το ύψος εξόδου από το σωλήνα καθώς σε διαφορετική περίπτωση το υπό μελέτη φαινόμενο δεν επιδέχεται πραγματικές λύσεις. Τέλος, η ζητούμενη πίεση στην είσοδο του σωλήνα,  $p_2$ , μπορεί να υπολογιστεί από την Εξίσωση (1.77) ως εξής

$$p_2 = p_{\alpha\tau\mu} - \rho g(z_2 - z_3).$$

### 1.4.4.3 Διάμετρος πίδακα σε εκκένωση δεξαμενής

Έστω δεξαμενή η οποία φέρει κυκλική οπή στην κάτω επιφάνειά της με διάμετρο  $D$ . Η δεξαμενή γεμίζει με υγρό και στη συνέχεια αφήνεται να αδειάζει μέσω της οπής. Ζητείται ο υπολογισμός της διαμέτρου,  $d$ , του πίδακα σε απόσταση  $z$  από την κάτω επιφάνεια της δεξαμενής όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.19. Από το θεώρημα Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 και 2 έχουμε

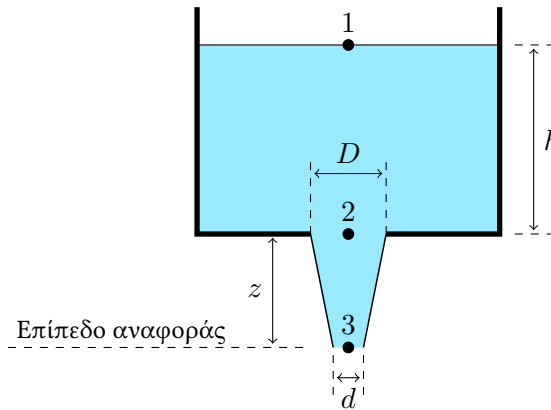
$$\frac{1}{2}\rho U_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + p_2 + \rho g z_2.$$

Θεωρώντας ότι  $U_1 \approx 0$  (λόγω της πολύ μεγάλης επιφάνειας της δεξαμενής),  $z_2 = z$ ,  $z_1 = z + h$  και  $p_1 \approx p_2$ , η παραπάνω εξίσωση απλοποιείται ως εξής

$$\rho g(z + h) = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + \rho g z \implies U_2 = \sqrt{2gh}. \quad (1.78)$$

Εντελώς ανάλογα για τα σημεία 2 και 3, η εξίσωση Bernoulli δίνει

$$gz + \frac{1}{2}U_2^2 = \frac{1}{2}U_3^2 \implies U_3 = \sqrt{2gh + U_2^2} = \sqrt{2g}\sqrt{z + h}. \quad (1.79)$$



Σχήμα 1.19: Υπολογισμός διαμέτρου πίδακα.

Επίσης από την εξίσωση συνέχειας μεταξύ των σημείων 2 – 3 και τις Εξισώσεις (1.78) και (1.79) έχουμε

$$U_2 A_2 = U_3 A_3 \implies \sqrt{2gh} \frac{\pi D^2}{4} = \sqrt{2g\sqrt{z+h}} \frac{\pi d^2}{4},$$

ή ισοδύναμα

$$d = D \sqrt[4]{\frac{h}{z+h}}. \quad (1.80)$$

Η διάμετρος εξόδου,  $d$ , επομένως του νερού από τη δεξαμενή εξαρτάται τόσο από το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας,  $h$ , όσο και από την απόσταση,  $z$ , από την οπή. Δύο ενδιαφέρουσες τιμές για το  $d$  μπορούν να υπολογιστούν από τις ακραίες τιμές του  $h$ .

- $h = 0$ : στην περίπτωση αυτή το δεξιό μέλος στην Εξίσωση (1.80) μηδενίζεται δίνοντας  $d = 0$  που είναι άλλωστε το προφανές αποτέλεσμα αφού  $h = 0$  σημαίνει ότι η δεξαμενή είναι άδεια.
- $h \implies \infty$ : στην περίπτωση αυτή το δεξιό μέλος της Εξίσωσης (1.80) δίνει  $d = D$  ανεξαρτήτως της τιμής του ύψους  $z$ .

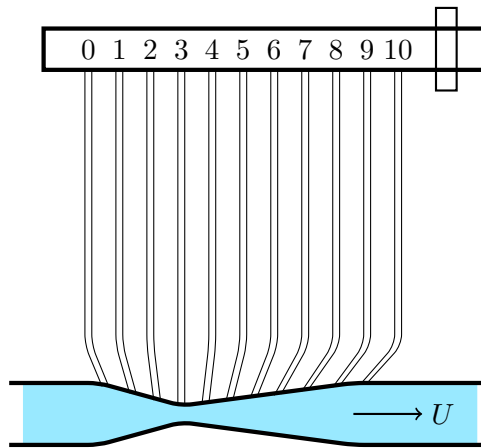
#### 1.4.4.4 Υπολογισμός παροχής - ροόμετρο Ventouri

Οι μετρητές Ventouri αποτελούνται από ένα σωλήνα μεταβλητής διατομής στον οποίο συνδέονται πιεζομετρικοί σωλήνες όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.20. Ο

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

υπολογισμός της παροχής τότε γίνεται με χρήση της εξίσωσης Bernoulli και ειδικότερα χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η πίεση σε μία οριζόντια σωληνογραμμή είναι χαμηλότερη σε περιοχές όπου ελαττώνεται το εμβαδό της διατομής (δηλαδή όπου αυξάνεται η ταχύτητα) και αντίστροφα. Για το σκοπό αυτό ας θεωρήσουμε δύο πιεζομετρικούς σωλήνες, έστω 0 και 3, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υποθέτοντας ότι η ροή είναι μόνιμη, ασυμπίεστη και χωρίς τριβές η εξίσωση Bernoulli παίρνει τη μορφή

$$\frac{U_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \frac{U_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma} + z_3.$$



Σχήμα 1.20: Ροόμετρο Ventouri για τη μέτρηση παροχής όγκου διαμέσω οριζόντιας σωληνογραμμής.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα δύο υπό εξέταση σημεία του ρευστού βρίσκονται στο ίδιο ύψος ( $z_0 = z_3$ ) και θέτοντας  $p_i/\gamma = h_i$  βρίσκουμε

$$\frac{U_0^2}{2g} + h_0 = \frac{U_3^2}{2g} + h_3 \implies \frac{U_0^2}{2g} = \frac{U_3^2}{2g} + (h_3 - h_0). \quad (1.81)$$

Σύμφωνα με την Εξίσωση (1.81) η ταχύτητα  $U_0$  εκφράζεται συναρτήσει των γεωμετρικών χαρακτηριστικών  $h_0$  και  $h_3$  και της ταχύτητας  $U_3$ . Για να απαληφθεί η  $U_3$  από το παραπάνω αποτέλεσμα χρησιμοποιούμε την εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστο ρευστό

$$U_0 A_0 = U_3 A_3, \quad (1.82)$$

όπου  $A_0$  και  $A_3$  τα εμβαδά των διατομών στους πιεζομετρικούς σωλήνες 0 και 3 αντίστοιχα. Από τις Εξισώσεις (1.81) και (1.82) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{U_3^2}{2g} \left( \frac{A_3}{A_0} \right)^2 &= \frac{U_3^2}{2g} + (h_3 - h_0) \implies U_3^2 \left[ 1 - \left( \frac{A_3}{A_0} \right)^2 \right] = 2g(h_0 - h_3) \\ \implies U_3 &= \sqrt{\frac{2g(h_0 - h_3)}{1 - (A_3/A_0)^2}}, \end{aligned}$$

και η παροχή,  $Q$ , τότε ισούται με

$$Q = A_3 \sqrt{\frac{2g(h_0 - h_3)}{1 - (A_3/A_0)^2}}. \quad (1.83)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παροχή είναι θετική πάντα (όπως άλλωστε είναι αναμενόμενο) ανεξαρτήτως των σχετικών εμβαδών. Για παράδειγμα, εάν

$$A_3 > A_0 \implies \frac{A_3}{A_0} > 1 \implies 1 - \left( \frac{A_3}{A_0} \right)^2 < 0.$$

Στην περίπτωση αυτή όμως

$$U_3 - U_0 < 0 \implies p_3 - p_0 > 0 \implies h_0 - h_3 < 0,$$

δίνοντας θετική παροχή. Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν υποθέταμε ότι  $A_3 < A_0$ .

#### 1.4.4.5 Υπολογισμός χρόνου εκκένωσης δεξαμενής

Στην ενότητα αυτή θα υπολογιστεί ο χρόνος που απαιτείται για την εκκένωση δεξαμενής από ένα αρχικό ύψος,  $h_1$ , σε ένα χαμηλότερο ύψος,  $h_2$ , ή ωσότου αδειάσει εντελώς ( $h_2 = 0$ ) σύμφωνα με το Σχήμα 1.21. Για το σκοπό αυτό υποθέτουμε ότι οι διατομές της δεξαμενής και της οπής από την οποία εκκενώνεται η δεξαμενή έχουν εμβαδά  $A_\delta$  και  $A_o$  αντίστοιχα και ότι τόσο η δεξαμενή όσο και η οπή βρίσκονται στην ίδια πίεση. Θεωρούμε επίσης ότι η δεξαμενή περιέχει ασυμπίεστο ρευστό (π.χ. νερό) δίνοντας ίση μετατόπιση ρευστού τόσο μέσω της καθόδου της ελεύθερης επιφάνειάς της όσο και μέσω της εξόδου από την οπή της δεξαμενής. Αν συμβολίσουμε την πρώτη με  $Q_\delta$  και τη δεύτερη με  $Q_o$  παίρνουμε

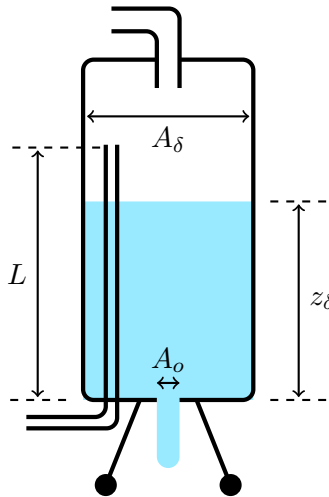
$$Q_\delta = Q_o,$$

ή για ένα στοιχειώδη χρόνο  $dt$

$$-A_\delta \frac{dh}{dt} = A_o C_o U_o, \quad (1.84)$$

όπου ο συντελεστής  $C_o$  εξαρτάται από το σχήμα της οπής (οι τιμές του κυμαίνονται από 0,51 έως 0,98) και  $U_o$  η ταχύτητα εξόδου του ρευστού από την οπή. Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο γεγονός ότι το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας της δεξαμενής ελαττώνεται με το χρόνο δίνοντας αρνητικές τιμές στο αριστερό μέλος της Εξίσωσης (1.84). Στην παραπάνω εξίσωση ο ρυθμός μεταβολής του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας εκφράζεται συναρτήσει γεωμετρικών χαρακτηριστικών (εμβαδά, συντελεστής  $C_o$ ) και της ταχύτητας εξόδου του ρευστού από το στόμιο,  $U_o$ . Για να λυθεί η διαφορική εξίσωση (1.84) η ταχύτητα εφράζεται συναρτήσει του ύψους  $h$  χρησιμοποιώντας την εξίσωση Βερνούλλι μεταξύ των σημείων  $\delta$  (ελεύθερη επιφάνεια) και  $o$  (οπή εξόδου) δίνοντας

$$\frac{U_\delta^2}{2g} + \frac{p_\delta}{\gamma} + z_\delta = \frac{U_o^2}{2g} + \frac{p_o}{\gamma} + z_o.$$



Σχήμα 1.21: Πειραματική διάταξη για τη μέτρηση του χρόνου εκκένωσης δεξαμενής.

Αν στη συνέχεια θεωρηθεί ότι το εμβαδό διατομής της δεξαμενής είναι πολύ μεγαλύτερο από το εμβαδό διατομής της οπής, η ταχύτητα με την οποία κατέρχεται η ελεύθερη επιφάνεια,  $U_\delta$ , είναι πολύ μικρότερη αυτής με την οποία εξέρχεται το νερό από τη δεξαμενή,  $U_o$ , δίνοντας  $U_\delta \ll U_o$ . Χρησιμοποιώντας

## 1.5 Εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

επίσης ότι  $p_\delta = p_o$  και  $z_\delta = h$  βρίσκουμε

$$h = \frac{U_o^2}{2g} \implies U_o = \sqrt{2gh}. \quad (1.85)$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια το αποτέλεσμα (1.85) στην Εξίσωση (1.84) προκύπτει η ζητούμενη διαφορική

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g} \frac{A_o}{A_\delta} C_o dt.$$

Για να υπολογίσουμε επομένως το χρόνο που απαιτείται για να αδειάσει η δεξαμενή,  $t_\alpha$ , θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την παραπάνω έκφραση από το μέγιστο ύψος  $L$  (που αντιστοιχεί στο σωλήνα υπερχειλίσης) στο ελάχιστο. Με τη βοήθεια βασικών κανόνων του ολοκληρωτικού λογισμού βρίσκουμε τότε ότι ο χρόνος εκκένωσης δεξαμενής ισούται με

$$t_\alpha = \frac{1}{C_o} \left( \frac{A_\delta}{A_o} \right) \sqrt{\frac{2L}{g}}.$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, ο χρόνος αυτός είναι ανάλογος της διατομής της ελεύθερης επιφάνειας καθώς και του αρχικού ύψους του ρευστού. Ομοίως, είναι αντιστρόφως ανάλογος της διατομής της οπής εξόδου. Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει για διατομές οποιουδήποτε σχήματος. Στην ειδική περίπτωση κυκλικών διατομών, η παραπάνω εξίσωση λαμβάνει την ισοδύναμη έκφραση

$$t_\alpha = \frac{1}{C_o} \left( \frac{D_\delta}{D_o} \right)^2 \sqrt{\frac{2L}{g}}. \quad (1.86)$$

## 1.5 Εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

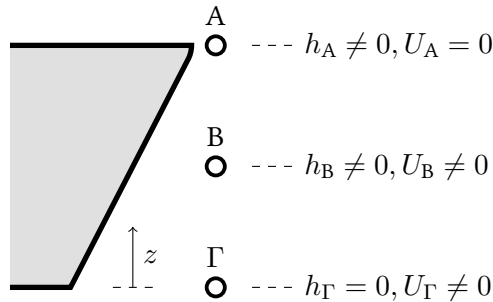
---

### 1.5.1 Απόδειξη της εξίσωσης διατήρησης της ενέργειας

Μία από τις βασικότερες έννοιες στις φυσικές επιστήμες είναι η *ενέργεια*. Με απλά λόγια, η ενέργεια περιγράφει την ικανότητα ενός φυσικού συστήματος να παράγει έργο και εμφανίζεται σε διάφορες μορφές όπως κινητική, δυναμική, θερμική, ηλεκτρική, μαγνητική και άλλες. Ο λόγος για τον οποίο η ενέργεια αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο στην ανάλυση συστημάτων είναι το γεγονός ότι έχει την ικανότητα να μετασχηματίζεται σε οποιαδήποτε μορφή ανάλογα

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

με τις συνθήκες του συστήματος, αλλά και να διατηρεί το συνολικό ποσό της πάντοτε σταθερό. Η διαπίστωση αυτή οδήγησε τους επιστήμονες στη διατύπωση της αρχής διατήρησης της ενέργειας, σύμφωνα με την οποία η συνολική ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος δεν μεταβάλλεται με το χρόνο. Ένα από τα πιο αντιπροσωπευτικά παραδείγματα είναι η πτώση ενός αντικειμένου από ύψωμα όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.22. Το σώμα ξεκινάει ελεύθερη πτώση



Σχήμα 1.22: Διατήρηση ενέργειας κατά την πτώση αντικειμένου από ύψος.

από μηδενική αρχική ταχύτητα σε σταθερό πεδίο βαρύτητας και μετατρέπει τη δυναμική ενέργεια,  $E_{\Delta}$ , σε κινητική,  $E_K$ . Ανεξαρτήτως όμως των τιμών των δύο αυτών ενεργειών, μπορούμε να γράψουμε ότι για κάθε σημείο της τροχιάς του σώματος, η ολική ενέργεια  $E_{ολ} = E_{\Delta} + E_K$  διατηρείται σταθερή δίνοντας

$$\frac{1}{2}mU_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mU_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2}mU_{\Gamma}^2 + mgh_{\Gamma},$$

ή ισοδύναμα

$$mgh_A = \frac{1}{2}mU_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2}mU_{\Gamma}^2.$$

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας μπορεί να γενικευτεί σε οποιοδήποτε μηχανικό, θερμικό, ηλεκτρικό κ.λπ. σύστημα. Στη γενική περίπτωση, η ενέργεια που εισέρχεται στο σύστημα δεν θα είναι ίση με την ενέργεια που εξέρχεται από αυτό, προκαλώντας μία ενεργειακή διαφορά  $\Delta E$ . Στην κατηγορία αυτή ανήκουν για παράδειγμα οι μηχανές εσωτερικής καύσης όπου η ενέργεια εισέρχεται στο σύστημα μέσω των βαλβίδων εισαγωγής και εξέρχεται μέσω των βαλβίδων εξαγωγής. Η διαφορά μεταξύ της (χημικής) ενέργειας εισόδου και της (θερμικής) ενέργειας εξόδου εκφράζει την ικανότητα του συστήματος να παράγει έργο. Η διαπίστωση αυτή ανήκει στον Joule<sup>7</sup> θεμελιώνοντας ουσί-

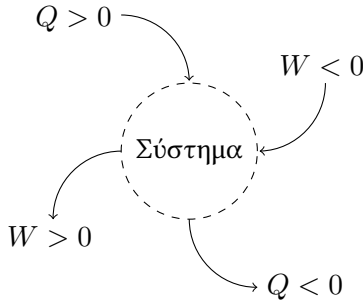
<sup>7</sup> Ο James Prescott Joule, (1818-1889), ήταν Άγγλος φυσικός και μαθηματικός με τεράστια

## 1.5 Εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

αστικά τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο<sup>8</sup> σύμφωνα με τον οποίο

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}_\kappa - \dot{W}_\kappa, \quad (1.87)$$

όπου  $\dot{Q}_\kappa$  και  $\dot{W}_\kappa$  τα καθαρά ποσά θερμότητας και έργου που συναλλάσσονται μεταξύ συστήματος και περιβάλλοντος στη μονάδα του χρόνου αντίστοιχα. Επειδή και τα δύο αυτά μεγέθη δέχονται θετικές ή αρνητικές τιμές ανάλογα με τις εκάστοτε συνθήκες του υπό μελέτη συστήματος, είναι απαραίτητη η υιοθέτηση μίας σύμβασης για τα πρόσημά τους. Στο βιβλίο λοιπόν αυτό, ένα έργο θεωρείται θετικό όταν παράγεται από το σύστημα προς το περιβάλλον και αρνητικό όταν διοχετεύεται στο σύστημα από το περιβάλλον. Ομοίως, η θερμότητα λαμβάνεται ως θετική όταν εισάγεται στο σύστημα και αρνητική όταν εξάγεται από αυτό όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.23.



Σχήμα 1.23: Σύμβαση προσήμου για το έργο και τη θερμότητα.

Μία ισοδύναμη έκφραση της Εξίσωσης (1.87) είναι δυνατόν να προκύψει με απλή επισκόπηση του θεωρήματος μεταφοράς του Reynolds (??) αν θέσουμε  $\mathcal{B}_\Sigma = E$ . Τα αριστερά μέλη τότε είναι ίσα δίνοντας την ακόλουθη έκφραση για τη διατήρηση της ενέργειας

$$\dot{Q}_\kappa - \dot{W}_\kappa = \frac{d}{dt} \int_{OE} \epsilon \rho dV + \int_{EE} \epsilon \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A}. \quad (1.88)$$

Το εντατικό μέγεθος  $\epsilon = E/m$  εκφράζει την συνολική αποθηκευμένη ενέργεια στο σύστημα ανά μονάδα μάζας και ισούται με το άθροισμα της κινητικής,

συνεισφορά στους τομείς του ηλεκτρισμού και της θερμοδυναμικής. Προς τιμήν του η μονάδα ενέργειας στο διεθνές σύστημα μονάδων ονομάστηκε Joule.

<sup>8</sup> Ο αναγνώστης παραπέμπεται στην Ενότητα 1.8.1 για μία εισαγωγή στις βασικές έννοιες της θερμοδυναμικής, που είναι απαραίτητες για τη βαθύτερη κατανόηση της εξίσωσης ενέργειας στη μηχανική των ρευστών.

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

$U^2/2$ , της δυναμικής,  $gz$ , και της εσωτερικής ενέργειας,  $e$ , ανά μονάδα μάζας σύμφωνα με τη σχέση

$$\epsilon = \frac{1}{2}U^2 + gz + e. \quad (1.89)$$

Το δε καθαρό ποσό θερμότητας,  $\dot{Q}_\kappa$ , ισούται με τη συνολική συνεισφορά της ανταλλαγής θερμότητας τόσο μέσω του όγκου ελέγχου (για παράδειγμα μέσω καύσης ή ακτινοβολίας) όσο και μέσω της επιφάνειας ελέγχου (συνεκτικότητα). Η συνεισφορά του πρώτου υπολογίζεται εύκολα από την σχέση

$$\dot{Q} = \int_{OE} \rho \dot{q} dV,$$

όπου  $\dot{q}$  η ανά μονάδα μάζας και χρόνου ενέργεια που εκλύεται από τη θερμική πηγή. Η συνεισφορά της συνεκτικότητας στο καθαρό πόσο θερμότητας είναι δύσκολο να υπολογιστεί γενικά και συνήθως παρουσιάζεται απλά ως  $\dot{Q}_\sigma$ . Προκύπτει τότε ότι

$$\dot{Q}_\kappa = \int_{OE} \rho \dot{q} dV + \dot{Q}_\sigma. \quad (1.90)$$

Όσο αφορά το έργο και το ρυθμό μεταβολής αυτού (δηλαδή την ισχύ) στην Εξίσωση (1.88) διακρίνουμε δύο είδη εξωτερικών δυνάμεων, τις υλικές,  $\mathbf{f}_v$ , και τις επιφανειακές,  $\mathbf{f}_e$ . Οι επιφανειακές με τη σειρά τους χωρίζονται σε δυνάμεις πίεσης και συνεκτικότητας δίνοντας την ακόλουθη σχέση για το καθαρό έργο ανά μονάδα χρόνου,  $\dot{W}_\kappa$ ,

$$\dot{W}_\kappa = - \int_{OE} \mathbf{U} \cdot (\rho \mathbf{f}_v) dV + \int_{EE} p \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A} + \dot{W}_\sigma, \quad (1.91)$$

όπου παρόμοια με τη θερμότητα, το έργο συνεκτικότητας,  $\dot{W}_\sigma$ , είναι δύσκολο να υπολογιστεί αναλυτικά στη γενική περίπτωση ή ισούται με μηδέν αν τα όρια του όγκου ελέγχου παραμένουν σταθερά με το χρόνο. Αντικαθιστώντας τέλος τα αποτελέσματα (1.89), (1.90) και (1.91) στην Εξίσωση (1.88) προκύπτει

$$\begin{aligned} & \int_{OE} \rho \dot{q} dV + \dot{Q}_\sigma + \int_{OE} \mathbf{U} \cdot (\rho \mathbf{f}_v) dV - \int_{EE} p \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A} + \dot{W}_\sigma \\ &= \frac{d}{dt} \int_{OE} \left( \frac{1}{2}U^2 + gz + e \right) \rho dV + \int_{EE} \left( \frac{1}{2}U^2 + gz + e \right) \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Μία ισοδύναμη αλλά περισσότερο συμπαγής σχέση μπορεί να προκύψει με σύμπτυξη των επιφανειακών ολοκληρωμάτων. Μεταφέροντας λοιπόν την έκ-

φραση για το έργο της πίεσης (γνωστό και ως έργο ροής) στο δεξιό μέλος, βρίσκουμε τη γενική μορφή της εξίσωσης ενέργειας για ένα όγκο ελέγχου

$$\begin{aligned} & \int_{OE} \rho \dot{q} dV + \dot{Q}_\sigma + \int_{OE} \mathbf{U} \cdot (\rho \mathbf{f}_v) dV + \dot{W}_\sigma \\ &= \frac{d}{dt} \int_{OE} \left( \frac{1}{2} U^2 + gz + e \right) \rho dV + \int_{EE} \left( \frac{1}{2} U^2 + gz + h \right) \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.92) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{OE} \epsilon \rho dV + \int_{EE} \left( \epsilon + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A} \end{aligned}$$

όπου  $h = e + p/\rho$  η ειδική ενθαλπία. Επομένως η εξίσωση ενέργειας εκφράζει το ενεργειακό ισοζύγιο διαμέσου ενός όγκου ελέγχου ως προς τις εισερχόμενες και εξερχόμενες ροές ενέργειας.

## 1.5.2 Εξίσωση ενέργειας: εφαρμογές

### 1.5.2.1 Ενεργειακή ανάλυση μόνιμων ροών

Μία άμεση συνέπεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας στη ρευστομηχανική, όπως αυτή εκφράζεται από την Εξίσωση (1.92) είναι η περίπτωση μόνιμης ροής σε μία υποθετική μηχανή στην οποία προσδίδεται κάποιο έργο άξονα,  $\dot{W}_\alpha$ . Επειδή οι συνθήκες δεν αλλάζουν στον όγκο ελέγχου, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του ενεργειακού περιεχομένου στον όγκο αυτό θα ισούται με το μηδέν. Το αντίστοιχο ολοκλήρωμα τότε στην Εξίσωση (1.92) μηδενίζεται δίνοντας

$$\dot{Q}_\kappa - \dot{W}_\alpha = \int_{EE} \left( \frac{1}{2} U^2 + gz + h \right) \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A}.$$

Το εναπομείναν επιφανειακό ολοκλήρωμα μπορεί να γραφτεί σε μία απλούστερη μορφή λαμβάνοντας υπόψη ότι ένας όγκος ελέγχου αποτελείται έστω από  $\mu$  εξόδους και  $\nu$  εισόδους δίνοντας

$$\dot{Q}_\kappa - \dot{W}_\alpha = \sum_{\mu} \dot{m} \left( \frac{1}{2} U^2 + gz + h \right) - \sum_{\nu} \dot{m} \left( \frac{1}{2} U^2 + gz + h \right), \quad (1.93)$$

όπου το γινόμενο  $\rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A}$  αντικαταστάθηκε από την παροχή μάζας,  $\dot{m}$ , καθώς και οι δύο ποσότητες εκφράζονται σε  $kg/s$ . Αν επίσης λάβουμε υπόψη ότι στις περισσότερες τεχνικές εφαρμογές υπάρχει μία μόνο είσοδος (δείκτης 1) και μία έξοδος (δείκτης 2) σταθερής παροχής μάζας, προκύπτει

$$\dot{Q}_\kappa - \dot{W}_\alpha = \dot{m} \left[ \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + (h_2 - h_1) \right],$$

ή ισοδύναμα

$$\dot{Q}_\kappa - \dot{W}_\alpha = \dot{m} \left[ \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + (e_2 - e_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} \right]. \quad (1.94)$$

Επιπλέον, για ιδανικές ροές χωρίς απώλειες θερμότητας και τριβές ισχύει ότι

$$\dot{Q}_\kappa = \dot{m} (e_2 - e_1)$$

και η Εξίσωση (1.94) απλοποιείται ως εξής

$$-\dot{W}_\alpha = \dot{m} \left[ \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} \right].$$

Στην περίπτωση που το έργο άξονα παύσει ή μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο, το παραπάνω αποτέλεσμα γράφεται

$$\frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0. \quad (1.95)$$

Πολλαπλασιάζοντας στη συνέχεια το αποτέλεσμα (1.95) με τη σταθερή πυκνότητα  $\rho$  και χωρίζοντας όλα τα μεγέθη ως προς τα σημεία 1 και 2 προκύπτει

$$\frac{1}{2}\rho U_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + \rho g z_2 + p_2. \quad (1.96)$$

Η Εξίσωση (1.96) αποτελεί τη γνωστή έκφραση για την εξίσωση Bernoulli όπως αυτή διατυπώθηκε στην έκφραση (1.67). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι σε μία απλή ροή χωρίς απώλειες και παραγωγή ή κατανάλωση έργου, η γενικευμένη εξίσωση ενέργειας (1.92) απλοποιείται στη γνωστή εξίσωση Bernoulli.

Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι η υπόθεση της απώλειας τριβών δεν είναι δυνατό να λάβει χώρα σε πραγματικές διεργασίες οι οποίες συνοδεύονται πάντα από υποβάθμιση του ενεργειακού περιεχομένου τους υπό μορφή θερμότητας. Στη γενική λοιπόν περίπτωση, ένα ρευστό μπορεί να δέχεται, να μετασχηματίζει και να απορρίπτει ενέργεια. Ένας τρόπος για να συμπεριλάβουμε τις διεργασίες αυτές και να οδηγηθούμε σε μία έκφραση για την εξίσωση ενέργειας που θα περιγράψει καλύτερα τις πραγματικές διεργασίες είναι να ορίσουμε τα παρακάτω ως εξής:

- $h_\pi$  την ενέργεια που προστίθεται στο ρευστό μέσω μία μηχανής, όπως για παράδειγμα μία αντλία,
- $h_{\alpha\phi}$  την ενέργεια που αφαιρείται από το ρευστό σε μία μηχανή, όπως για παράδειγμα ένας κινητήρας,

- $h_f$  την ενέργεια που χάνεται από το ρευστό λόγω τριβών.

Για λόγους διαστατικής συνέχειας οι παραπάνω όροι είναι δυνατό να ενσωματωθούν στην εξίσωση Bernoulli αν αυτή εκφραστεί σε μονάδες ύψους σύμφωνα με τη σχέση (1.68) δίνοντας

$$\frac{U_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + (h_\pi - h_{\alpha\phi}) = \frac{U_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + h_f. \quad (1.97)$$

Το αποτέλεσμα (1.97) αποτελεί τη γενική έκφραση της εξίσωσης ενέργειας και χρησιμοποιείται ευρέως για τη μελέτη του ενεργειακού ισοζυγίου των περισσότερων εγκαταστάσεων. Δύο παρατηρήσεις όμως χρήζουν επισήμανσης. Πρώτον, στη μέχρι τώρα ανάλυση δεν συμπεριλήφθηκε η επίδραση της θερμότητας καθώς στις περισσότερες περιπτώσεις είναι αμελητέα και παραλείπεται. Δεύτερον, το μέγεθος  $h_f$  εκφράζει αποκλειστικά τις απώλειες ενέργειας ανά μονάδα βάρους του ρευστού και δεν σχετίζεται καθόλου με άλλες μορφές απωλειών (όπως οι μηχανικές απώλειες για παράδειγμα) που αναπτύσσονται κατά τη λειτουργία των μηχανών.

### 1.5.2.2 Ο διορθωτικός συντελεστής της κινητικής ενέργειας, $\alpha$

Στο σημείο αυτό είναι πλέον προφανές ότι η εξίσωση Bernoulli αποτελεί μία από τις βασικότερες εξισώσεις στη μηχανική των ρευστών. Μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά μίας ροής με χρήση απλών αλλά συνάμα σημαντικών εννοιών. Μία από αυτές είναι και η χρησιμοποίηση της μέσης ταχύτητας σε κάθε διατομή της υπό μελέτη σωληνογραμμής. Είναι όμως γνωστό ότι στην πραγματικότητα η ταχύτητα ελαττώνεται όσο πλησιάζουμε τα τοιχώματα (συνθήκη μη ολίσθησης) και αυξάνεται όσο απομακρυνόμαστε από αυτά. Επειδή λοιπόν η ταχύτητα δεν είναι σταθερή στη διατομή, η πραγματική μέση τιμή του κινηματικού μέρους,  $\overline{E_\kappa}$ , όπως αυτή εκφράζεται από την ποσότητα

$$\overline{E_\kappa} = \overline{\frac{1}{2}\rho U^2},$$

μπορεί να μην είναι ίση με την αντίστοιχη έκφραση,  $\overline{E'_\kappa}$ , που προκύπτει χρησιμοποιώντας τη μέση τιμή της ταχύτητας

$$\overline{E_\kappa} = \frac{1}{2}\rho \overline{U}^2.$$

Η ανακολουθία αυτή εμφανίζεται για παράδειγμα στην Εξίσωση (1.93) όπου χρησιμοποιείται η μέση τιμή της ταχύτητας στην είσοδο και την έξοδο της

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

μηχανής παρόλο που η κατανομή της δεν είναι σταθερή. Ένας τρόπος για να αντιμετωπιστεί η παραπάνω ασυνέχεια είναι η προσθήκη ενός διορθωτικού παράγοντα, έστω  $\alpha$ , στην έκφραση της κινητικής ενέργειας. Με τον τρόπο αυτό θα είναι δυνατό να εκφραστεί η μέση τιμή της κινητικής ενέργειας συναρτήσει της μέσης τιμής της ταχύτητας σύμφωνα με τη σχέση

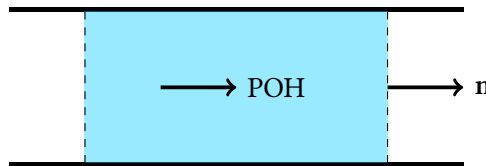
$$\overline{E_k} = \alpha \frac{1}{2} \rho \overline{U}^2.$$

Ξεκινώντας λοιπόν από τη γενική εξίσωση για το ρυθμό εισροής της κινητικής ενέργειας σε ένα σύστημα, μπορούμε να γράψουμε την παρακάτω σχέση μεταξύ της μέσης τιμής της ταχύτητας,  $\overline{U}$ , και του διορθωτικού παράγοντα,  $\alpha$ , στην υπό εξέταση διατομή της επιφάνειας ελέγχου

$$\int_A \frac{1}{2} U^2 \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A} = \alpha \cdot \frac{1}{2} \overline{U}^2 \int_A \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A}, \quad (1.98)$$

σύμφωνα με την οποία η μέση τιμή της κινητικής ενέργειας όπως αυτή εκφράζεται από το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος ισούται με το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος το οποίο με τη σειρά του εξαρτάται από τη μέση τιμή της ταχύτητας και τον διορθωτικό παράγοντα. Είναι επομένως φανερό ότι για να χρησιμοποιηθεί η απλοποιημένη έκφραση για την κινητική ενέργεια που περιέχει τη μέση τιμή της ταχύτητας, θα πρέπει να υπολογιστεί η τιμή του  $\alpha$ .

Ας θεωρήσουμε λοιπόν την απλή περίπτωση μονοδιάστατης ροής και έστω  $\mathbf{n}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα με φορά προς τα έξω από την επιφάνεια ελέγχου σύμφωνα με το Σχήμα 1.24. Μπορούμε τότε να γράψουμε την παρακάτω



Σχήμα 1.24: Υπολογισμός του διορθωτικού παράγοντα κινητικής ενέργειας  $\alpha$  για μονοδιάστατη ροή.

έκφραση για τη μέση τιμή της ταχύτητας

$$\overline{U} = \frac{1}{A} \int_A \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{A} \int_A (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) dA = \frac{1}{A} \int_A U dA. \quad (1.99)$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα (1.99) στην Εξίσωση (1.98) βρίσκουμε

$$\int_A \frac{1}{2} U^2 \rho U dA = \alpha \cdot \frac{1}{2} \overline{U}^2 \int_A \rho U dA \implies \int_A U^3 dA = \alpha \cdot \overline{U}^2 \int_A U dA, \quad (1.100)$$

## 1.5 Εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

απαλείφοντας τον κοινό όρο  $\rho/2$  και από τα δύο μέλη. Συνδυάζοντας τέλος τις (1.99) και (1.100) προκύπτει ότι

$$\int_A U^3 dA = \alpha \cdot A \bar{U}^3,$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{U}{\bar{U}} \right)^3 dA. \quad (1.101)$$

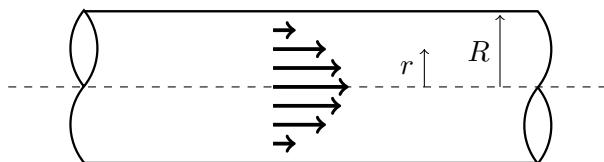
Ο διορθωτικός παράγοντας αποδεικνύεται ότι είναι πάντα μεγαλύτερος ή ίσος της μονάδας και η τιμή του εξαρτάται από την εκάστοτε κατανομή της ταχύτητας. Η διορθωμένη τότε έκφραση της Εξίσωσης (1.93) παίρνει τη μορφή

$$\dot{Q}_\kappa - \dot{W}_\alpha = \sum_\mu \dot{m} \left( \alpha \frac{U^2}{2} + gz + h \right) - \sum_\nu \dot{m} \left( \alpha \frac{U^2}{2} + gz + h \right).$$

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο υπολογισμός της τιμής του συντελεστή  $\alpha$  για την περίπτωση παραβολικής ροής σε αγωγό σταθερής διατομής.

### 1.5.2.3 Τιμή του διορθωτικού συντελεστή $\alpha$ για στρωτή ροή σε σωλήνα

Ας υποθέσουμε την περίπτωση στρωτής ροής υγρού σταθερής πυκνότητας διαμέσου ενός αγωγού σταθερής διαμέτρου όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.25. Από



Σχήμα 1.25: Υπολογισμός του συντελεστή διόρθωσης κινητικής ενέργειας για στρωτή ροή σε κυλινδρικό αγωγό.

την Εξίσωση (1.47) είναι γνωστό ότι η κατανομή της ταχύτητας στην ακτινική διεύθυνση ισούται με

$$U(r) = 2\bar{U} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right].$$

Με απλή αντικατάσταση της σχέσης αυτής στην Εξίσωση (1.101) είναι δυνατό να υπολογιστεί ο συντελεστής,  $\alpha$ . Θεωρώντας ότι για έναν αγωγό σταθερής

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

διατομής ισχύει  $dA = 2\pi r dr$  προκύπτει

$$\alpha = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \frac{8\bar{U}^3}{\bar{U}^3} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3 2\pi r dr = \frac{16}{R^2} \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3 r dr.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί εύκολα να υπολογιστεί με αλλαγή μεταβλητής. Θέτοντας

$$x = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2, \\ dx = -\frac{2r}{R^2} dr \implies r dr = -\frac{R^2}{2} dx,$$

και αντικαθιστώντας στην παραπάνω έκφραση βρίσκουμε τελικά ότι

$$\alpha = \frac{16}{R^2} \int_1^0 x^3 \left(-\frac{R^2}{2}\right) dx = 8 \int_0^1 x^3 dx = 8 \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2.$$

Επομένως ο διορθωτικός συντελεστής της κινητικής ενέργειας για στρωτή ροή σε αγώγ σταθερής διατομής ισούται με δύο.

### 1.6 Θεώρημα του Kelvin

Στην ενότητα αυτή θα αποδειχθεί το θεώρημα του Kelvin σύμφωνα με το οποίο η υλική παράγωγος της κυκλοφορίας γύρω από μία κλειστή καμπύλη ισούται με το μηδέν για μη συνεκτικό και βαροτροπικό<sup>9</sup> (barotropic) ρευστό στο οποίο ασκούνται συντηρητικές εξωτερικές δυνάμεις.

Από την εξίσωση ορισμού για την κυκλοφορία (??) ισχύει ότι

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{D\mathbf{U}}{Dt} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \oint_C \mathbf{U} \cdot \frac{D}{Dt} d\boldsymbol{\ell}. \quad (1.102)$$

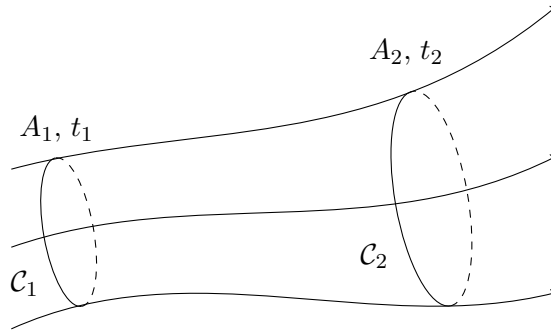
Με τη βοήθεια επίσης της Εξίσωσης (1.23), η υλική παράγωγος της ταχύτητας για ένα ρευστό με  $\nu = 0$  και  $\mathbf{f} = -\nabla\mathcal{U}$  παίρνει τη μορφή

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} = -\nabla\mathcal{U} - \frac{\nabla p}{\rho},$$

δίνοντας

$$\oint_C \frac{D\mathbf{U}}{Dt} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \oint_C \left(\nabla\mathcal{U} + \frac{\nabla p}{\rho}\right) \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int_A \nabla \times \left(\nabla\mathcal{U} + \frac{\nabla p}{\rho}\right) \cdot \mathbf{n} dA,$$

<sup>9</sup> Βαροτροπικό ονομάζεται εκείνο το ρευστό του οποίου η πυκνότητα είναι συνάρτηση της πίεσης μόνο.



Σχήμα 1.26: Κυκλοφορία κατά μήκος υλικής καμπύλης που μεταβάλλεται με το χρόνο.

όπου χρησιμοποιήθηκε το θεώρημα του Stokes για την μετατροπή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος σε επιφανειακό. Επειδή όμως ο στροβιλισμός της κλίσης οποιασδήποτε βαθμωτής συνάρτησης ισούται με το μηδέν (αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο το θεώρημα του Kelvin απαιτεί οι εξωτερικές δυνάμεις να είναι συντηρητικές) προκύπτει ότι

$$\nabla \times \left( \nabla \mathcal{U} + \frac{\nabla p}{\rho} \right) = \nabla \times \nabla \mathcal{U} + \nabla \times \left( \frac{\nabla p}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times \nabla p),$$

δίνοντας

$$\oint_C \frac{D\mathbf{U}}{Dt} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_A \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times \nabla p) \cdot \mathbf{n} dA. \quad (1.103)$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέλος της Εξίσωσης (1.102) γράφεται

$$\mathbf{U} \cdot \frac{D}{Dt} d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{U} \cdot d \frac{D\boldsymbol{\ell}}{Dt} = \mathbf{U} \cdot d \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\ell}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{\ell} \right] = \mathbf{U} \cdot d\mathbf{U} = \frac{1}{2} d(\mathbf{U}^2),$$

και τότε

$$\oint_C \mathbf{U} \cdot \frac{D}{Dt} d\boldsymbol{\ell} = \frac{1}{2} \oint_C d(\mathbf{U}^2). \quad (1.104)$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια τα αποτελέσματα (1.103) και (1.104) στην Εξίσωση (1.102) έχουμε

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_A \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times \nabla p) \cdot \mathbf{n} dA + \frac{1}{2} \oint_C d(\mathbf{U}^2). \quad (1.105)$$

Ο προσεκτικός αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι και τα δύο επικαμπύλια ολοκληρώματα της Εξίσωσης (1.105) ισούται με μηδέν. Αυτό ισχύει διότι έχοντας

θεωρήσει το ρευστό σαν βαροτροπικό ισχύει ότι  $\rho = \rho(p) \implies \nabla \rho \times \nabla p = 0$ . Επίσης, καθώς η ολοκληρώση λαμβάνει χώρα γύρω από μία υλική καμπύλη, η αρχική και η τελική ταχύτητα συμπίπτουν δίνοντας  $d(\mathbf{U}^2) = 0$ . Αποδείχτηκε επομένως ότι

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0, \quad (1.106)$$

δηλαδή η κυκλοφορία παραμένει σταθερή γύρω από μία υλική καμπύλη για μη συνεκτικό και βαροτροπικό ρευστό, στο οποίο ασκούνται συντηρητικές εξωτερικές δυνάμεις. Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν θεωρούσαμε ασυμπίεστο αντί βαροτροπικό ρευστό, καθώς στην περίπτωση αυτή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της Εξίσωσης (1.103) θα ήταν επίσης ίσο με το μηδέν.

Μία ισοδύναμη ερμηνεία του αποτελέσματος (1.106) είναι ότι η κυκλοφορία,  $\Gamma$ , παραμένει αναλλοίωτη γύρω από μία υλική καμπύλη δεδομένου των παραπάνω προϋποθέσεων, παρόλο που η καμπύλη αυτή μπορεί να παραμορφώνεται εξαιτίας της ροής. Συνεπώς, οποιαδήποτε ροή που είναι αρχικά παντού αστρόβιλη δεν μπορεί να αναπτύξει κυκλοφορία. Τέλος, μία υλική επιφάνεια που ταυτίζεται με την επιφάνεια ενός σωλήνα στροβιλότητας κάποια στιγμή θα συνεχίσει να αποτελεί επιφάνεια του σωλήνα αυτού για πάντα.

## 1.7 Εξίσωση στροβιλότητας

Στην ενότητα αυτή αναπτύσσεται η εξίσωση που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά της στροβιλότητας για ασυμπίεστο και Νευτώνειο ρευστό. Ξεκινώντας από τις εξισώσεις Navier-Stokes (1.23) και εφαρμόζοντας τη διανυσματική ταυτότητα

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{U}^2) - \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}),$$

προκύπτει

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{U}^2) - \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) = \frac{1}{\rho} \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{U}. \quad (1.107)$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τον ορισμό της στροβιλότητας (??) και λαμβάνοντας το στροβιλισμό της Εξίσωσης (1.107) έχουμε

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \times [\nabla (\mathbf{U}^2)] - \nabla \times (\mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla \times \nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}.$$

Ο δεύτερος όρος τόσο στο αριστερό όσο και στο δεξιό μέλος μηδενίζεται αφού για κάθε βαθμωτή συνάρτηση,  $\Phi$ , ισχύει  $\nabla \times \nabla \Phi = 0$  δίνοντας

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{f} + \nu \nabla^2 \mathbf{\Omega}. \quad (1.108)$$

Χρησιμοποιώντας τέλος ότι

$$\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{\Omega}) = \mathbf{U} (\nabla \cdot \mathbf{\Omega}) - \mathbf{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{U}) - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{\Omega} + (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{U}, \quad (1.109)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι η κλίση των πεδίων στροβιλότητας και ταχύτητας μηδενίζονται, η Εξίσωση (1.108) λαμβάνει την τελική μορφή

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{\Omega} = (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{f} + \nu \nabla^2 \mathbf{\Omega}. \quad (1.110)$$

Το αποτέλεσμα (1.110) αποτελεί την εξίσωση στροβιλότητας στις τρεις διαστάσεις για ασυμπιεστο και Νευτώνειο ρευστό και μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί συναρτήσει της υλικής παραγώγου ως εξής

$$\frac{D\mathbf{\Omega}}{Dt} = (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nu \nabla^2 \mathbf{\Omega}, \quad (1.111)$$

απουσία εξωτερικών δυνάμεων. Στην περίπτωση τέλος διδιάστατων ροών, η Εξίσωση (1.111) απλοποιείται στην

$$\frac{D\Omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \Omega, \quad (1.112)$$

αφού το πεδίο στροβιλότητας είναι παντού κάθετο στο επίπεδο της ροής (βλέπε λυμένα παραδείγματα).

Μία άμεση συνέπεια του αποτελέσματος (1.112) είναι ότι για μη συνεκτική ροή ή για ροή με αμελητέα συνεκτικότητα, οι γραμμές στροβιλότητας δεν μεταβάλλονται με το χρόνο αφού για αυτές ισχύει ότι  $D\Omega/Dt = 0$ . Όταν όμως η συνεκτικότητα είναι σημαντική και δεν υπάρχουν εμπόδια ή όρια να επηρεάζουν τη διάχυσή της, η στροβιλότητα του ρευστού εξαπλώνεται μακριά από την πηγή καταλαμβάνοντας μία περιοχή ανάλογη του γινομένου  $\nu \cdot t$  μετά από χρόνο  $t$ . Βλέπουμε δηλαδή ότι επειδή η Εξίσωση (1.112) δεν είναι τίποτα άλλο από μία εξίσωση διάχυσης παρόμοια με αυτή που περιγράφει τη μετάδοση θερμότητας, η κινηματική συνεκτικότητα διαδραματίζει ουσιαστικά τον ίδιο ρόλο με αυτόν του συντελεστή μετάδοσης θερμότητας,  $\kappa$ . Όπως δηλαδή ο συντελεστής  $\kappa$  είναι υπεύθυνος για τη διάχυση της θερμότητας, έτσι και η κινηματική συνεκτικότητα,  $\nu$ , είναι υπεύθυνη για τη διάχυση της στροβιλότητας.

## 1.8 Εξίσωση του Crocco

### 1.8.1 Στοιχεία θερμοδυναμικής

Η θερμοδυναμική ασχολείται με τη συσχέτιση μεταξύ της θερμότητας, της ενέργειας και του έργου ενός συστήματος. Η έννοια της θερμότητας αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο για την ανάπτυξη της θερμοδυναμικής και περιγράφει την ποσότητα της ενέργειας που ρέει από ένα σώμα σε ένα άλλο, εξαιτίας της διαφοράς θερμοκρασίας τους. Για το λόγο αυτό, η θερμότητα δεν θεωρείται εσωτερική ιδιότητα ενός συστήματος (όπως για παράδειγμα η εσωτερική ενέργεια), αλλά ενέργεια *σε μεταφορά*. Η επιστήμη της θερμοδυναμικής θεμελιώνεται με τη βοήθεια διαφόρων φυσικών μεγεθών όπως η θερμοκρασία, η ενθαλπία και η εντροπία και την διατύπωση των τεσσάρων θερμοδυναμικών νόμων που παρουσιάζονται παρακάτω.

#### 1.8.1.1 Νόμοι της θερμοδυναμικής

*Μηδενικός θερμοδυναμικός νόμος:* ο μηδενικός θερμοδυναμικός νόμος αναφέρει ότι δύο συστήματα που βρίσκονται σε θερμοδυναμική ισορροπία θα έχουν αναγκαστικά την ίδια θερμοκρασία. Μία ισοδύναμη διατύπωση προκύπτει θεωρώντας τρία διαφορετικά συστήματα. Αν δύο από αυτά βρίσκονται σε θερμοδυναμική ισορροπία ως προς το τρίτο, τότε θα βρίσκονται και σε θερμοδυναμική ισορροπία μεταξύ τους.

*Πρώτος θερμοδυναμικός νόμος:* ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας σε θερμοδυναμικές διεργασίες και συσχετίζει τις έννοιες της θερμότητας, του έργου και της εσωτερικής ενέργειας. Σύμφωνα λοιπόν με τον πρώτο νόμο, όταν προσφερθεί θερμότητα  $Q$  σε ένα σύστημα, μέρος αυτής θα παραμείνει στο σύστημα αυξάνοντας την εσωτερική του ενέργεια κατά  $\Delta E$ , ενώ το υπόλοιπο θα διοχετευτεί στο περιβάλλον με τη μορφή έργου  $W$  από το σύστημα δίνοντας

$$Q = \Delta E + W.$$

Η ενέργεια επομένως δεν δημιουργείται ούτε καταστρέφεται, παρά μόνο μετατρέπεται από μία μορφή σε μία άλλη.

*Δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος:* ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής αποτελεί μία από τις σημαντικότερες διατυπώσεις για την κατανόηση του φυσικού κόσμου. Περιγράφει με απόλυτη επιτυχία την κατεύθυνση με την οποία λαμβάνουν χώρα τα φαινόμενα και ορίζει ποια από αυτά δεν θα παρατηρηθούν

ποτέ στον πραγματικό κόσμο, παρόλο που δεν παραβιάζουν τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο. Για παράδειγμα, από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι δύο σώματα που βρίσκονται σε θερμοδυναμική ισορροπία, θα παραμείνουν σε ισορροπία για πάντα αν δε μεταβληθούν οι συνθήκες που τα περιγράφουν. Επομένως δεν θα παρατηρηθεί αυθόρμητη μεταφορά θερμότητας από το ένα στο άλλο. Ισοδύναμα, όλα τα συστήματα μεταβαίνουν με το χρόνο από καταστάσεις υψηλότερης θερμοκρασίας σε καταστάσεις χαμηλότερης αν δεν εφαρμοστεί σε αυτά εξωτερική παρέμβαση. Όλα δηλαδή τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στο σύμπαν εξελίσσονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η αταξία που τα χαρακτηρίζει να αυξάνεται μονότονα. Η διαπίστωση αυτή οδήγησε στην εισαγωγή ενός νέου μεγέθους που ονομάστηκε εντροπία (entropy),  $S$ , για την περιγραφή της αταξίας που χαρακτηρίζει ένα σύστημα και ορίζεται για μία αντιστρεπτή μεταβολή από την εξίσωση

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Επειδή η εντροπία δεν εξαρτάται από τη ακολουθούμενη διαδρομή παρά μόνο από την αρχική και τελική κατάσταση του συστήματος, η μεταβολή της είναι τέλειο διαφορικό και συμβολίζεται με  $d$ . Αντιθέτως, η μεταβολή της θερμότητας εξαρτάται από τη διαδρομή που επιλέχθηκε και για το λόγο αυτό θεωρείται μη τέλειο διαφορικό και συμβολίζεται με  $\delta$ .

Ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής τότε ορίζει ότι η εντροπία για κάθε μεταβολή ενός απομονωμένου συστήματος δε θα μειώνεται ποτέ, δηλαδή

$$\Delta S \geq 0,$$

όπου η ισότητα ισχύει για αντιστρεπτές μεταβολές ενώ η ανισότητα για μη αντιστρεπτές. Δύο ισοδύναμες εκφράσεις του δεύτερου νόμου αποτελούν οι διατυπώσεις των Clausius και Kelvin-Planck. Σύμφωνα λοιπόν με τη διατύπωση του Clausius, δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί μηχανή η οποία θα λειτουργεί σε κύκλο, έχοντας σαν μοναδικό αποτέλεσμα την μεταφορά θερμότητας από ένα σώμα χαμηλότερης θερμοκρασίας προς ένα σώμα υψηλότερης θερμοκρασίας. Σύμφωνα επίσης με τη διατύπωση των Kelvin-Planck, είναι αδύνατο να κατασκευαστεί θερμική μηχανή που να μετατρέπει εξ' ολοκλήρου τη θερμότητα σε ωφέλιμο μηχανικό έργο.

*Τρίτος θερμοδυναμικός νόμος:* ο τρίτος νόμος της θερμοδυναμικής αναφέρει ότι η εντροπία ενός συστήματος καθώς αυτό πλησιάζει τη θερμοκρασία του απόλυτου μηδενός τείνει σε μία σταθερή τιμή. Καθώς στο απόλυτο μηδέν το σύστημα

θα πρέπει να βρίσκεται στην κατάσταση της ελάχιστης δυνατής θερμικής ενέργειας, τυπικά η σταθερή αυτή τιμή της εντροπίας λαμβάνεται ίση με μηδέν.

### 1.8.1.2 Έργο και ενθαλπία

Από τη μηχανική γνωρίζουμε ότι το έργο που παράγεται από ή προς ένα σύστημα από μία δύναμη  $F$ , κατά μήκος μίας διαδρομής  $s$  δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds. \quad (1.113)$$

Επειδή όμως στη θερμοδυναμική περιλαμβάνονται και διεργασίες που δεν σχετίζονται με τη μηχανική, είναι απαραίτητη η υιοθέτηση ενός γενικότερου ορισμού για το έργο. Ορίζουμε λοιπόν σαν έργο που παράγει ένα σύστημα προς το περιβάλλον του, εκείνη τη διεργασία της οποίας το μοναδικό αποτέλεσμα σε οτιδήποτε εξωτερικά του συστήματος *θα μπορούσε να είναι* η ανύψωση ενός βάρους. Η γενίκευση του παραπάνω ορισμού για το έργο οφείλεται στο γεγονός ότι δεν απαιτείται η πραγματική ανύψωση ενός αντικειμένου για την παραγωγή έργου, αλλά στο γεγονός ότι η διεργασία αυτή *θα μπορούσε να έχει* σαν μοναδικό αποτέλεσμα την ανύψωση του αντικειμένου. Μία άμεση συνέπεια της Εξίσωσης (1.113) είναι ότι για τον υπολογισμό του έργου θα πρέπει να είναι γνωστή η δύναμη κατά μήκος της διαδρομής και επομένως το έργο δεν αποτελεί καταστατικό μέγεθος του συστήματος. Η τιμή του επομένως εξαρτάται από τη διαδρομή αποτελώντας μη τέλειο διαφορικό όπως η θερμότητα.

Μία ισοδύναμη έκφραση για το στοιχειώδες έργο  $\delta W$  δίνεται από την έκφραση  $\delta W = p dV$ , όπου  $p$  η πίεση και  $V$  ο όγκος. Η ολοκλήρωση της εξίσωσης αυτής για τον υπολογισμό του έργου εξαρτάται προφανώς από την υπο μελέτη θερμοδυναμική μεταβολή. Στην ειδική περίπτωση της ισοβαρούς μεταβολής κατά τη διάρκεια της οποίας η πίεση παραμένει σταθερή ισχύει ότι

$$W = p \Delta V. \quad (1.114)$$

Το αποτέλεσμα (1.114) χρησιμοποιείται συχνά για τον ορισμό ενός άλλου πολύ σημαντικού μεγέθους στην θερμοδυναμική της ενθαλπίας (enthalpy),  $H$ .

Η ενθαλπία ορίζεται σαν το άθροισμα της εσωτερικής ενέργειας  $E$  και του γινομένου  $pV$ , δηλαδή

$$H = E + pV$$

και αποτελεί ένα εκτατικό μέγεθος καθώς η τιμή της εξαρτάται από άλλα εκτατικά μεγέθη. Μπορεί επίσης να γραφτεί ισοδύναμα σαν εντατικό διαιρώντας με

τη μάζα δίνοντας  $h = H/m$ . Η χρησιμότητα της γίνεται προφανής αν θεωρήσουμε τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο για μία ισοβαρή μεταβολή ενός συστήματος από μία αρχική κατάσταση 1 σε μία τελική κατάσταση 2

$$Q_{21} = E_2 - E_1 + p(V_2 - V_1) = (E_2 + pV_2) - (E_1 + pV_1) = H_2 - H_1. \quad (1.115)$$

Σύμφωνα λοιπόν με την Εξίσωση (1.115), η θερμότητα που συναλλάσσει ένα σύστημα με τον περιβάλλον του υπό συνθήκες σταθερής πίεσης ισούται με τη μεταβολή της ενθαλπίας του. Παρόλο που για μη ισοβαρές μεταβολές η μεταβολή της ενθαλπίας δεν έχει τόσο προφανείς συσχετίσεις με τα υπόλοιπα θερμοδυναμικά μεγέθη, είναι δυνατό να εκφραστεί συναρτήσει της εντροπίας γράφοντας τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο ως προς τα αντίστοιχα εντατικά (ή ειδικά) μεγέθη

$$dq = de + pdv \implies dq = de + pd \left( \frac{1}{\rho} \right), \quad (1.116)$$

όπου  $v$  ο ειδικός όγκος που ισούται με το αντίστροφο της πυκνότητας. Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τους ορισμούς της εντροπίας και της ενθαλπίας στην Εξίσωση (1.116) προκύπτει

$$\frac{1}{\rho} dp = dh - T ds \implies \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla h - T \nabla s. \quad (1.117)$$

Το αποτέλεσμα (1.117) ουσιαστικά γεφυρώνει τα ρευστομηχανικά μεγέθη ενός συστήματος με τα αντίστοιχα θερμοδυναμικά, όπως αυτά διατυπώνονται στην εξίσωση του Crocco που παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα.

### 1.8.2 Απόδειξη της εξίσωσης του Crocco

Με μία απλή επισκόπηση των νόμων της θερμοδυναμικής είναι φανερό ότι ο πρώτος νόμος θεμελιώνεται χρησιμοποιώντας την έννοια της ενέργειας ενώ ο δεύτερος αυτή της εντροπίας. Η εξίσωση του Crocco από την άλλη συσχετίζει την στροβιλότητα ενός πεδίου ροής με την εντροπία του αντίστοιχου ρευστού και διατυπώθηκε στην τελική του μορφή από τον Luigi Crocco<sup>10</sup> το 1937. Αποτελεί μία ειδική μορφή των εξισώσεων ορμής όπως αυτές διατυπώθηκαν στην Ενότητα 1.3 και εκφράζει το γεγονός ότι μη ισηντροπικές ροές αναπτύσσουν εν γένει στροβιλότητα.

<sup>10</sup> Ο Luigi Crocco, 1909-1986, ήταν Ιταλός μαθηματικός με πολύ σημαντική συνεισφορά στην θεωρητική αεροδυναμική.

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Ξεκινώντας από το αποτέλεσμα (1.107) για μη συνεκτικό ρευστό απουσία εξωτερικών δυνάμεων προκύπτει

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{U}^2) - \mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega} = -\frac{\nabla p}{\rho}.$$

Αντικαθιστώντας τον όρο της πίεσης στο δεξιό μέλος σύμφωνα με την Εξίσωση (1.117) έχουμε ότι

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{U}^2) - \mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega} = T \nabla s - \nabla h.$$

Αναδιατάσσοντας τέλος τους παραπάνω όρους προκύπτει η τελική έκφραση γνωστή ως η εξίσωση του Crocco

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{U}^2 + h \right) = \mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega} + T \nabla s,$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega} = T \nabla s - \nabla h_0, \quad (1.118)$$

όπου η ποσότητα  $h_0 = 1/2 \mathbf{U}^2 + h$  είναι γνωστή ως ενθαλπία ανακοπής. Το αριστερό μέλος της Εξίσωσης (1.118) αποδεικνύει ότι οποιαδήποτε ανομοιογένεια στη χωρική κατανομή της εντροπίας ενός ροϊκού πεδίου οδηγεί στην ανάπτυξη στροβιλότητας,  $\boldsymbol{\Omega}$ . Ισοδύναμα, σε μία μόνιμη και ισεντροπική ροή σταθερής ενθαλπίας ανακοπής δεν είναι δυνατό να αναπτυχθεί στροβιλότητα.

## 1.9 Λυμένα παραδείγματα

### Παράδειγμα 4.1

Η μέση παροχή όγκου αίματος στην αορτική βαλβίδα είναι περίπου ίση με  $9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ . Εάν η επιφάνεια διατομής της είναι  $3,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , υπολογίστε την ταχύτητα του αίματος σε  $\text{km}/\text{h}$ .

Γνωρίζουμε ότι

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{9 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{3,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,28 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Επομένως η ταχύτητα στην αορτική βαλβίδα ενός υγιούς ανθρώπου ισούται με

$$0,28 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 1 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

**Παράδειγμα 4.2**

Νερό παροχής όγκου  $Q = 10 \text{ m}^3/h$  ρέει διαμέσου ενός σωλήνα σταθερής διαμέτρου  $D = 10 \text{ cm}$ . Υπολογίστε την ταχύτητα του ρευστού. Ποιά θα είναι η νέα τιμή της ταχύτητας αν η διάμετρος του σωλήνα ελαττωθεί στα  $D' = 7 \text{ cm}$ ;

Η ζητούμενη ταχύτητα μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση  $Q = UA$ . Με απλή αντικατάσταση των δεδομένων τότε προκύπτει

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot \frac{10 \text{ m}^3}{3600 \text{ s}}}{\pi (0,1 \text{ m})^2} = \frac{0,0111 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{0,0314 \text{ m}^2} = 0,35 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Για τη δεύτερη περίπτωση η αντίστοιχη ταχύτητα,  $U'$ , μπορεί να υπολογιστεί ως εξής

$$\frac{U'}{U} = \frac{\frac{4Q}{\pi D'^2}}{\frac{4Q}{\pi D^2}} \implies U' = U \left( \frac{D}{D'} \right)^2 = 0,35 \frac{\text{m}}{\text{s}} \left( \frac{10 \text{ cm}}{7 \text{ cm}} \right)^2 = 0,71 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

**Παράδειγμα 4.3**

Νερό ρέει σε ένα ποτιστικό λάστιχο μεταβλητής διατομής. Συγκεκριμένα, η διάμετρος του λάστιχου όταν το νερό εισέρχεται σε αυτό είναι  $4 \text{ cm}$ , ενώ όταν εξέρχεται από αυτό η διάμετρος ελαττώνεται σε  $2 \text{ cm}$ . Αν η συνολική πτώση πίεσης ισούται με  $\Delta p = 7,5 \text{ kPa}$ , υπολογίστε την ταχύτητα του νερού στην είσοδο του λάστιχου.

Επειδή στο πρόβλημα δε δίνονται δεδομένα για το δυναμικό μέρος της ενεργειακής κατάστασης του ρευστού, υποθέτουμε ότι το λάστιχο είναι οριζόντιο. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση Bernoulli (1.67) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{2} \rho U_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho U_2^2 + p_2,$$

όπου ο δείκτης 1 δηλώνει την είσοδο του νερού στο λάστιχο και ο δείκτης 2 την αντίστοιχη έξοδο. Επίσης η εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστο ρευστό δίνει

$$U_1 A_1 = U_2 A_2 \implies U_2 = U_1 \frac{A_1}{A_2}.$$

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Συνδυάζοντας τις παραπάνω δύο σχέσεις είναι δυνατό να εκφράσουμε την ταχύτητα εισόδου του νερού ως προς τη διαφορά πίεσης και τις διατομές εισόδου και εξόδου ως εξής

$$\frac{1}{2}\rho U_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho U_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 + p_2 \implies \frac{\rho}{2}U_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right] = p_1 - p_2 \implies$$

$$U_1^2 = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]} \implies U_1 = \sqrt{\frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1\right]}}$$

Επομένως η ταχύτητα του νερού στην είσοδο του λάστιχου ισούται με

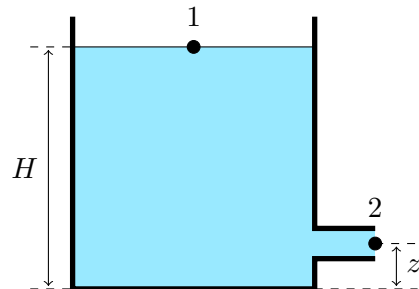
$$U_1 = \sqrt{\frac{7500 \text{ Pa}}{\frac{1000 \text{ kg/m}^3}{2} \left[\left(\frac{4 \text{ cm}}{2 \text{ cm}}\right)^4 - 1\right]}} = \sqrt{\frac{7500 \text{ Pa}}{500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 15}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### Παράδειγμα 4.4

Μια δεξαμενή με νερό φέρει οριζόντιο αγωγό απορροής διαμέτρου  $d = 0,01 \text{ m}$  σε ύψος  $z = 1 \text{ m}$  από τον πυθμένα της, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η δεξαμενή γεμίζει με νερό μέχρι η ελεύθερη επιφάνεια να φτάσει τα  $10 \text{ m}$  ύψος. Αν η πυκνότητα του νερού ισούται με  $1000 \text{ kg/m}^3$ , να βρεθεί ο ρυθμός εκροής του νερού από τη δεξαμενή.

Η δεξαμενή αδειάζει όπως φαίνεται στο σχήμα μέσω του αγωγού απορροής στο σημείο 2. Η πίεση στα σημεία 1 και 2 ισούται με την ατμοσφαιρική και η ταχύτητα καθόδου της ελεύθερης επιφάνειας της δεξαμενής είναι μικρή και πρακτικά ίση με μηδέν. Θέτοντας ως επίπεδο αναφοράς τον πυθμένα της δεξαμενής και εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli προκύπτει

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2.$$



Χρησιμοποιώντας ότι  $U_1 = 0$ ,  $p_1 = p_2 = p_{ατμ}$ ,  $z_1 = H$  και  $z_2 = z$  η παραπάνω εξίσωση απλοποιείται ως εξής

$$H = \frac{U_2^2}{2g} + z \implies U_2 = \sqrt{2g(H - z)} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} (10 - 1) m} = 13,29 \frac{m}{s}$$

Ο ρυθμός εκροής τότε,  $\dot{m}$ , ισούται με

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho V) = \rho \frac{dV}{dt} = \rho Q = \rho U_2 A = \rho U_2 \frac{\pi d^2}{4},$$

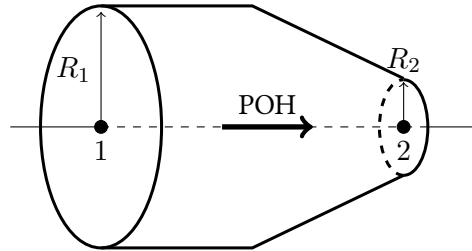
δίνοντας

$$\dot{m} = 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 13,29 \frac{m}{s} \cdot \frac{\pi (0,01 m)^2}{4} = 1,04 \frac{kg}{s}$$

### Παράδειγμα 4.5

Νερό ρέει σε οριζόντιο αγωγό η ακτίνα του οποίου υποτριπλασιάζεται ( $R_1/R_2 = 3$ ). Αν η ταχύτητα της ροής είναι  $U_1 = 50 \text{ cm/s}$  και η πυκνότητα του υγρού είναι  $1050 \text{ kg/m}^3$ , να υπολογιστεί η μεταβολή της πίεσης  $p_2 - p_1$  σε  $Pa$ .

Για να υπολογίσουμε τη διαφορά πίεσης θα πρέπει πρώτα να γνωρίζουμε την ταχύτητα στη διατομή 2. Παρόλο που δεν είναι γνωστές οι τιμές των ακτίνων αλλά μόνο ο λόγος τους, όπως θα δείξουμε παρακάτω κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο. Επομένως ο υπολογισμός της  $U_2$  θα γίνει με εφαρμογή της εξίσωσης συνέχειας



$$U_1 (\pi R_1^2) = U_2 (\pi R_2^2) \implies U_2 = U_1 \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 = 0,5 \frac{m}{s} \cdot 9 \implies U_2 = 4,5 \frac{m}{s}$$

Επιλέγοντας στη συνέχεια ως άξονα αναφοράς τον άξονα συμμετρίας του σωλήνα (διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα), προκύπτει ότι  $z_1 = z_2$  και η εξίσωση Bernoulli γράφεται

$$\frac{1}{2} \rho U_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho U_2^2 + p_2 \implies \Delta p = \frac{1}{2} \rho (U_1^2 - U_2^2) \implies \Delta p = \frac{1}{2} \cdot 1050 \frac{kg}{m^3} (0,5^2 - 4,5^2) \frac{m^2}{s^2} \implies \Delta p = -10500 Pa$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, η ελάττωση της διαμέτρου οδηγεί σε αύξηση της ταχύτητας και κατά συνέπεια σε μείωση της πίεσης.

### Παράδειγμα 4.6

Η διατομή μίας σωληνογραμμής μειώνεται από τα  $4 \text{ cm}^2$  σε ένα σημείο 1 στα  $2 \text{ cm}^2$  σε ένα σημείο 2 που βρίσκεται  $2 \text{ m}$  υψηλότερα από το 1. Αν η σωληνογραμμή διαρρέεται από νερό παροχής  $Q = 0,002 \text{ m}^3/\text{s}$ , υπολογίστε τη διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων 1 και 2, αν το ειδικό βάρος του νερού ισούται με  $9810 \text{ N/m}^3$ .

Γνωρίζουμε ότι για μία ασυμπίεστη, αστρόβιλη και μόνιμη ροή ενός μη συνεκτικού ρευστού η εξίσωση Bernoulli γράφεται

$$\frac{1}{2}\rho U^2 + p + \rho g z = C,$$

όπου  $C$  σταθερός και πραγματικός αριθμός, ή ισοδύναμα

$$\frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = C',$$

με  $C' = C/\gamma$ . Εφαρμόζοντας την εξίσωση αυτή μεταξύ των σημείων 1 και 2 έχουμε ότι

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2,$$

δίνοντας

$$p_1 - p_2 = \gamma \left[ \frac{1}{2g} (U_2^2 - U_1^2) + (z_2 - z_1) \right].$$

Η ζητούμενη διαφορά πίεσης τότε υπολογίζεται εύκολα αν γνωρίζουμε τις ταχύτητες του ρευστού στα σημεία αυτά. Χρησιμοποιώντας τη σταθερή παροχή (αφού το υπό εξέταση ρευστό είναι ασυμπίεστο) βρίσκουμε

$$U_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0,002 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{0,0004 \text{ m}^2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad U_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0,002 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{0,0002 \text{ m}^2} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Αντικαθιστώντας τέλος τα αποτελέσματα βρίσκουμε τη ζητούμενη διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων 1 και 2 ως εξής

$$p_1 - p_2 = 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \left[ \frac{1}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} (10^2 - 5^2) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 2 \text{ m} \right] = 57120 \text{ Pa}.$$

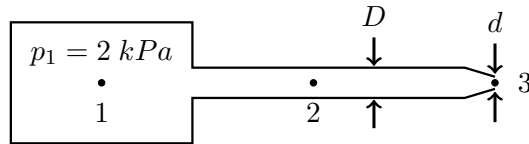
## Παράδειγμα 4.7

Αέρας ρέει από μία δεξαμενή μέσω ενός εύκαμπτου αγωγού διαμέτρου  $D = 0,03 \text{ m}$  και εξέρχεται στην ατμόσφαιρα μέσω ενός ακροφυσίου διαμέτρου  $d = 0,01 \text{ m}$  όπως στο σχήμα. Η υπερπίεση στη δεξαμενή  $p_1$  παραμένει σταθερή και ίση με  $2 \text{ kPa}$ . Να υπολογιστούν ο ρυθμός ογκομετρικής ροής και η πίεση στον αγωγό (σημείο 2) αν η πυκνότητα του ρευστού είναι  $1,3 \text{ kg/m}^3$  και ισχύουν οι παρακάτω παραδοχές:

(α) Η ροή είναι άτριβη, ασυμπίεστη και μόνιμη.

(β) Οι διαστάσεις της δεξαμενής είναι πολύ μεγαλύτερες από τις διαμέτρους του αγωγού και του ακροφυσίου.

Για τον υπολογισμό της παροχής απαιτείται ο υπολογισμός της ταχύτητας σε κάποια διατομή,  $A_i$ . Για το σκοπό αυτό εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli, η οποία για  $z_1 = z_2 = z_3$  παίρνει τη μορφή



$$\frac{1}{2}\rho U_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho U_3^2 + p_3.$$

Χρησιμοποιώντας την παραδοχή (β), η πρώτη και τρίτη παραπάνω ισότητα δίνει την ακόλουθη έκφραση για την ταχύτητα του ρευστού στο ακροφύσιο

$$U_3 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_3)} = \sqrt{\frac{2}{1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \cdot 2 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 55,47.$$

Αντικαθιστώντας τέλος το αποτέλεσμα αυτό στην εξίσωση συνέχειας, υπολογίζουμε τη ζητούμενη ογκομετρική παροχή

$$Q = A_3 U_3 = \frac{3,14 \cdot (0,01 \text{ m})^2}{4} \cdot 55,47 \frac{\text{m}}{\text{s}} \implies Q = 0,004354 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Για να υπολογιστεί τέλος η πίεση στο σημείο 2 πρέπει να είναι γνωστή η αντίστοιχη ταχύτητα

$$U_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 0,004354 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{3,14 \cdot (0,03 \text{ m})^2} = 6,16 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Τελικά, χρησιμοποιώντας ξανά την παραδοχή (β), η πρώτη και η δεύτερη ισότητα γράφονται

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2}\rho U_2^2 = 2 \cdot 10^3 \frac{N}{m^2} - \frac{1}{2} \cdot 1,3 \frac{kg}{m^3} \cdot \left(6,16 \frac{m}{s}\right)^2 = 1975,3 Pa.$$

### Παράδειγμα 4.8

Νερό ρέει κάθετα σε σωλήνα διαμέτρου 0,1 m και εξέρχεται από ακροφύσιο 5 cm, όπως στο σχήμα. Η ταχύτητα εξόδου του νερού από το ακροφύσιο θα πρέπει να είναι τουλάχιστον 10 m/s. Ποια πρέπει να είναι η πίεση στο σημείο 1 του σχήματος αν ο σωλήνας έχει 3 m ύψος;

Υποθέτοντας ότι η ροή είναι μόνιμη, ασυμπίεστη και χωρίς τριβές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μίας γραμμής ροής που διέρχεται από τα σημεία 1 και 2

$$\frac{1}{2}\rho U_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + p_2 + \rho g z_2.$$

Από την αρχή της συνέχειας επίσης για τις διατομές 1 και 2

$$A_1 U_1 = A_2 U_2 \implies \frac{U_1}{U_2} = \frac{A_2}{A_1} \implies \frac{U_1}{U_2} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα βρίσκουμε ότι

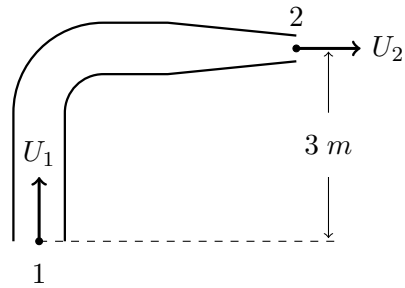
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho (U_2^2 - U_1^2) + \rho g (z_2 - z_1) = \frac{1}{2}\rho U_2^2 \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right] + \rho g (z_2 - z_1).$$

Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= 500 \frac{kg}{m^3} \cdot \left(10 \frac{m}{s}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{0,05 m}{0,1 m}\right)^4\right] + 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 3 m \\ &= 46875 \frac{kg}{ms^2} + 29430 \frac{kg}{ms^2} = 76305 Pa. \end{aligned}$$

Θεωρώντας τέλος ότι η πίεση στην έξοδο του ακροφυσίου ισούται με την ατμοσφαιρική προκύπτει ότι

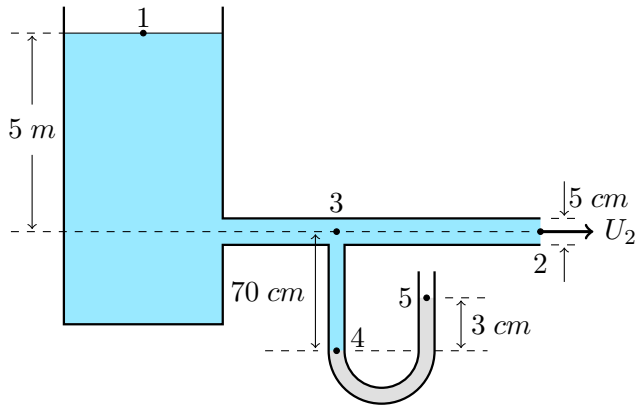
$$p_1 = 76305 Pa.$$



**Παράδειγμα 4.9**

Νερό ρέει από μία πολύ μεγάλη δεξαμενή σε ένα σωλήνα. Ο σωλήνας αυτός συνδέεται με ένα διαφορικό μανόμετρο το οποίο περιέχει υδράργυρο (Hg). Χρησιμοποιώντας τις αποστάσεις όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, υπολογίστε την ταχύτητα του νερού στην έξοδο του σωλήνα  $U_2$  και την αντίστοιχη ογκομετρική παροχή. Η ειδική βαρύτητα του υδραργύρου  $S.G.Hg = 13,6$ .

Ο υπολογισμός της ταχύτητας του ρευστού στο σημείο 2 θα γίνει με χρήση της εξίσωσης Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 και 2. Θεωρούμε ότι η ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής κατέρχεται με μικρή ταχύτητα σε σχέση με την ταχύτητα εξόδου του ρευστού δίνοντας ότι  $U_1 \ll U_2$ . Επίσης η πίεση στο σημείο 1 ισούται προφανώς με την ατμοσφαιρική και τότε



$$\frac{1}{2} \rho_v U_2^2 = (p_{\alpha\tau\mu} - p_2) + \rho_v g (z_1 - z_2).$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα διαπιστώνουμε ότι για να υπολογίσουμε τη ζητούμενη ταχύτητα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την αντίστοιχη πίεση (υποθέτουμε ότι η πίεση  $p_2$  δεν ισούται με την ατμοσφαιρική). Επειδή η ροή είναι άτριβη, η πίεση στα σημεία 2 και 3 είναι ίση. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε την πίεση στο σημείο 3 ως εξής

$$p_3 - p_4 = -\rho_v g z_1 \quad \text{και} \quad p_4 - p_5 = \rho_{Hg} g z_2 = S.G.Hg \rho_v g z_2,$$

οι οποίες προσθέτοντας κατά μέλη δίνουν

$$p_3 - p_5 = \rho_v g (-z_1 + S.G.Hg z_2).$$

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια ότι  $p_5 = p_{\alpha\tau\mu}$  βρίσκουμε

$$\begin{aligned} p_3 &= p_{\alpha\tau\mu} + \rho_v g (-z_1 + S.G.Hg z_2) \\ &= 101325 \text{ Pa} + 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (-0,7 + 13,6 \cdot 0,03) \text{ m} = 98460 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Η ταχύτητα  $U_2$  τότε γράφεται

$$U_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho_v} [p_{\alpha\tau\mu} - p_3 + \rho_v g (z_1 - z_2)]},$$

και αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} U_2 &= \sqrt{\frac{2}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \left[ (101325 - 98460) \text{ Pa} + 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ m} \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{500 \text{ kg}} \cdot 51915 \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}} = 10,19 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Τέλος, η ογκομετρική παροχή,  $Q$ , υπολογίζεται εύκολα ως εξής

$$Q = U_2 A_2 = U_2 \frac{\pi D^2}{4} = 10,19 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{3,14 \cdot (0,05 \text{ m})^2}{4} = 0,02 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

### Παράδειγμα 4.10

Για ποια τιμή της πραγματικής παραμέτρου  $\beta$  το παρακάτω διδιάστατο πεδίο ταχύτητας

$$u = \frac{\alpha\beta y}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{2\alpha x}{x^2 + y^2},$$

περιγράφει ασυμπίεστη ροή; Πώς επηρεάζει η πραγματική παράμετρος  $\alpha$  τη συνθήκη ασυμπίεστότητας;

Η εξίσωση συνέχειας σε καρτεσιανές συντεταγμένες γράφεται

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Αναζητούμε λοιπόν την τιμή της παραμέτρου  $\beta$  για την οποία

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\alpha\beta y}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{2\alpha x}{x^2 + y^2} \right) = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha\beta y \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) - 2\alpha x \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0 \implies$$

$$\alpha\beta y \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} - 2\alpha x \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \implies -2\alpha\beta xy + 4\alpha xy = 0.$$

Επομένως η τιμή της παραμέτρου  $\beta$  για την οποία το δοσμένο πεδίο ταχύτητας περιγράφει ασυμπίεστη ροή είναι

$$-2\alpha\beta xy + 4\alpha xy = 0 \implies \beta = 2.$$

Είναι επίσης προφανές ότι η παράμετρος  $\alpha$  δεν επηρεάζει τη συνθήκη ασυμπίεστότητας για οποιαδήποτε πραγματική τιμή της.

#### Παράδειγμα 4.11

Εξετάστε αν το πεδίο ταχύτητας

$$u_r = \alpha \cos \theta \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right), \quad u_\theta = -\alpha \sin \theta \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right), \quad u_z = 0,$$

αντιπροσωπεύει ασυμπίεστη ροή για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha$ .

Για να αντιπροσωπεύει το συγκεκριμένο πεδίο ταχύτητας ασυμπίεστη ροή θα πρέπει να ικανοποιείται η παρακάτω εξίσωση συνέχειας σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \alpha \cos \theta \left( r - \frac{1}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ -\alpha \sin \theta \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} 0 = 0 \implies$$

$$\frac{\alpha \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r - \frac{1}{r} \right) - \alpha \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta = 0 \implies$$

$$\frac{\alpha \cos \theta}{r} \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{\alpha \cos \theta}{r} \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) = 0.$$

Με απλή επισκόπηση της τελευταίας εξίσωσης παρατηρούμε ότι αυτή αποτελεί ταυτότητα και επομένως η εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστη ροή σε κυλινδρικές συντεταγμένες ικανοποιείται για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha$ .

**Παράδειγμα 4.12**

Έστω μόνιμη και στρωτή ροή ρευστού σε κυκλικό αγωγό σταθερής ακτίνας  $R$ . Σε ποια θέση του αγωγού  $r_0$  η ταχύτητα του ρευστού ισούται με τη μέση ταχύτητα;

Γνωρίζουμε ότι η κατανομή της ταχύτητας ισούται με

$$U(r) = 2\bar{U} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right],$$

όπου  $\bar{U}$  η μέση ταχύτητα και  $R$  η ακτίνα του αγωγού. Σύμφωνα με το πρόβλημα αναζητούμε εκείνη τη θέση,  $r_0$ , για την οποία  $U(r_0) = \bar{U}$ . Προκύπτει τότε ότι

$$\bar{U} = 2\bar{U} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{R} \right)^2 \right] \implies 1 - \left( \frac{r_0}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} \implies r_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

Επομένως για κάθε  $r < r_0$  ισχύει ότι  $U(r) > \bar{U}$  και αντίστροφα για κάθε  $r > r_0$  ισχύει ότι  $U(r) < \bar{U}$ .

**Παράδειγμα 4.13**

Μία αντλία χρησιμοποιείται για την ανύψωση νερού σταθερής παροχής  $Q = 0,01 \text{ m}^3/\text{s}$  από ένα σημείο  $A$  σε ένα σημείο  $B$  που βρίσκεται  $3,04 \text{ m}$  ψηλότερα. Η διάμετρος του σωλήνα πριν από την αντλία (σημείο  $A$ ) είναι  $d_A = 50 \text{ mm}$  και μετά την αντλία (σημείο  $B$ ) είναι  $d_B = 40 \text{ mm}$ . Εάν οι απώλειες τριβής λόγω ροής  $h_f = 2 \text{ m}$  και  $p_B - p_A = 30 \text{ kPa}$ , υπολογίστε την ενέργεια που αποδίδει η αντλία στο νερό ανά μονάδα βάρους του.

Από τη γενική έκφραση για την εξίσωση ενέργειας (1.97) γνωρίζουμε ότι

$$\frac{U_A^2}{2g} + z_A + \frac{p_A}{\gamma} + (h_\pi - h_{\alpha\phi}) = \frac{U_B^2}{2g} + z_B + \frac{p_B}{\gamma} + h_f.$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος δεν υπάρχει συσκευή που να αφαιρεί ενέργεια από το ρευστό και άρα  $h_{\alpha\phi} = 0$ . Λύνοντας επομένως ως προς το ζητούμενο μέγεθος,  $h_\pi$ , και αναδιατάσσοντας τους όρους προκύπτει

$$h_\pi = h_f + \frac{U_B^2 - U_A^2}{2g} + \frac{p_B - p_A}{\gamma} + (z_B - z_A).$$

Όλα τα μεγέθη είναι γνωστά εκτός από τις ταχύτητες οι οποίες υπολογίζονται ως εξής

$$U_A = \frac{4Q}{\pi d_A^2} = \frac{4 \cdot 0,01 \frac{m^3}{s}}{\pi \cdot \left(0,05 \frac{m}{s}\right)^2} = 5,1 \frac{m}{s},$$

και

$$U_B = \frac{4Q}{\pi d_B^2} = \frac{4 \cdot 0,01 \frac{m^3}{s}}{\pi \cdot \left(0,04 \frac{m}{s}\right)^2} = 7,96 \frac{m}{s}.$$

Αντικαθιστώντας όλα τα δεδομένα

$$\begin{aligned} h_\pi &= h_f + \frac{U_B^2 - U_A^2}{2g} + \frac{p_B - p_A}{\gamma} + (z_B - z_A) \\ &= 2 \text{ m} + \frac{\left(7,96 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(5,1 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}} + \frac{30 \cdot 10^3 \text{ Pa}}{9810 \frac{N}{m^3}} + 3 \text{ m} \\ &= 2 \text{ m} + \frac{37,35 \frac{m^2}{s^2}}{19,62 \frac{m^2}{s}} + \frac{30000 \frac{N}{m^2}}{9810 \frac{N}{m^3}} + 3 \text{ m} = 10 \text{ m}. \end{aligned}$$

Επομένως η αντλία αποδίδει στο ρευστό ενέργεια ίση με 10 J ανά μονάδα βάρους του ρευστού.

#### Παράδειγμα 4.14

Νερό πυκνότητας  $1000 \text{ kg/m}^3$  μεταφέρεται από μία λίμνη σε ένα ταμιευτήρα που βρίσκεται  $50 \text{ m}$  ψηλότερα μέσω αντλίας. Η παροχή άντλησης και οι απώλειες ισούται με  $100 \text{ m}^3/\text{hr}$  και  $10 \text{ m}$  αντίστοιχα. Υπολογίστε την ισχύ που παρέχει η αντλία αν η αντλία λειτουργεί ιδανικά.

Θεωρώντας ότι η ροή είναι μόνιμη και ασυμπίεστη ο υπολογισμός της ισχύος θα γίνει με τη βοήθεια της Εξίσωσης (1.97) και με χρήση κατάλληλων παραδοχών. Επειδή τόσο η λίμνη όσο και ο ταμιευτήρας έχουν μεγάλες επιφάνειες είναι ασφαλές να θεωρήσουμε ότι οι ταχύτητες μεταβολής της θέσης τους είναι πρακτικά μηδέν. Επίσης καθώς και οι δύο είναι ανοιχτές επιφάνειες με μικρή υψομετρική διαφορά μεταξύ τους θα έχουν ίσες πιέσεις. Με τη βοήθεια

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

όλων των παραπάνω μπορούμε τότε να γράψουμε την ακόλουθη απλούστερη έκφραση

$$z_1 + (h_\pi - h_{\alpha\phi}) = z_2 + h_f.$$

Η εξίσωση αυτή δεν αποτελεί τη βέλτιστη παρουσίαση για την αρχή διατήρησης της ενέργειας καθώς δεν είναι εκφρασμένη σε μονάδες ισχύος που ζητάει το παράδειγμα. Για το λόγο αυτό και θεωρώντας ότι η μόνη ενέργεια που συναλλάσσεται με το σύστημα είναι η ισχύς της αντλίας, έστω  $\dot{W}$ , μπορούμε να γράψουμε

$$\dot{W} = \dot{m}g [(z_2 - z_1) + h_f].$$

Για τον υπολογισμό επομένως της ισχύος απαιτείται ο υπολογισμός της παροχής μάζας, δηλαδή

$$\dot{m} = \rho Q = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 100 \frac{\text{m}^3}{\text{hr}} \cdot \frac{1 \text{hr}}{3600 \text{s}} = 27,78 \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$\dot{W} = 27,78 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (50 + 10) \text{ m} = 16351,3 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^3} \implies \dot{W} = 16,35 \text{ kW}.$$

### Παράδειγμα 4.15

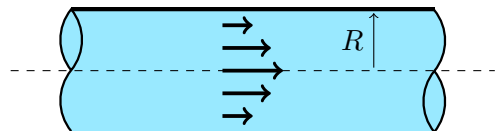
Η κατανομή της ταχύτητας για τυρβώδη ροή σε κυλινδρικό αγωγό σταθερής ακτίνας  $R$  δίνεται συχνά στη βιβλιογραφία από τη σχέση

$$u(r) = u_{\text{μεγ}} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7},$$

όπου  $u_{\text{μεγ}}$  η μέγιστη ταχύτητα. Υπολογίστε τη μέση τιμή της ταχύτητας,  $\bar{u}$ , για την παραπάνω κατανομή.

Η μέση τιμή της ταχύτητας μπορεί να υπολογιστεί με απευθείας χρήση της Εξίσωσης (1.119)

$$\bar{u} = \frac{\int_0^A u(r) \, dA}{\pi R^2}.$$



Με χρήση της ακόλουθης αλλαγής μεταβλητής

$$t = 1 - \frac{r}{R} \implies dt = -\frac{1}{R} dr$$

και αντικαθιστώντας τα δεδομένα του προβλήματος βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\int_0^R u_{\mu\epsilon\gamma} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7} 2\pi r dr}{\pi R^2} = \frac{2u_{\mu\epsilon\gamma}}{R^2} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7} r dr \\ &= \frac{2u_{\mu\epsilon\gamma}}{R^2} \left[ \int_1^0 t^{1/7} R(1-t)(-R) dt \right] = 2u_{\mu\epsilon\gamma} \left[ \int_0^1 t^{1/7} (1-t) dt \right] \\ &= 2u_{\mu\epsilon\gamma} \left[ \int_0^1 t^{1/7} dt - \int_0^1 t^{8/7} dt \right] = 2u_{\mu\epsilon\gamma} \left\{ \frac{7}{8} \left[ t^{8/7} \right]_0^1 - \frac{7}{15} \left[ t^{15/7} \right]_0^1 \right\} \\ &= 2u_{\mu\epsilon\gamma} \left( \frac{7}{8} - \frac{7}{15} \right) = 2u_{\mu\epsilon\gamma} \frac{49}{120} = \frac{49}{60} u_{\mu\epsilon\gamma}. \end{aligned}$$

Η μέση ταχύτητα επομένως για την υπό εξέταση ροή ισούται με το 82% της μέγιστης. Αξιίζει να σημειωθεί ότι η μέση ταχύτητα για την περίπτωση της στρωτής ροής με παραβολική κατανομή ταχύτητας ισούται μόνο με το 50% της αντίστοιχης μέγιστης όπως φαίνεται από την Εξίσωση (1.50).

#### Παράδειγμα 4.16

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης, να υπολογιστεί ο διορθωτικός συντελεστής της κινητικής ενέργειας,  $\alpha$ .

Ο διορθωτικός συντελεστής  $\alpha$  δίνεται από τη σχέση (1.101),

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{u}{\bar{u}} \right)^3 dA.$$

Αντικαθιστώντας τόσο την κατανομή της ταχύτητας όσο και το αποτέλεσμα της μέσης τιμής από την προηγούμενη άσκηση βρίσκουμε

$$\alpha = \frac{2}{R^2} \left( \frac{60}{49} \right)^3 \int_0^R \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^{3/7} r dr.$$

Εφαρμόζοντας την ίδια αλλαγή μεταβλητής όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \left( \frac{60}{49} \right)^3 \int_1^0 t^{3/7} (1-t)(-dt) = 2 \left( \frac{60}{49} \right)^3 \left[ \int_0^1 t^{3/7} dr - \int_0^1 t^{10/7} dy \right] \\ &= 2 \left( \frac{60}{49} \right)^3 \left\{ \frac{7}{10} \left[ t^{10/7} \right]_0^1 - \frac{7}{17} \left[ t^{17/7} \right]_0^1 \right\} = 2 \left( \frac{60}{49} \right)^3 \left( \frac{7}{10} - \frac{7}{17} \right) = 1,058. \end{aligned}$$

## 1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Βλέπουμε επομένως ότι σε αντίθεση με τη στρωτή ροή, ο διορθωτικός συντελεστής της κινητικής ενέργειας είναι σχεδόν ίσος με τη μονάδα και για το λόγο αυτό σε πολλές εφαρμογές που αφορούν τυρβώδης ροϊκές συμπεριφορές συνήθως παραλείπεται.

### Παράδειγμα 4.17

Αποδείξτε ότι για διδιάστατη ροή  $(\Omega \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0$ , με αποτέλεσμα η Εξίσωση (1.111) να απλοποιείται στην (1.112).

Έστω διδιάστατη ροή στο επίπεδο  $xy$  για την οποία ισχύει ότι

$$\mathbf{U} = (u, v, 0) \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

Το διάνυσμα της στροβιλότητας τότε ισούται με

$$\Omega = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} = \omega_z \hat{k},$$

και επομένως

$$(\Omega \cdot \nabla) \mathbf{U} = (0, 0, \omega_z) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0 \right) \mathbf{U} = 0.$$

### Παράδειγμα 4.18

Με τη βοήθεια του ροομέτρου Ventouri, υπολογίστε την παροχή εάν  $A_0 = 500 \text{ mm}^2$ ,  $A_3 = 200 \text{ mm}^2$ ,  $h_0 = 60 \text{ mm}$  και  $h_3 = 30 \text{ mm}$ . Εκφράστε την απάντησή σας σε  $\text{m}^3/\text{s}$ .

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (1.83) και αντικαθιστώντας τα δεδομένα της άσκησης

$$\begin{aligned} Q &= A_3 \sqrt{\frac{2g(h_0 - h_3)}{1 - (A_3/A_0)^2}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (60 - 30) \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1 - (200/500)^2}} \\ &= 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \sqrt{\frac{0,5886 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{0,84}} = 1,67 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 4.19**

Να υπολογιστεί ο χρόνος εκκένωσης κυλινδρικής δεξαμενής για την οποία ισχύει  $D_\delta = 0,1 \text{ m}$ ,  $D_o = 10 \text{ mm}$ ,  $L = 500 \text{ mm}$  και  $C_o = 0,6$ .

Με απευθείας αντικατάσταση των δεδομένων στην Εξίσωση (1.86) προκύπτει

$$t_\alpha = \frac{1}{0,64} \left( \frac{100 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} \right)^2 \sqrt{\frac{2 \cdot 0,5 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \Rightarrow t_\alpha = 49,89 \text{ s}.$$

**Παράδειγμα 4.20**

Αποδείξτε ότι για διδιάστατη, μόνιμη και ισεντροπική ροή, η εξίσωση του Crocco γράφεται στην ισοδύναμη μορφή  $-\Omega \nabla \Psi = \nabla h_0$ , όπου  $\Psi$  η ροϊκή συνάρτηση.

Ξεκινώντας από την Εξίσωση (1.118) έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega} = T \nabla s - \nabla h_0.$$

Υιοθετώντας τις υποθέσεις της εκφώνησης, το παραπάνω αποτέλεσμα απλοποιείται ως εξής

$$\mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega} = \nabla h_0,$$

και η πρόταση αποδεικνύεται αν ισχύει ότι

$$\mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega} = -\Omega \nabla \Psi.$$

Επειδή η ροή είναι διδιάστατη,  $\mathbf{U} = (u, v, 0)$  και  $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \omega_z)$ . Το εξωτερικό γινόμενο τότε γράφεται

$$\mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega} = (v\omega_z) \hat{i} - (u\omega_z) \hat{j}.$$

Ομοίως έχουμε

$$-\Omega \nabla \Psi = -\omega_z \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, 0 \right) = -\omega_z (-v, u, 0) = (v\omega_z, -u\omega_z, 0).$$

Επειδή τα δεξιά μέλη των δύο παραπάνων αποτελεσμάτων είναι ίσα προκύπτει η ζητούμενη πρόταση.

**Παράδειγμα 4.21**

Βρείτε την εξίσωση στροβιλότητας για μη συνεκτικό ρευστό όπου όλες οι εξωτερικές δυνάμεις είναι συντηρητικές.

Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (1.108) και (1.109) η εξίσωση διατήρησης της ορμής παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \boldsymbol{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{U}) + \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{f} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}.$$

Επειδή οι δυνάμεις είναι συντηρητικές μπορούν να γραφτούν ως η απόκλιση ενός δυναμικού,  $\mathbf{f} = -\nabla \Phi$ . Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι  $\nabla \times \mathbf{f} = -\nabla \times \nabla \Phi = 0$ , για κάθε βαθμωτή συνάρτηση. Λαμβάνοντας επίσης υπόψη ότι το ρευστό είναι μη συνεκτικό, το παραπάνω αποτέλεσμα γράφεται

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \boldsymbol{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{U}).$$

Στη γενική περίπτωση όπου το ρευστό δεν χαρακτηρίζεται από σταθερή πυκνότητα και η διατήρηση της μάζας του περιγράφεται από την Εξίσωση (1.6) έχουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt},$$

και ο συνδυασμός των δύο αυτών αποτελεσμάτων δίνει

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \frac{\boldsymbol{\Omega} D\rho}{\rho Dt} \implies \frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{\boldsymbol{\Omega} D\rho}{\rho Dt}.$$

Στην περίπτωση διδιάστατης ροής, ασυμπίεστου και συνεκτικού ρευστού αποδεικνύεται εύκολα ότι το παραπάνω αποτέλεσμα μετασχηματίζεται στην Εξίσωση (1.112).

**Παράδειγμα 4.22**

Νερό ειδικού βάρους  $\gamma = 9810 \text{ N/m}^3$  ρέει σε οριζόντιο αγωγό αρχικής και τελικής διαμέτρου  $D_1 = 16 \text{ cm}$  και  $D_2 = 8 \text{ cm}$  αντίστοιχα. Η παροχή όγκου διαμέσω του αγωγού ισούται με  $Q = 0,04 \text{ m}^3/\text{s}$  όταν η πτώση πίεσης είναι  $\Delta p = 40 \text{ kPa}$ . Υπολογίστε το σταθερό διορθωτικό συντελεστή της κινητικής ενέργειας όταν οι απώλειες ύψους  $h_f = 0,7 \text{ m}$ .

Θεωρώντας ότι δεν συναλλάσσεται ενέργεια μεταξύ του ρευστού και του περιβάλλοντος και με την εισαγωγή του διορθωτικού παράγοντα, η Εξίσωση (1.97) γράφεται

$$\alpha \frac{U_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \alpha \frac{U_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + h_f.$$

Επειδή ο αγωγός είναι οριζόντιος,  $z_1 = z_2$ , και οι ταχύτητες υπολογίζονται ως εξής

$$U_1 = \frac{4 \cdot 0,04 \frac{m^3}{s}}{\pi (0,16m)^2} = 1,99 \frac{m}{s} \quad \text{και} \quad U_2 = \frac{4 \cdot 0,04 \frac{m^3}{s}}{\pi (0,08m)^2} = 7,96 \frac{m}{s}.$$

Έχουμε τότε ότι

$$\alpha \left( \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} \right) = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} - h_f \implies \alpha = \left( \frac{2g}{U_2^2 - U_1^2} \right) \left( \frac{\Delta p}{\gamma} - h_f \right).$$

Αντικαθιστώντας

$$\alpha = \left[ \frac{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}}{\left(7,96 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(1,99 \frac{m}{s}\right)^2} \right] \left( \frac{40000 Pa}{9810 \frac{N}{m^3}} - 0,7m \right) = 1,12.$$

### Παράδειγμα 4.23

Σωλήνας Pitot χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ταχύτητας αεροπλάνου που πετάει στα 3500m. Αν η διαφορική πίεση στο σωλήνα μετράται ίση με 4kPa, να βρεθεί η ταχύτητα του αεροπλάνου αν η τιμή του διορθωτικού παράγοντα  $C = 0,9$ .

Η ταχύτητα του αεροπλάνου μπορεί εύκολα να υπολογιστεί με τη βοήθεια της Εξίσωσης (1.73), αρκεί να είναι γνωστή η πηκνότητα του αέρα στο δεδομένο ύψος. Με χρήση λοιπόν τυπολογίων βρίσκουμε ότι  $\rho_{3500m} = 0,863 kg/m^3$  και τότε

$$U = C \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = 0,9 \sqrt{\frac{2 \cdot 4000 Pa}{0,863 \frac{kg}{m^3}}} \implies U = 86,65 \frac{m}{s} = 311,9 \frac{km}{hr}.$$

**Παράδειγμα 4.24**

Έστω οριζόντιος κυλινδρικός αγωγός που διαρέεται από ρευστό σταθερής πυκνότητας,  $\rho$ . Αν υποθέσουμε ότι η κατανομή της ταχύτητα είναι γραμμική, ξεκινώντας από μηδέν στο τοίχωμα μέχρι μία μέγιστη τιμή,  $u_{\mu\epsilon\gamma}$ , κατά μήκος του άξονα συμμετρίας. υπολογίστε το διορθωτικό συντελεστή κινητικής ενέργειας.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του παραδείγματος η κατανομή της ταχύτητας περιγράφεται από τη σχέση

$$u(r) = u_{\mu\epsilon\gamma} \left(1 - \frac{r}{R}\right),$$

όπου  $u(r=0) = u_{\mu\epsilon\gamma}$  και  $u(r=R) = 0$ . Για τον υπολογισμό του συντελεστή,  $\alpha$ , απαιτείται η γνώση της μέσης ταχύτητας,  $\bar{u}$ , σύμφωνα με την Ενότητα 1.3.5.4. Έχουμε τότε ότι

$$\bar{u} = \frac{\int_0^R u(r) dA}{\int_0^R dA} = \frac{2u_{\mu\epsilon\gamma}}{R^2} \int_0^R r \left(1 - \frac{r}{R}\right) dr \implies \bar{u} = \frac{u_{\mu\epsilon\gamma}}{3}.$$

Η τιμή του  $\alpha$  μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της Εξίσωσης (1.101) και θέτοντας  $x = 1 - r/R$  ως εξής

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left[ \frac{u(r)}{\bar{u}} \right]^3 dA = \frac{54}{R^2} \int_0^R r \left(1 - \frac{r}{R}\right)^3 dr = 54 \int_0^1 x^3 (1-x) dx.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα δίνοντας

$$\alpha = 2,7.$$

---

## ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

### 2.1 Εισαγωγή

---

Η μηχανική των ρευστών αποτελεί έναν επιστημονικό κλάδο με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Λόγω της πολυπλοκότητας των υπό μελέτη φαινομένων, η μαθηματική περιγραφή τους με αναλυτικό τρόπο είναι δυνατή μόνο για τις απλούστερες περιπτώσεις και για το λόγο αυτό είναι συνήθως απαραίτητη η υιοθέτηση παραδοχών ή ακόμα και η χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών για την επίλυση ρεαλιστικών εφαρμογών. Επίσης πολλές από τις εφαρμογές αυτές οδηγούν στην κατασκευή εγκαταστάσεων μεγάλων διαστάσεων και κατά συνέπεια πολύ υψηλού κόστους όπως ανεμογεννήτριες, υδροηλεκτρικά εργοστάσια και αεροπλάνα, απαγορεύοντας ουσιαστικά οποιαδήποτε αστοχία στην κατασκευή του τελικού προϊόντος. Για το σκοπό αυτό τα περισσότερα πειράματα έχουν στόχο από τη μία να παράγουν αποτελέσματα που να έχουν όσο το δυνατό πιο ευρεία εφαρμογή, χωρίς από την άλλη να απαιτούνται υπέρογκα ποσά για την περάτωσή τους. Ο πρώτος στόχος επιτυγχάνεται υιοθετώντας αδιάστατες παραμέτρους για τη μελέτη της εκάστοτε εφαρμογής. Η επιλογή αυτή στηρίζεται στη μέθοδο της *διαστατικής ανάλυσης* και στην ιδέα της ελαχιστοποίησης του αριθμού των παραμέτρων που απαιτούνται για την περιγραφή ενός φαινομένου. Ο δεύτερος στόχος επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας μοντέλα μικρότερων (συνήθως) διαστάσεων από το αντίστοιχο πρωτότυπο μέγεθος. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατό να προβλέψουμε τη συμπεριφορά του πρωτότυπου μελετώντας

αυτή του μοντέλου μέσω μίας διαδικασίας που ονομάζεται *ομοιότητα*.

## 2.2 Διαστατική ανάλυση

Η χρησιμότητα της διαστατικής ανάλυσης γίνεται εύκολα κατανοητή αν θεωρήσουμε τη μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού σε λείο και κυλινδρικό σωλήνα. Η πτώση πίεσης,  $\Delta p$ , σε μία τέτοια ροή περιμένουμε να εξαρτάται από διάφορους παράγοντες όπως διάμετρο, πυκνότητα, ταχύτητα και ιξώδες σύμφωνα με την παρακάτω γενική σχέση

$$\Delta p \propto f(D, \rho, U, \mu).$$

Ο στόχος επομένως ενός τέτοιου πειράματος είναι να καθορίσει τη μορφή της άγνωστης αυτής συνάρτησης,  $f$ , για τον υπολογισμό της πτώσης πίεσης. Για το σκοπό πρέπει να σχεδιαστεί η πτώση πίεσης συναρτήσει της διαμέτρου για παράδειγμα, θεωρώντας τα υπόλοιπα μεγέθη σταθερά. Στη συνέχεια πρέπει να επαναληφθεί η ίδια διαδικασία μεταβάλλοντας μόνο την πυκνότητα αυτή τη φορά και ούτω καθεξής. Η προσέγγιση αυτή αποτελεί ένα αρκετά δύσκολο αν όχι αδύνατο εγχείρημα, καθώς απαιτεί έναν πολύ μεγάλο αριθμό διαφορετικών ρευστών για να μελετηθούν όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί, παράγοντας έναν απαγορευτικά μεγάλο πλήθος διαγραμμάτων για κάθε διαφορετικό συνδυασμό αυτών.

Μία ισοδύναμη και συγχρόνως απλούστερη προσέγγιση είναι να εκφράσουμε την πτώση πίεσης συναρτήσει αδιάστατων παραμέτρων. Ένας συνδυασμός τέτοιων αδιάστατων παραμέτρων για την πτώση πίεσης,  $\Delta p$ , γράφεται

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = g\left(\frac{\rho U D}{\mu}\right),$$

αποδεικνύοντας ουσιαστικά ότι η παράμετρος που εκφράζει την πτώση πίεσης στο αριστερό μέλος εξαρτάται από μία μόνο αδιάστατη ομάδα παραμέτρων στο δεξιό μέλος, τον αριθμό Reynolds. Το βασικό πλεονέκτημα της προσέγγισης αυτής είναι ότι το αντίστοιχο πείραμα θα καθορίσει την μαθηματική εξάρτηση λιγότερων μεγεθών (μόνο δύο σε αντίθεση με πέντε που ήταν αρχικά). Επίσης, το απαιτούμενο σύνολο πειραμάτων περιορίζεται σημαντικά, καθώς αρκεί μόνο ένα ρευστό και η παραμετροποίηση μπορεί να επιτευχθεί αλλάζοντας απλώς τη γεωμετρία του αγωγού ή την ταχύτητα του ρευστού. Η παραπάνω προσέγγιση

είναι γνωστή ως διαστατική ανάλυση και οι βασικότεροι μέθοδοι που εφαρμόζονται για το σκοπό αυτό είναι των Rayleigh και Buckingham. Η πρώτη εφαρμόζεται όταν ο αριθμός των παραμέτρων που υπεισέρχονται είναι μικρός και η δεύτερη όταν ο αριθμός αυτός αυξάνεται.

### 2.2.1 Μέθοδος Rayleigh

Η μέθοδος αυτή επιλέγεται συνήθως όταν ο αριθμός των παραμέτρων δεν είναι μεγαλύτερος από τρία ή το πολύ τέσσερα. Προτάθηκε από τον λόρδο Rayleigh και χρησιμοποιείται για να εκφράσει μία ανεξάρτητη μεταβλητή (έστω  $A$ ) συναρτήσει  $n$  εξαρτημένων μεταβλητών (έστω  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ) μέσω μιας εκθετικής σχέσης της μορφής

$$A = C \times A_1^\alpha \cdot A_2^\beta \cdot \dots \cdot A_n^\nu, \quad (2.1)$$

όπου  $C$  μία αδιάστατη πολλαπλασιαστική σταθερά που περιλαμβάνει όλους τους αριθμητικούς συντελεστές που μπορεί να εμφανιστούν. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η Εξίσωση (2.1) πρέπει να είναι διαστατικά ομογενής, δηλαδή οι διαστάσεις του αριστερού μέλους να είναι ίδιες με τις διαστάσεις του δεξιού μέλους. Μία προφανή συνέπεια της παραπάνω συνθήκης είναι ότι απαιτείται ένα σύνολο διαστάσεων (οι οποίες στο εξής θα ονομάζονται *βασικές διαστάσεις*) μέσω των οποίων θα ορίζονται οι διαστάσεις οποιουδήποτε μεγέθους. Οι βασικές αυτές διαστάσεις είναι τρεις και συνήθως χωρίζονται σε δύο κατηγορίες με βάση το δεύτερο νόμο του Newton. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν τα μεγέθη της δύναμης, του μήκους και του χρόνου και συμβολίζονται με  $F$ ,  $L$  και  $T$  αντίστοιχα. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν η μάζα,  $M$ , το μήκος,  $L$ , και ο χρόνος,  $T$ . Προκύπτουν τελικά δύο ισοδύναμα συστήματα βασικών μονάδων, τα  $F L T$  και  $M L T$ .<sup>1</sup> Η μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο γίνεται με απλή επισκόπηση του δεύτερου νόμου του Newton, καθώς

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \implies [F] = M \frac{L}{T^2}.$$

Στο βιβλίο αυτό έχει επιλεχθεί το δεύτερο σύστημα βασικών μονάδων,  $M L T$ , και όλοι οι υπολογισμοί που παρουσιάζονται στη συνέχεια γίνονται με βάση

<sup>1</sup> Ο προσεκτικός αναγνώστης θα έχει ήδη παρατηρήσει ότι δεν έχει συμπεριληφθεί η θερμοκρασία,  $\Theta$ , σε κανένα από τα δύο συστήματα. Ο λόγος είναι ότι έχει γίνει η υπόθεση ότι σε όλες τις υπό μελέτη διεργασίες δεν υπάρχει μεταβολή της θερμοκρασίας και ως εκ τούτου τα γενικότερα συστήματα  $F L T \Theta$  και  $M L T \Theta$  απλοποιούνται στις παραπάνω απλούστερες εκφράσεις.

## 2 ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

το σύστημα αυτό. Είμαστε πλέον σε θέση να εκφράσουμε τις μονάδες των κυριότερων μεγεθών στο σύστημα  $MLT$  όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.1. Μία άμεση συνέπεια της μεθόδου είναι ότι τα αδιάστατα μεγέθη θα έχουν πάντα

Πίνακας 2.1: Διαστάσεις μεγεθών σύμφωνα με το σύστημα  $MLT$ .

Μέγεθος	Σύμβολο	Διαστάσεις
Επιφάνεια	$A$	$L^2$
Όγκος	$V$	$L^3$
Παροχή όγκου	$\dot{Q}$	$L^3T^{-1}$
Παροχή μάζας	$\dot{m}$	$M^1T^{-1}$
Ταχύτητα	$U$	$L^1T^{-1}$
Επιτάχυνση	$a$	$L^1T^{-2}$
Πίεση	$p$	$M^1L^{-1}T^{-2}$
Δύναμη	$F$	$M^1L^1T^{-2}$
Ενέργεια	$E$	$M^1L^2T^{-2}$
Πυκνότητα	$\rho$	$M^1L^{-3}$
Ειδικό βάρος	$\gamma$	$M^1L^{-2}T^{-2}$
Δυναμικό ιξώδες	$\mu$	$M^1L^{-1}T^{-1}$
Κινηματικό ιξώδες	$\nu$	$L^2T^{-1}$
Μέτρο ελαστικότητας	$E$	$M^1L^{-1}T^{-2}$

μηδενικούς εκθέτες. Για παράδειγμα, ο αριθμός Euler,  $Eu$ , ο οποίος εκφράζει το λόγο των δυνάμεων πίεσης προς τις αδρανειακές δυνάμεις με τη βοήθεια του Πίνακα 2.1 δίνει

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho U^2} \implies [Eu] = \frac{M^1L^{-1}T^{-2}}{M^1L^{-3} \cdot L^2T^{-2}} = \frac{M^1L^{-1}T^{-2}}{M^1L^{-1}T^{-2}} = M^0L^0T^0.$$

Είμαστε πλέον σε θέση να περιγράψουμε τη μέθοδο Rayleigh χρησιμοποιώντας τα παρακάτω τέσσερα βήματα:

- *Βήμα 1:* γράφουμε τη συναρτησιακή σχέση της μορφής (2.1) μεταξύ του άγνωστου μεγέθους και των γνωστών μεγεθών που επιλέχθηκαν,

- *Βήμα 2:* υπολογίζουμε τους συνολικούς εκθέτες για κάθε μία από τις βασικές διαστάσεις,
- *Βήμα 3:* εφαρμόζουμε την αρχή της διαστατικής ομοιογένειας,
- *Βήμα 4:* λύνουμε το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων που προκύπτει.

Η παραπάνω μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί στον υπολογισμό για παράδειγμα της ταχύτητας διάδοσης ενός κύματος πίεσης σε ένα υγρό. Αν υποθέτουμε ότι η ταχύτητα αυτή εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας του υγρού,  $E$ , και την πυκνότητα του,  $\rho$ , προκύπτει (βήμα 1)

$$[U] = C \times [E]^\alpha \cdot [\rho]^\beta \implies \frac{L}{T} = \left( \frac{M}{LT^2} \right)^\alpha \cdot \left( \frac{M}{L^3} \right)^\beta = M^{\alpha+\beta} \frac{L^{-\alpha-3\beta}}{T^{2\alpha}}.$$

Έχοντας υπολογίσει τους συνολικούς εκθέτες για κάθε μία από τις βασικές διαστάσεις (βήμα 2) εφαρμόζουμε στη συνέχεια την αρχή της διαστατικής ομοιογένειας για κάθε μία από αυτές (βήμα 3). Το σύστημα που προκύπτει είναι ένα αλγεβρικό σύστημα τριών εξισώσεων με δύο αγνώστους,

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 0, \\ -\alpha - 3\beta &= 1, \\ 2\alpha &= 1.\end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό (βήμα 4) προκύπτει ότι  $(\alpha, \beta) = (1/2, -1/2)$  δίνοντας τελικά ότι η ταχύτητα του κύματος πίεσης ισούται με

$$U = C \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Το βασικότερο πλεονέκτημα της μεθόδου Rayleigh είναι η αμεσότητα με την οποία υπολογίζονται οι κατάλληλοι εκθέτες για κάθε μία βασική διάσταση. Όταν όμως ο αριθμός των υπό μελέτη μεγεθών αυξηθεί, η μέθοδος αυτή οδηγεί σε δυσανάλογα μεγάλη έκταση μαθηματικών πράξεων και δεν αποτελεί την πιο ελκυστική προσέγγιση. Επίσης η μέθοδος αυτή δεν παρέχει καμία πληροφορία σχετικά με τον απαιτούμενο αριθμό αδιάστατων παραμέτρων που θα προκύψουν εφαρμόζοντάς την. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε μία εναλλακτική προσέγγιση, που ονομάζεται μέθοδος του Buckingham και παρουσιάζεται στην ενότητα που ακολουθεί.

### 2.2.2 Μέθοδος Buckingham

Μία ισοδύναμη μέθοδος διαστατικής ανάλυσης προτάθηκε από τον Buckingham το 1914 με την ονομασία θεώρημα Π του Buckingham. Το θεώρημα αυτό συνδέει το πλήθος των υπό μελέτη μεγεθών με το πλήθος των βασικών διαστάσεων που περιγράφουν τα μεγέθη αυτά και διατυπώνεται ως εξής:

*Μία εξίσωση που είναι διαστατικά ομοιογενής και περιέχει  $n$  παραμέτρους οι οποίες περιγράφονται από  $m$  βασικές διαστάσεις, μπορεί να μετασχηματιστεί σε μία ισοδύναμη σχέση αποτελούμενη από  $n - m$  αδιάστατες ομάδες.*

Κάθε μία από αυτές τις αδιάστατες ομάδες ονομάζεται Π-ομάδα, με την πρώτη Π-ομάδα ( $\Pi_1$ ) να περιέχει συνήθως την ανεξάρτητη μεταβλητή και τις υπόλοιπες ομάδες ( $\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m}$ ) να περιέχουν τις εξαρτημένες. Η Εξίσωση (2.1) τότε δέχεται την ισοδύναμη έκφραση

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m}).$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι όλες οι ομάδες πρέπει να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, δηλαδή καμία δεν πρέπει να προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Η επιλογή επίσης των ομάδων αυτών δεν είναι μοναδική, καθώς οποιοδήποτε σύνολο ανεξάρτητων ομάδων που ικανοποιεί το θεώρημα είναι αποδεκτό. Τα βήματα που ακολουθούνται για την εφαρμογή του θεωρήματος Π του Buckingham είναι τα ακόλουθα:

- *Βήμα 1:* ταυτοποιούμε τη μοναδική ανεξάρτητη και τις  $n - 1$  εξαρτημένες μεταβλητές που σχετίζονται με το υπό μελέτη φαινόμενο,
- *Βήμα 2:* εκφράζουμε κάθε μία από τις εξαρτημένες μεταβλητές συναρτήσει των  $m$  βασικών διαστάσεων που τις περιγράφουν,
- *Βήμα 3:* εφαρμόζουμε το θεώρημα Π του Buckingham και υπολογίζουμε τον αριθμό των  $n - m$  αδιάστατων Π-ομάδων που προκύπτουν,
- *Βήμα 4:* επιλέγουμε  $m$  επαναλαμβανόμενες μεταβλητές σαν βάση για να σχηματίσουμε όλες τις Π-ομάδες. Οι μεταβλητές αυτές δεν πρέπει περιέχουν τη μοναδική ανεξάρτητη μεταβλητή,
- *Βήμα 5:* σχηματίζουμε μία Π-ομάδα πολλαπλασιάζοντας μία από τις μη επαναλαμβανόμενες μεταβλητές με το γινόμενο των επαναλαμβανόμενων μεταβλητών εκ των οποίων η κάθε μία έχει υψωθεί στον κατάλληλο εκθέτη

έτσι ώστε η προκύπτουσα Π-ομάδα να είναι αδιάστατη. Το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται για όλες τις μη επαναλαμβανόμενες μεταβλητές μέχρι δηλαδή να σχηματιστούν οι  $n - m$  αδιάστατες Π-ομάδες,

- *Βήμα 6:* ελέγχουμε ότι όλες οι Π-ομάδες είναι αδιάστατες,
- *Βήμα 7:* γράφουμε την Π-ομάδα που περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή ως συνάρτηση των υπολοίπων Π-ομάδων που περιέχουν τις εξαρτημένες μεταβλητές.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η πτώση μίας σφαίρα μάζας,  $m$ , από ύψος,  $h$ , και εκτελεί ελεύθερη πτώση εξαιτίας της βαρύτητας,  $g$ . Γνωρίζουμε ότι ο χρόνος,  $t$ , που απαιτείται για να βρεθεί η σφαίρα στο έδαφος θα είναι συνάρτηση το πολύ τριών παραμέτρων

$$t = f(m, h, g),$$

δίνοντας τέσσερις συνολικά μεταβλητές (Βήμα 1). Επειδή η διάσταση των εξαρτημένων μεταβλητών  $m, h, g$  είναι αντίστοιχα οι  $M, L, L/T^2$  (Βήμα 2) προκύπτει εφαρμόζοντας το θεώρημα Π του Buckingham ότι ο αριθμός των αδιάστατων Π-ομάδων ισούται με  $4 - 3 = 1$  (Βήμα 3). Επομένως το ερώτημα που τίθεται είναι ποια είναι η μορφή της μοναδικής αδιάστατης ομάδας που περιγράφει το χρόνο που απαιτείται για να βρεθεί η σφαίρα στο έδαφος. Επειδή η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν μπορεί να περιέχεται στις επαναλαμβανόμενες μεταβλητές, προκύπτει ότι είμαστε υποχρεωμένοι να επιλέξουμε όλες τις εξαρτημένες μεταβλητές ( $m, h$  και  $g$ ) για το σχηματισμό της μοναδικής Π-ομάδας (Βήμα 4). Σχηματίζοντας στη συνέχεια την ομάδα αυτή πολλαπλασιάζοντας την ανεξάρτητη μεταβλητή (καθώς δεν υπάρχουν άλλες εξαρτημένες) με το γινόμενο των επαναλαμβανόμενων μεταβλητών εκ των οποίων η κάθε μία έχει υψωθεί στον κατάλληλο εκθέτη έτσι ώστε η προκύπτουσα Π<sub>1</sub>-ομάδα να είναι αδιάστατη (Βήμα 5) προκύπτει

$$\Pi_1 = tm^\alpha h^\beta g^\gamma \implies M^0 L^0 T^0 = T M^\alpha L^\beta \left(\frac{L}{T^2}\right)^\gamma = T^{1-2\gamma} L^{\beta+\gamma} M^\alpha,$$

και εξισώνοντας τους αντίστοιχους εκθέτες

$$1 - 2\gamma = 0, \quad \beta + \gamma = 0, \quad \alpha = 0 \implies (\alpha, \beta, \gamma) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Με απλή επισκόπηση παρατηρούμε ότι η ομάδα αυτή πράγματι είναι αδιάστατη (Βήμα 6) δίνοντας

$$\Pi_1 = t\sqrt{\frac{g}{h}} \implies t = C\sqrt{\frac{h}{g}},$$

όπου  $C$  μία πολλαπλασιαστική σταθερά (Βήμα 7).

Συμπερασματικά πρέπει να ειπωθεί ότι η μέθοδος της διαστατικής ανάλυσης, αν και ιδιαίτερα χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις, δεν αποτελεί πανάκεια στη ρευστοδυναμική καθώς συνοδεύεται από μειονεκτήματα και περιορισμούς. Για παράδειγμα, διαφορετικός συνδυασμός μεγεθών είναι δυνατό να οδηγήσουν σε διαστατική ομοιογένεια μεταξύ τους χωρίς όμως να έχουν ιδιαίτερη φυσική σημασία για το υπό εξέταση φαινόμενο. Πολλές φορές επίσης χαρακτηρίζεται από υπεραπλούστευση στην ανάπτυξη προβλημάτων οδηγώντας σε σημαντικές αποκλίσεις ή παραλείψεις στο τελικό αποτέλεσμα. Τέλος, σε σύνθετα φαινόμενα όπως μη γραμμικά συστήματα, η διαστατική ανάλυση αδυνατεί πολλές φορές να περιγράψει ικανοποιητικά τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος.

### 2.3 Συνήθειες αδιάστατες ομάδες

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται οι βασικότερες αδιάστατες ομάδες που υπεισέρχονται συνήθως στη μελέτη της ρευστοδυναμικής. Οι ομάδες αυτές επικράτησαν στη βιβλιογραφία λόγω της ιδιαίτερης φυσικής σημασίας που αυτές αντιπροσωπεύουν και ονομάστηκαν τιμές ένεκεν στους ερευνητές που συνέβαλαν καθοριστικά στη μελέτη και ανάπτυξη του αντίστοιχου τομέα της μηχανικής των ρευστών. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις κυριότερες αδιάστατες ομάδες και παρόλο που δεν απαρτίζει έναν πλήρη κατάλογο, αποτελεί έναν αντιπροσωπευτικό δείγμα των ομάδων που εμφανίζονται στα περισσότερα προβλήματα.

Επιγραμματικά μπορούμε να διατυπώσουμε για κάθε μία από τις ομάδες αυτές τα παρακάτω:

- *Reynolds*: καθορίζει το μέτρο των κινητικών δυνάμεων ως προς τις δυνάμεις ιξώδους. Μεγάλοι αριθμοί Reynolds αντιστοιχούν σε ροές στις οποίες η αδράνεια διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξή τους. Σε αντίθεση, μικροί αριθμοί υποδηλώνουν ροές που καθορίζονται από ιξώδη φαινόμενα (γνωστές και ως *έρπουσες ροές* για πολύ μικρούς αριθμούς Re-

Πίνακας 2.2: Βασικές αδιάστατες ομάδες.

Ορισμός	Σύμβολο (Όνομα)	Φυσική ερμηνεία
$\frac{\rho UL}{\mu}$	$Re$ (Reynolds)	$\frac{\text{αδρανειακές δυνάμεις}}{\text{δυνάμεις ιξώδους}}$
$\frac{\Delta p}{\rho U^2}$	$Eu$ (Euler)	$\frac{\text{δυνάμεις πίεσης}}{\text{αδρανειακές δυνάμεις}}$
$\frac{U}{c}$	$M$ (Mach)	$\frac{\text{αδρανειακές δυνάμεις}}{\text{δυνάμεις συμπίεστικότητας}}$
$\frac{U}{\sqrt{gL}}$	$Fr$ (Froude)	$\frac{\text{αδρανειακές δυνάμεις}}{\text{δυνάμεις βαρύτητας}}$
$\frac{\rho U^2 L}{\sigma}$	$We$ (Weber)	$\frac{\text{αδρανειακές δυνάμεις}}{\text{δυνάμεις επιφανειακής τάσης}}$
$\frac{\rho U^2}{E}$	$Ca$ (Cauchy)	$\frac{\text{αδρανειακές δυνάμεις}}{\text{δυνάμεις συμπίεστικότητας}}$
$\frac{fL}{U}$	$St$ (Strouhal)	$\frac{\text{αδρανειακές δυνάμεις μη μονιμότητας}}{\text{αδρανειακές δυνάμεις μεταφοράς}}$

ynolds). Λόγω της σημαντικότητάς του στη μηχανική των ρευστών, ο αριθμός Reynolds παρουσιάζεται πιο αναλυτικά στη Ενότητα 2.5.

- *Euler*: οι δυνάμεις πίεσης  $F_p$  εμφανίζονται λόγω της διαφοράς πίεσης που αναπτύσσεται μεταξύ δύο περιοχών σε ένα πεδίο ροής. Η αναγωγή των δυνάμεων αυτών ως προς τις αδρανειακές δυνάμεις μας δίνουν ένα μέτρο των ενεργειακών απωλειών. Μία ιδανική ροή επομένως έχει αριθμό Euler ίσο με τη μονάδα.
- *Mach*: ο αριθμός Mach (Mach number) είναι ένα αδιάστατο μέγεθος που εκφράζει την ταχύτητα ροής κοντά σε ένα όριο ως προς την ταχύτητα του ήχου στην υπό μελέτη περιοχή. Περιγράφει το βαθμό μεταβολής της πυκνότητας ενός ρευστού και μας βοηθάει να χαρακτηρίσουμε μία ροή ως υποηχητική ( $M < 1$ ) ή υπερηχητική ( $M > 1$ ).
- *Froude*: λαμβάνεται υπόψη μόνο αν η δύναμη της βαρύτητας επηρεάζει

τη ροή. Σε ροές κλειστών αγωγών δέχεται αμελητέες τιμές και δεν λαμβάνεται υπόψη. Όμως σε περιπτώσεις ροών ποταμιών, σχεδιασμού πλοίων ή γενικότερο σχεδιασμό υδραυλικών εγκαταστάσεων ο αριθμός Froude αποτελεί ένα από τα βασικότερα αδιάστατα μεγέθη.

- *Weber*: σε ροές όπου υπάρχει διεπιφάνεια μεταξύ δύο ρευστών ο αριθμός Weber αποτελεί σημαντική παράμετρο. Ουσιαστικά συγκρίνει την επίδραση των υδροδυναμικών δυνάμεων στο γεωμετρικό σχήμα που αποκτά ένα ρευστό λόγω της επιφανειακής του τάσης. Επομένως υψηλός αριθμός Weber σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια επικρατεί, διασπώντας τότε το κλασικό για παράδειγμα σχήμα της σταγόνας στα υγρά σε μικρότερες και περισσότερες. Αντιθέτως, χαμηλός αριθμός αντιστοιχεί σε επικράτηση της επιφανειακής τάσης και για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται σε διατάξεις που λειτουργούν με ψεκασμό όπως στις μηχανές εσωτερικής καύσης ή στους αεριοστρόβιλους.
- *Cauchy*: αν η συμπίεστικότητα είναι σημαντική, πρέπει να ληφθούν υπόψη οι ελαστικές δυνάμεις. Επομένως ο λόγος των αδρανειακών δυνάμεων προς τις δυνάμεις συμπίεστικότητας (ή ελαστικές δυνάμεις) περιγράφεται από τον αριθμό Cauchy.
- *Strouhal*: στην περίπτωση που μία ροή χαρακτηρίζεται από ταλαντωτικά φαινόμενα, είναι αναγκαίο να υπολογιστεί ο χαρακτηριστικός χρόνος,  $L/U$ , ως προς τη συχνότητα της ταλάντωσης,  $f$ , της ροής. Η σύγκριση των δύο αυτών μεγεθών βοηθάει στην μελέτη ροϊκών διεργασιών που χαρακτηρίζονται από περιοδικότητα.

### 2.4 Ομοιότητα

---

Ένα από τα πλεονεκτήματα της διαστατικής ανάλυσης είναι ότι μας βοηθάει όχι μόνο να θεμελιώσουμε καινούριες θεωρίες αλλά και να σχεδιάσουμε κατάλληλα πειράματα. Μπορούμε δηλαδή να σχηματίσουμε εκ των προτέρων μία σχετικά αντικειμενική εικόνα για τη συνεισφορά και τη βαρύτητα συγκεκριμένων μεγεθών καθώς και τη μεταξύ τους αλληλοεξάρτηση στη μελέτη ενός φαινομένου. Το σημαντικότερο όμως πλεονέκτημα είναι ίσως η δυνατότητα που μας παρέχει η διανυσματική ανάλυση να αντιστοιχίσουμε τις ιδιότητες ενός μοντέλου με αυτές του πρωτότυπου.<sup>2</sup> Η λέξη συνήθως αναφέρεται στην

<sup>2</sup> Οι έννοιες του πρωτότυπου και του μοντέλου στο βιβλίο αυτό ορίζονται ως εξής: ως πρωτότυπο ορίζεται ως η αρχική και ολοκληρωμένη κατασκευή οποιοδήποτε συστήμα-

πλειοψηφία των περιπτώσεων καθώς υπάρχουν μοντέλα που είναι μεγαλύτερα του πρωτότυπου όπως στη μελέτη διαφόρων βιολογικών φαινομένων (κίνηση ερυθρών αιμοσφαιρίων κ.ά.).

Μία από τις χαρακτηριστικότερες περιπτώσεις είναι η κατασκευή και η μελέτη ενός αεροπλάνου. Επειδή είναι προφανώς αδύνατο να κατασκευάζονται συνεχώς αεροπλάνα μέχρι να πληρωθούν όλες οι προϋποθέσεις για ασφαλή πτήση, πραγματοποιούνται αρχικά έλεγχοι σε μοντέλα για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς όχι μόνο της ατράκτου αλλά και των επιμέρους εξαρτημάτων του. Είμαστε τότε σε θέση να δημιουργήσουμε αντιστοιχίες μεταξύ του μοντέλου και του πρωτότυπου. Όταν οι αντιστοιχίες αυτές οδηγούν σε κοινούς νόμους για την περιγραφή τους, θεωρούμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη *ομοιότητας* μεταξύ τους.

Η έννοια της (γεωμετρικής) ομοιότητας είναι γνωστή από τα αρχαία χρόνια όταν έγιναν οι πρώτες προσπάθειες σύγκρισης γεωμετρικών σχημάτων ( τρίγωνα, πολύπλευρα κ.ά.). Διαπιστώθηκε λοιπόν ότι δύο τρίγωνα για παράδειγμα που έχουν τις αντίστοιχες γωνίες ίσες ή το λόγο των αντίστοιχων πλευρών ίσο είναι μεταξύ τους όμοια, δηλαδή το ένα αποτελεί απλή μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου. Με την ανάπτυξη αργότερα της ρευστοδυναμικής η έννοια της ομοιότητας επεκτάθηκε στις ροές (καθώς σε πολλούς άλλους επιστημονικούς κλάδους προφανώς) μεταξύ ρευστών που παρουσιάζουν όμοια ροϊκά χαρακτηριστικά, γνωστή ως *κινηματική ομοιότητα*. Η ομοιότητα στη ροή βέβαια προϋποθέτει ομοιότητα και των αντίστοιχων δυνάμεων που καθορίζουν μία ροή, γνωστή και ως *δυναμική ομοιότητα*. Τα κριτήρια δηλαδή που απαιτούνται έτσι ώστε να επιτευχθεί ομοιότητα μεταξύ μοντέλου και πρωτότυπου είναι

- η γεωμετρική ομοιότητα,
- η δυναμική ομοιότητα και,
- η κινηματική ομοιότητα.

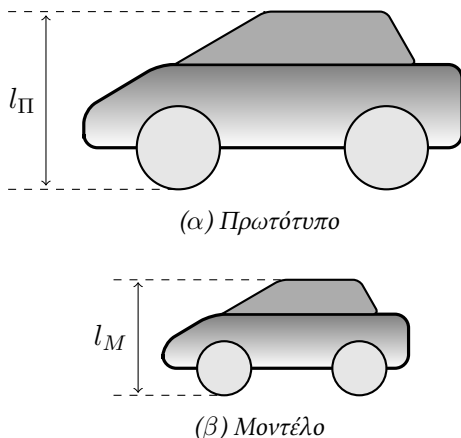
Με τον όρο *γεωμετρική ομοιότητα* ορίζουμε το γεγονός ότι το μοντέλο και το πρωτότυπο είναι ακριβή γεωμετρικά αντίγραφα μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1. Ενώ δηλαδή δεν έχουν το ίδιος μέγεθος, τα αντίστοιχα μήκη τους και στις τρεις διαστάσεις έχουν τον ίδιο λόγο. Ο λόγος αυτός ονομάζεται

---

τος ή διάταξης που λειτουργεί στις φυσικές διαστάσεις και υπό τις επιθυμητές ιδιότητες σε πραγματικές συνθήκες. Το μοντέλο είναι μία απλοποιημένη, οικονομικότερη και συνήθως γεωμετρικά μικρότερη αναπαράσταση του πρωτότυπου που χρησιμοποιείται για προσομοίωση, ανάλυση και έλεγχο με σκοπό τη βελτιστοποίηση των ιδιοτήτων του πρωτότυπου.

## 2 ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

κλίμακα και αν θεωρήσουμε ότι έχει μία σταθερή τιμή,  $L$ , δίνει για τις αντίστοιχες κλίμακες των επιφανειών και των όγκων τιμές ίσες με  $L^2$  και  $L^3$  αντίστοιχα. Είναι δυνατόν τότε να οριστούν δύο σημεία που βρίσκονται στις ίδιες σχετικές



Σχήμα 2.1: Γεωμετρική ομοιότητα μεταξύ μοντέλου και πρωτότυπου αυτοκινήτου με λόγο κλίμακας ίσο με  $l_{\Pi}/l_M = L$ .

θέσεις στο μοντέλο και στο πρωτότυπο και ονομάζονται *ομόλογα σημεία*. Δύο σημαντικές παρατηρήσεις χρήζουν αναφοράς στο σημείο αυτό. Αφενός, η έννοια της κλίμακας στη γεωμετρική ομοιότητα εκτείνεται σε όλα τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά του υπό μελέτη συστήματος όπως για παράδειγμα στην ταχύτητα ενός αγωγού, γεγονός που καθιστά την επίτευξη τέλει γεωμετρικής ομοιότητας ιδιαίτερα δύσκολο εγχείρημα. Αφετέρου, γωνίες κλίσης στο σύστημα (όπως οι γωνίες πτερυγώσης αεροσκαφών) δεν πρέπει να υπακούουν σε κλίμακα αφού κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε προφανή αποτυχία της γεωμετρικής ομοιότητας μεταξύ μοντέλου και πρωτότυπου.

Η *κινηματική ομοιότητα* αναφέρει ότι η ταχύτητα οποιουδήποτε σημείου σε ένα μοντέλο πρέπει να είναι ανάλογη ενός σταθερού αριθμού κλίμακας ως προς την ταχύτητα του ομόλογου σημείου του στο πρωτότυπο. Αυτό με τη σειρά του απαιτεί ότι και τα δύο έχουν τον ίδιο λόγο κλίμακας μήκους και χρόνου. Η ισοδυναμία στην κλίμακα μήκους ικανοποιείται αυτόματα από τη γεωμετρική ομοιότητα, ενώ η αντίστοιχη του χρόνου συνήθως απαιτεί ένα συνδυασμό διαφορετικών θεωρήσεων. Μία από τις σημαντικότερες τότε συνέπειες της κινηματικής ομοιότητας είναι ότι όλα τα κινηματικά χαρακτηριστικά (όπως γραμμές ροής, στροβιλότητα κ.ά.) πρέπει να είναι όμοιες τόσο στο μοντέλο όσο και στο πρωτότυπο.

Τέλος, η *δυναμική ομοιότητα* αναφέρεται στην ισότητα όλων των λόγων δυνάμεων που ασκούνται σε ένα στοιχείο μάζας του μοντέλου και του πρωτότυπου. Αυτό σημαίνει ότι ο λόγος των αδρανειακών δυνάμεων ως προς τις δυνάμεις ιξώδους (όπως αυτός εκφράζεται από τον αδιάστατο αριθμό Reynolds) για παράδειγμα θα είναι ίδιος. Η παραπάνω πρόταση γενικεύεται για όλους τους αδιάστατους αριθμούς που χαρακτηρίζουν μία ροή και εφαρμόζονται ανάλογα με το υπό μελέτη πρόβλημα. Αν επομένως η επιφανειακή τάση επηρεάζει τη ροή, ο αδιάστατος αριθμός Weber μεταξύ μοντέλου και πρωτότυπου θα εξισωθεί. Αντιστοίχως για τον αριθμό Mach σε συμπιεστή ροή ή τον αριθμό Froude για ροές με ελεύθερες επιφάνειες. Για να αποδείξουμε την ισότητα των αδιάστατων παραμέτρων για την περίπτωση του αριθμού Reynolds, ας υποθέσουμε τη γενική έκφραση για τις αδρανειακές δυνάμεις

$$F_R = \rho L^2 U^2,$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού,  $U$  η ταχύτητα του και  $L$  ένα χαρακτηριστικό μήκος. Η σταθερά αναλογίας (έστω  $G$ ) των δυνάμεων αδράνειας μεταξύ του μοντέλου (δείκτης  $M$ ) και του πρωτότυπου (δείκτης  $\Pi$ ) γράφεται

$$G = \frac{F_{R,M}}{F_{R,\Pi}} = \frac{\rho_M L_M^2 U_M^2}{\rho_\Pi L_\Pi^2 U_\Pi^2}, \quad (2.2)$$

και ο αντίστοιχος λόγος των δυνάμεων ιξώδους (έστω  $G'$ ) δέχεται την ακόλουθη μορφή

$$G' = \frac{\mu_M L_M U_M}{\mu_\Pi L_\Pi U_\Pi}. \quad (2.3)$$

Θεωρώντας ότι ο λόγος των δυνάμεων αυτών πρέπει να είναι σταθερός σε όλα τα ομόλογα σημεία και συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (2.2) και (2.3) προκύπτει

$$G = G' \implies \frac{\rho_M L_M^2 U_M^2}{\rho_\Pi L_\Pi^2 U_\Pi^2} = \frac{\mu_M L_M U_M}{\mu_\Pi L_\Pi U_\Pi} \implies \frac{\rho_M L_M U_M}{\mu_M} = \frac{\rho_\Pi L_\Pi U_\Pi}{\mu_\Pi},$$

ή ισοδύναμα

$$Re_M = Re_\Pi.$$

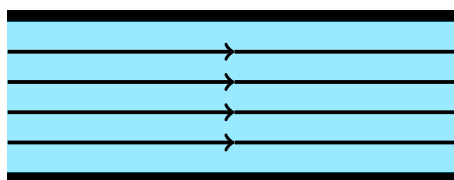
Ανάλογες προσεγγίσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποδειχθεί οποιαδήποτε ισότητα  $\Pi$ -ομάδων που εμφανίζονται στη μηχανική των ρευστών. Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι η γεωμετρική και η κινηματική ομοιότητα είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη δυναμικής ομοιότητας. Είναι επομένως δυνατό να υπάρχει γεωμετρική και κινηματική ομοιότητα χωρίς να υπάρχει δυναμική ομοιότητα.

Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι πολύ συχνά δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί απόλυτη ομοιότητα. Κατά συνέπεια όσο απομακρυνόμαστε από τις πραγματικές συνθήκες λειτουργίας του πρωτότυπου, τόσο πιο δύσκολη καθίσταται η επίτευξή της. Στις περιπτώσεις αυτές είναι δυνατό κάποια χαρακτηριστικά της ομοιότητας να μην ληφθούν υπόψη, εστιάζοντας με τον τρόπο αυτό σε ένα υποσύνολο παραμέτρων ομοιότητας.

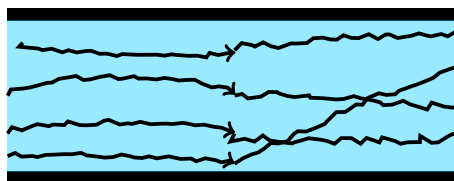
### 2.5 Ο αριθμός Reynolds

#### 2.5.1 Αναλυτική περιγραφή

Κατά τη διάρκεια του δεύτερου μισού του 19ου αιώνα παρατηρήθηκε ότι οι ροές γενικά μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με τη ροϊκή τους συμπεριφορά. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν ροές που αναπτύσσονται σε παράλληλες στρώσεις ομαλά η μία ως προς την άλλη και χωρίς διαταραχές μεταξύ των στρώσεων. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν ροές που χαρακτηρίζονται από χαοτική αλλαγή των ρευστομηχανικών μεγεθών τους, δημιουργία δινών και έντονης ανάμειξης. Μία ροή που ανήκει στην πρώτη κατηγορία ονομάζεται *στρωτή*, ενώ αν ανήκει στη δεύτερη κατηγορία ονομάζεται *τυρβώδης*. Στο Σχήμα 2.2 φαίνονται μερικές γραμμές ροής τόσο για στρωτή ροή (πάνω) όσο και για τυρβώδη ροή (κάτω) για την απλή περίπτωση ροής μεταξύ παράλληλων και ακίνητων πλακών. Ένα από τα σημαντικότερα προβλή-



(α) Στρωτή ροή



(β) Τυρβώδης ροή

Σχήμα 2.2: Τυπικές γραμμές ροής για στρωτή και τυρβώδη ροή μεταξύ παράλληλων και ακίνητων πλακών.

ματα που ανέκυψαν αμέσως μετά τη διάκριση αυτή ήταν ότι η μετάβαση από τη στρωτή στη τυρβώδη ροή δεν ήταν απότομη, αλλά υπήρχε μία μεταβατική ροή από τη μία κατάσταση στην άλλη. Ο πρώτος που μελέτησε αναλυτικά τη μετάβαση αυτή ήταν ο Reynolds<sup>3</sup>. Τα αποτελέσματά του παρουσιάστηκαν σε μία επιστημονική εργασία το 1883<sup>4</sup> η οποία αποτελεί μία από τις σημαντικότερες συνεισφορές στην ιστορία της ρευστομηχανικής.

Η αντίληψη που υπήρχε μέχρι τότε ήταν ότι η ανάπτυξη στρωτής και τυρβώδους ροής εξαρτώνταν κυρίως από την ταχύτητα και το εμβαδό διατομής του αγωγού. Επομένως, ροές που χαρακτηρίζονται από μεγάλες ταχύτητες ή που λαμβάνουν χώρα σε αγωγούς μεγάλης διατομής αναπτύσσουν ευκολότερα τυρβώδη χαρακτηριστικά, σε αντίθεση με ροές μικρών ταχυτήτων ή σε μικρούς αγωγούς. Η επίδραση όμως του ιξώδους και της πυκνότητας δεν είχαν μελετηθεί διεξοδικά ως προς την επίδρασή τους, οδηγώντας στην ανάγκη δημιουργίας ενός μεγέθους που θα κατατάσσει την εκάστοτε ροή σε μία εκ των δύο κατηγοριών. Ο Reynolds λοιπόν κατάφερε, μέσω προσεκτικά σχεδιασμένων πειραμάτων, να αποδείξει ότι η μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη φύση εμφανίζεται όταν ένας συγκεκριμένος συνδυασμός φυσικών μεγεθών ξεπερνάει κάποιο εύρος τιμών. Ο αδιάστατος αυτός συνδυασμός ονομάστηκε αργότερα *αριθμός Reynolds* ( $Re$ ) και για την περίπτωση κυλινδρικού αγωγού διαμέτρου,  $D$ , που διαρρέεται από ρευστό σταθερής πυκνότητας,  $\rho$ , γράφεται

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}, \quad (2.4)$$

όπου  $\mu$  και  $U$  το δυναμικό ιξώδες και η μέση ταχύτητα του ρευστού αντίστοιχα. Η σημαντικότητα του αριθμού Reynolds έγκειται στο γεγονός ότι περιγράφει με επιτυχία το είδος της ροής (στρωτή, μεταβατική, τυρβώδης) ανεξαρτήτως της φύσης και της ταχύτητας του ρευστού ή των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του αγωγού. Επομένως ρευστά με εντελώς διαφορετικά χαρακτηριστικά αλλά τον ίδιο αριθμό Reynolds θα ρέουν με τον ίδιο τρόπο. Για κυλινδρικούς αγωγούς για παράδειγμα, ισχύει ο Πίνακας 2.3. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν πρέπει κάποιος να θεωρεί τις τιμές του πίνακα ως απόλυτα όρια. Παρόλα αυτά ροές που χαρακτηρίζονται από αριθμούς Reynolds μικρότερους του 2000 θεωρούνται στρωτές και αντίστοιχα ροές με αριθμούς μεγαλύτερους του 4000 θεωρούνται τυρβώδεις. Αξίζει βέβαια να σημειωθεί ότι η μετάβαση της ροής

<sup>3</sup> Osborne Reynolds, 1842 - 1912, ήταν Ιρλανδός καινοτόμος που συνέβαλε καθοριστικά στην ανάπτυξη της μηχανικής των ρευστών

<sup>4</sup> O. Reynolds, *An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall be Direct or Sinuous, and the Law of Resistance in Parallel Channels*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 174, 935-982 (1883).

Πίνακας 2.3: Τιμές του αριθμού Reynolds και αντίστοιχες ροές.

Αριθμός Reynolds	Είδος ροής
$Re < 2000$	στρωτή
$2000 \leq Re \leq 4000$	μεταβατική
$Re > 4000$	τυρβώδης

εξαρτάται και από την παρουσία σημαντικών ή μη διαταραχών. Αυτός είναι και ο λόγος ύπαρξης της μεταβατικής ροής καθώς προσεκτικά σχεδιασμένα πειράματα με λείους σωλήνες ή απουσία διαταραχών είναι δυνατό να οδηγήσουν σε στρωτές ροές ακόμη και για τιμές μεγαλύτερες του παραπάνω ορίου.

### 2.5.2 Φυσική ερμηνεία

Μία άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι ο αριθμός Reynolds είναι αδιάστατη παράμετρος είναι ότι δεν εξαρτάται από το σύστημα μονάδων που θα επιλεγεί. Όταν μελετάμε την κίνηση ενός σώματος, η ταχύτητά του (που είναι διαστατό μέγεθος) αποτελεί μία χρήσιμη πληροφορία, αλλά σε καμία περίπτωση δεν περιγράφει το είδος της κίνησής του. Αν για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι  $U = 10 \text{ m/s}$ , δεν είμαστε σε θέση να εξαγάγουμε συμπεράσματα ως προς τη φύση της κίνησής του, καθώς δεν γνωρίζουμε το σύστημα ή το περιβάλλον μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα το φαινόμενο αυτό. Η ταχύτητα επομένως από μόνη της δεν περιγράφει τη ροϊκή συμπεριφορά αλλά ούτε και τα χαρακτηριστικά που καθορίζουν τη φύση της ροής. Από την άλλη και όπως έχει ήδη ειπωθεί στην προηγούμενη ενότητα, ο αριθμός Reynolds περιγράφει το χαρακτήρα της ροής και πιο συγκεκριμένα αν αυτή είναι στρωτή ή τυρβώδης. Στη πρώτη κατηγορία ανήκουν ροές στις οποίες η συνεκτικότητα του ρευστού διαδραματίζει σημαντικό ρόλο κάνοντας τις δυνάμεις τριβής να κυριαρχούν ως προς τις δυνάμεις αδράνειας. Αυτό οδηγεί σε στρωματοποίηση της ροής με ασθενή δυναμικά χαρακτηριστικά και δυνάμεις ανάλογες της ταχύτητας. Όσο αυξάνει όμως η ταχύτητα, οι δυνάμεις αδράνειας επικρατούν αυτών του ιξώδους δημιουργώντας αστάθεια, διαταραχές και στροβιλισμούς καταστρέφοντας τη στρωματοποίηση της ροής. Η μετάβαση επομένως προς την τύρβη εμφανίζεται όταν τα δύο αυτά είδη δυνάμεων (ιξώδους και αδράνειας) γίνονται συγκρίσιμα. Αυτός είναι και ο λόγος για την κατασκευή του Πίνακα 2.3 όπου η χαρακτηριστική τιμή 2000 προέκυψε από πειράματα του Schiller το 1922 σε ευθύγραμμους και λείους αγωγούς.

## 2.6 Αδιαστατοποίηση και κανονικοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes

Το γεγονός τέλος ότι ο αριθμός Reynolds εκφράζει το λόγο των αδρανειακών δυνάμεων ως προς τις δυνάμεις ιξώδους μπορεί να προκύψει εύκολα με διαστατική επεξεργασία της Εξίσωσης (2.4) ως εξής

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{\rho \frac{L^2}{t}}{\mu} = \frac{\rho \frac{L^3}{t}}{\mu L} = \frac{\rho L^3 \cdot \frac{U}{t}}{\mu \cdot \frac{U}{L} \cdot L^2} = \frac{\rho V \cdot \frac{U}{t}}{\mu \cdot \frac{U}{L} \cdot A}$$

Ο αριθμητής ισούται με το γινόμενο μάζας,  $\rho V$ , επί την επιτάχυνση,  $U/t$ , που δεν είναι τίποτα άλλο από τις δυνάμεις αδράνειας. Ο δε παρανομαστής αποτελείται από το δυναμικό ιξώδες,  $\mu$ , την κλίση της ταχύτητας ως προς ένα χαρακτηριστικό μήκος,  $U/L$ , και ένα εμβαδό,  $A$ . Το γινόμενο των τριών αυτών μεγεθών όπως είναι γνωστό εκφράζει τις δυνάμεις ιξώδους του ρευστού και για το λόγο αυτό ο αριθμός Reynolds ποιοτικά γράφεται

$$Re = \frac{\text{δυνάμεις αδράνειας}}{\text{δυνάμεις ιξώδους}}$$

Η συνεκτικότητα του ρευστού είναι επομένως ο λόγος διατήρησης της στρωματοποιημένης ροής. Ασθενείς διαταραχές που πιθανόν αναπτυχθούν κατά τη διάρκειας μίας ροής λόγω τραχύτητας του αγωγού για παράδειγμα, θα αποσβεστούν καθώς η αδρανειακή συνεισφορά δεν είναι αρκετά ισχυρή ώστε να "παρασύρει" τις διαταραχές αυτές επιτρέποντάς τις να αναπτυχθούν. Όταν όμως οι δυνάμεις αδράνειας είναι σημαντικές, η συνεκτικότητα του ρευστού "δεν προλαβαίνει" να αποσβέσει τις διαταραχές που έχουν αναπτυχθεί οδηγώντας τη ροή προς την τυρβώδη συμπεριφορά.

## 2.6 Αδιαστατοποίηση και κανονικοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes

---

Στη μηχανική των ρευστών καθώς και σε άλλους επιστημονικούς τομείς που θεμελιώνονται με τη βοήθεια διαφορικών εξισώσεων είναι αρκετά σύνηθες οι εξισώσεις αυτές να αναδιατυπώνονται σε ισοδύναμες αλλά αδιάστατες εκφράσεις. Ο λόγος είναι ότι έννοιες όπως "μικρός" ή "μεγάλος" δεν έχουν πολλές φορές ιδιαίτερη σημασία αν δεν συγκριθούν με κάποια τιμή αναφοράς. Για παράδειγμα, η ταχύτητα ενός αγωνιστικού αυτοκινήτου φαντάζει μεγάλη στην καθημερινότητα ενός ανθρώπου, αλλά είναι ασήμαντη αν συγκριθεί με αυτή ενός δορυφόρου που περιφέρεται γύρω από τη Γη. Είναι επομένως σημαντικό

## 2 ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

να εκφράσουμε τα μεγέθη συναρτήσει άλλων μεγεθών που αποτελούν τιμές αναφοράς. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αδιαστατοποίηση και χρησιμοποιείται ευρέως σε όλες τις επιστήμες. Με τον τρόπο αυτό είναι πλέον δυνατό να συμπεράνουμε αν ένα αποτέλεσμα είναι πράγματι σημαντικό ή αμελητέο. Σε αρκετές δε περιπτώσεις, η προσπάθεια αδιαστατοποίησης μίας ή περισσότερων μεταβλητών οδήγησε στην εμφάνιση νέων και ιδιαίτερα σημαντικών αδιάστατων παραμέτρων που αποτέλεσαν ορόσημο για τη βαθύτερη κατανόηση διαφόρων φαινομένων.

Στην περίπτωση των εξισώσεων ορμής, η αδιαστατοποίησή τους οδηγεί στην εμφάνιση μίας παραμέτρου που όπως θα αποδείξουμε δεν είναι καμία άλλη από τον αριθμό Reynolds. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις παρακάτω μεταβλητές

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L_0}, \quad t' = \frac{U_0}{L_0}t, \quad \mathbf{U}' = \frac{\mathbf{U}}{U_0} \quad \text{και} \quad p' = \frac{p}{\rho U_0^2}, \quad (2.5)$$

όπου  $L_0$  και  $U_0$  τα χαρακτηριστικά μεγέθη αδιαστατοποίησης<sup>5</sup>, προκύπτει ότι

$$\nabla' = \left( \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right) = \left( L_0 \frac{\partial}{\partial x}, L_0 \frac{\partial}{\partial y}, L_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) = L_0 \nabla, \quad (2.6)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \left( \frac{L_0}{U_0} \right) \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Ξεκινώντας στη συνέχεια από την Εξίσωση (1.23) απουσία εξωτερικών δυνάμεων και αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα (2.5), (2.6) και (2.7) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{U} \implies \\ \frac{U_0}{L_0} \frac{\partial}{\partial t'} (U_0 \mathbf{U}') + \left[ (U_0 \mathbf{U}') \cdot \frac{\nabla'}{L_0} \right] (U_0 \mathbf{U}') &= -\frac{1}{\rho} \frac{\nabla'}{L_0} (p' \rho U_0^2) + \nu \frac{\nabla'^2}{L_0^2} (U_0 \mathbf{U}') \implies \\ \frac{U_0^2}{L_0} \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t'} + \frac{U_0^2}{L_0} (\mathbf{U}' \cdot \nabla') \mathbf{U}' &= -\frac{U_0^2}{L_0} \nabla' p' + \frac{U_0 \nu}{L_0^2} \nabla'^2 \mathbf{U}', \end{aligned}$$

όπου η πυκνότητα δεν αδιαστατοποιήθηκε καθώς απαλείφεται από τον όρο της πίεσης. Πολλαπλασιάζοντας όλα τα μέλη στη συνέχεια με  $L_0/U_0^2$  το παραπάνω αποτέλεσμα γράφεται

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t'} + (\mathbf{U}' \cdot \nabla') \mathbf{U}' = -\nabla' p' + \frac{\nu}{L_0 U_0} \nabla'^2 \mathbf{U}',$$

<sup>5</sup> Για την πίεση δεν υπάρχει φυσική επιλογή για την αδιάστατη μεταβλητή  $p'$ . Αν επικρατεί το αδρανειακό μέρος επιλέγεται το παραπάνω αποτέλεσμα, ενώ αν επικρατούν τα φαινόμενα συνεκτικότητας επιλέγεται συνήθως η έκφραση  $p' = p L_0 / (\mu_0 U_0)$ .

## 2.6 Αδιαστατοποίηση και κανονικοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t'} + (\mathbf{U}' \cdot \nabla') \mathbf{U}' = -\nabla' p' + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{U}', \quad (2.8)$$

αφού για τον αριθμό Reynolds γνωρίζουμε ότι  $Re = \rho U D / \mu = U D / \nu$ . Η Εξίσωση (2.8) αποτελεί την αδιάστατη έκφραση των εξισώσεων Navier-Stokes για ασυμπίεστα ρευστά απουσία εξωτερικών δυνάμεων. Μία άμεση συνέπεια είναι ότι ο αριθμός Reynolds εξάγεται αβίαστα από την παραπάνω αδιαστατοποίηση ακόμα και αν δεν γνωρίζαμε την ύπαρξή του. Το γεγονός επίσης ότι πολλαπλασιάζει τον όρο συνεκτικότητας,  $\nabla'^2 \mathbf{U}'$  ουσιαστικά καθορίζει ποιοι όροι είναι σημαντικοί και ποιοι μπορούν να αμεληθούν. Λαμβάνοντας τα δύο όρια για τις τιμές του αριθμού Reynolds έχουμε

- $Re \rightarrow \infty \rightarrow \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{U}' \rightarrow 0 \rightarrow$  ο όρος συνεκτικότητας αμελείται,
- $Re \rightarrow 0 \rightarrow \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{U}' \rightarrow \infty \rightarrow$  ο όρος συνεκτικότητας επικρατεί.

Τέλος, θεωρώντας ότι  $\rho' = \rho / \rho_0$  οι εξισώσεις συνέχειας (1.6) και (1.7) δεν αλλάζουν μορφή καθώς

$$\nabla' \cdot \mathbf{U}' = L_0 \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{U}}{U_0} \right) = \frac{L_0}{U_0} \nabla \cdot \mathbf{U} = 0,$$

και

$$\frac{D\rho'}{Dt'} + \rho' \nabla' \cdot \mathbf{U}' = \frac{L_0}{\rho_0 U_0} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\rho}{\rho_0} L_0 \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{U}}{U_0} \right) = \frac{L_0}{\rho_0 U_0} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{U} \right) = 0,$$

διατηρώντας τις αναλλοίωτες με χρήση των μετασχηματισμών (2.5).

Η παραπάνω αδιαστατοποίηση αφορά αποκλειστικά τις διαστάσεις όλων των όρων που συνιστούν την εξίσωση Navier-Stokes καθώς είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε τιμή για τις παραμέτρους κλίμακας  $L_0$  και  $U_0$  χωρίς να μεταβληθεί η μορφή της Εξίσωσης (2.8). Ένα από τα μειονεκτήματα όμως της διατύπωσης αυτής είναι ότι δεν είναι προφανής η σχετική συνεισφορά του κάθε όρου πλὴν των ακραίων ορίων που διατυπώθηκαν παραπάνω. Δεν είναι δηλαδή ξεκάθαρη η συνεισφορά της τοπικής παραγωγού της ταχύτητας για παράδειγμα ως προς την κλίση πίεσης, τη συνεκτικότητα ή τις εξωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά τη ροή ενός ρευστού. Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο είναι απαραίτητο να κανονικοποιήσουμε τις εξισώσεις, δηλαδή να ορίσουμε τέτοιες παράμετρους κλίμακας έτσι ώστε όλα τα αδιάστατα μεγέθη (που στο εξής θα αναπαριστώνται με το σύμβολο  $\hat{\phantom{x}}$  για την αποφυγή σύγχυσης συγκριτικά με

## 2 ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

το συμβολισμό της προηγηθείσας ανάλυσης) να είναι όλα της τάξης μεγέθους της μονάδας

$$\hat{\mathbf{x}} \sim \mathcal{O}(1), \quad \hat{t} \sim \mathcal{O}(1), \quad \hat{\mathbf{U}} \sim \mathcal{O}(1) \quad \text{και} \quad \hat{p} \sim \mathcal{O}(1).$$

Με τον τρόπο αυτό η σχετική βαρύτητα του κάθε όρου θα καθορίζεται από την πολλαπλασιαστική σταθερά του καθώς όλα τα αδιάστατα μεγέθη είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Η κανονικοποίηση αυτή αποσκοπεί στη δημιουργία γνωστών πολλαπλασιαστικών σταθερών και ως εκ τούτου θα υποθέσουμε διαφορετική αδιαστατοποίηση σε σχέση με την περίπτωση που εξετάστηκε προηγουμένως. Συγκεκριμένα θεωρούμε ότι

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L_0}, \quad \hat{t} = f_0 t, \quad \hat{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}}{U_0}, \quad \text{και} \quad \hat{p} = \frac{p - p_\infty}{\Delta p},$$

όπου η αδιαστατοποίηση του χρόνου έλαβε χώρα με την εισαγωγή μίας συχνότητας αναφοράς,  $f_0$ , σε μονάδες  $\text{Hz}$  ή  $s^{-1}$ . Αντικαθιστώντας τότε στο αριστερό μέλος της Εξίσωσης (1.23) έχουμε

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} &= \rho U_0 f_0 \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial \hat{t}} + \rho \left[ (U_0 \hat{\mathbf{U}}) \cdot \frac{\hat{\nabla}}{L_0} \right] (U_0 \hat{\mathbf{U}}) \\ &= \rho U_0 f_0 \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial \hat{t}} + \frac{\rho U_0^2}{L_0} (\hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{U}}. \end{aligned}$$

και αντίστοιχα το δεξιό μέλος αν θεωρήσουμε τη βαρύτητα,  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$ , ως τη μοναδική εξωτερική δύναμη παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{U} &= \rho g \hat{\mathbf{g}} - \frac{\hat{\nabla}}{L_0} (\hat{p} \Delta p + p_\infty) + \mu \frac{\hat{\nabla}^2}{L_0^2} (U_0 \hat{\mathbf{U}}) \\ &= \rho g \hat{\mathbf{g}} - \frac{\Delta p}{L_0} \hat{\nabla} \hat{p} + \frac{\mu U_0}{L_0^2} \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{U}}. \end{aligned}$$

Επειδή τα αριστερά μέλη των παραπάνω δύο αποτελεσμάτων είναι ίσα, θα είναι και τα δεξιά δίνοντας

$$\rho U_0 f_0 \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial \hat{t}} + \frac{\rho U_0^2}{L_0} (\hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{U}} = \rho g \hat{\mathbf{g}} - \frac{\Delta p}{L_0} \hat{\nabla} \hat{p} + \frac{\mu U_0}{L_0^2} \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{U}}.$$

Πολλαπλασιάζοντας στη συνέχεια όλους του όρους με  $L_0/(\rho U_0^2)$  έχουμε

$$\frac{f_0 L_0}{U_0} \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{U}} = \frac{g L_0}{U_0^2} \hat{\mathbf{g}} - \frac{\Delta p}{\rho U_0^2} \hat{\nabla} \hat{p} + \frac{\mu}{\rho L_0 U_0} \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{U}}. \quad (2.9)$$

## 2.6 Αδιαστατοποίηση και κανονικοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes

Με απλή παρατήρηση της Εξίσωσης (2.9) διαπιστώνουμε ότι όλες οι πολλαπλασιαστικές σταθερές αποτελούν γνωστές αδιάστατες ομάδες στη μηχανική των ρευστών. Ακολουθώντας επομένως τον Πίνακα 2.2 προκύπτει

$$St \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + \left( \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\nabla} \right) \hat{\mathbf{U}} = \frac{1}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}} - Eu \hat{\nabla} \hat{p} + \frac{1}{Re} \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{U}}. \quad (2.10)$$

Επειδή όλα τα μεγέθη είναι της τάξης μεγέθους της μονάδας, διαπιστώνουμε ότι η σχετική βαρύτητα του κάθε όρου στην Εξίσωση (2.10) καθορίζεται από τις τιμές των αντίστοιχων αδιάστατων ομάδων. Αυτό με τη σειρά του αποτελεί σημαντικό εφόδιο στην κατανόηση μίας ροής αφού με τον απλό υπολογισμό των παραμέτρων αυτών είναι δυνατό να εξαχθούν σημαντικά συμπεράσματα για μία εν γένει πολύπλοκη ροή.

### 2.6.1 Έρπουσες ροές

Η πολυπλοκότητα των εξισώσεων Navier-Stokes έχει πλέον γίνει προφανής στο σημείο αυτό καθιστώντας ιδιαίτερα δύσκολη την εύρεση αναλυτικής λύσης για τις περισσότερες περιπτώσεις ροών. Για το λόγο αυτό, πολλές φορές αναγκαζόμαστε να θεωρήσουμε οριακές συνθήκες που αντιστοιχούν σε απλές γεωμετρίες ή σε κατάλληλες παραδοχές που απλοποιούν τις προς επίλυση εξισώσεις. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν ροές που χαρακτηρίζονται από χαμηλούς αριθμούς  $Re$  γνωστές ως *έρπουσες ροές* (creeping flows) ή ροές Stokes (Stokes flows). Οι ροές αυτές είναι δυνατό να μελετηθούν ποιοτικά με τη βοήθεια της Εξίσωσης (2.10), χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι όλα τα μεγέθη της εξίσωσης αυτής είναι της τάξης μεγέθους της μονάδας. Στην περίπτωση επιπλέον που η ροή είναι μόνιμη και δε λαμβάνεται υπόψη η επίδραση της βαρύτητας μπορούμε να γράψουμε

$$Eu \hat{\nabla} \hat{p} = \frac{1}{Re} \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{U}}.$$

Επειδή όμως

$$\hat{\nabla} \sim \mathcal{O}(1), \quad \hat{p} \sim \mathcal{O}(1) \quad \text{και} \quad \hat{\mathbf{U}} \sim \mathcal{O}(1),$$

προκύπτει ότι

$$Eu \sim \frac{1}{Re} \implies \frac{\Delta p}{\rho U^2} \sim \frac{\mu}{\rho U L} \implies \Delta p \sim \frac{\mu U}{L}.$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η μεταβολή της πίεσης σε μία έρπουσα ροή καθορίζεται από τη συνεκτικότητα του ρευστού όπως αυτή εκφράζεται από το δυναμικό ιξώδες,  $\mu$ , και όχι από το κινηματικό μέρος,  $\rho U^2$ , που ισχύει όταν η δυναμική

## 2 ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

συμπεριφορά μίας ροής καθορίζεται από το αδρανειακό της κομμάτι. Η ακρίβεια του παραπάνω αποτελέσματος βελτιώνεται όσο οι διαστάσεις του σώματος γύρω από το οποίο αναπτύσσεται η ροή ελαττώνονται και όσο αυξάνεται η συνεκτικότητα του ρευστού.

### 2.6.2 Μη συνεκτική ροή

Στην περίπτωση όπου οι συνεκτικές δυνάμεις θεωρούνται αμελητέες ή ασήμαντες ως προς τις αντίστοιχες αδρανειακές, η Εξίσωση (2.10) γράφεται

$$St \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + (\hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{U}} = \frac{1}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}} - Eu \hat{\nabla} \hat{p}.$$

Για μόνιμη επιπλέον ροή απουσία εξωτερικών δυνάμεων το παραπάνω αποτέλεσμα παίρνει τη μορφή

$$(\hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{U}} = -Eu \hat{\nabla} \hat{p}.$$

Επειδή όπως και στην προηγούμενη περίπτωση τα υπό εξέταση μεγέθη είναι της τάξης μεγέθους της μονάδας προκύπτει άμεσα ότι

$$|Eu| \sim 1 \implies \frac{|\Delta p|}{\rho U^2} \sim 1 \implies |\Delta p| \sim \rho U^2,$$

όπως εξάλλου ήταν αναμενόμενο για ροές υψηλού αριθμού  $Re$  που επικρατούν τα αδρανειακά χαρακτηριστικά της ροής.

## 2.7 Λυμένα παραδείγματα

### Παράδειγμα 5.1

Ο αριθμός Reynolds εξαρτάται από το κινηματικό ιξώδες, την ταχύτητα και ένα χαρακτηριστικό μήκος. Χρησιμοποιήστε τη διαστατική ανάλυση για να βρείτε τους αντίστοιχους εκθέτες των μεγεθών αυτών.

Σύμφωνα με την εκφώνηση μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό Reynolds ως εξής

$$Re = f(\nu, U, L).$$

Εκφράζοντας τα εξαρτημένα μεγέθη συναρτήσει των βασικών μονάδων του συστήματος  $MLT$  προκύπτει

$$[\nu] = L^2 T^{-1}, \quad [U] = L^1 T^{-1}, \quad [L] = L^1,$$

δίνοντας

$$M^0 T^0 L^0 = (L^2 T^{-1})^\alpha (L^1 T^{-1})^\beta L^\gamma = M^0 L^{2\alpha+\beta+\gamma} T^{-\alpha-\beta}.$$

Εφαρμόζοντας την αρχή της διαστατικής ομοιογένειας για κάθε μία από τις βασικές διαστάσεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned} -\alpha - \beta &= 0, \\ 2\alpha + \beta + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Ο αριθμός Reynolds επομένως εκφράζεται συναρτήσει μεγεθών που μηδενίζουν τους εκθέτες. Ένας συνδυασμός για τον οποίο ισχύει κάτι τέτοιο είναι ο  $-\alpha = \beta = \gamma = \kappa$ , όπου  $\kappa$  πραγματικός αριθμός, σχηματίζοντας το λόγο  $(UL/\nu)^\kappa$ . Η τιμή του  $\kappa$  υπολογίζεται από πειράματα και έχει βρεθεί ίση με τη μονάδα δίνοντας τελικά

$$Re = \frac{UL}{\nu}.$$

### Παράδειγμα 5.2

Ελέγξτε διαστατικά τη σχέση για τη διατμητική τάση

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy}.$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι τάση και επομένως έχει μονάδες  $Pa$ . Θα πρέπει επομένως και το δεξιό μέλος να έχει τις ίδιες μονάδες. Χρησιμοποιώντας ότι στο διεθνές σύστημα μονάδων το δυναμικό ιξώδες,  $\mu$ , εκφράζεται σε  $kg/(ms)$ , έχουμε

$$[\mu] \frac{[U]}{[y]} = \frac{M^1 L^1 T^{-1}}{L^1 T^1} \frac{1}{L^1} = \frac{M^1}{L^1 T^2} = \frac{M^1 L^1}{T^2} \frac{1}{L^2}.$$

Είναι προφανές ότι ο όρος  $M^1 L^1 / T^2$  εκφράζει δύναμη και ο όρος  $L^2$  εμβαδό. Το πηλίκο τους επομένως περιγράφει δύναμη ανά επιφάνεια, ή ισοδύναμα πίεση, ικανοποιώντας τη διαστατική ομοιογένεια της εξίσωσης για τη διατμητική τάση.

**Παράδειγμα 5.3**

Η πτώση πίεσης ανά μονάδα μήκους,  $\Delta p/L$ , λόγω της τριβής για ροή ρευστού σε αγωγό εξαρτάται από τη διάμετρο του αγωγού,  $D$ , την πυκνότητά του,  $\rho$ , και τη μέση ταχύτητα του ρευστού,  $U$ . Βρείτε τη σχέση μεταξύ των παραπάνω μεταβλητών που περιγράφουν τη ζητούμενη πτώση πίεσης.

Σύμφωνα με την εκφώνηση μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\Delta p}{L} = f(D, \rho, U),$$

όπου

$$[\Delta p/L] = M^1 L^{-2} T^{-2}, \quad [D] = L^1, \quad [\rho] = M^1 L^{-3}, \quad [U] = L^1 T^{-1}.$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.11) στην Εξίσωση (2.11) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} M^1 L^{-2} T^{-2} &= (L^1)^\alpha (M^1 L^{-3})^\beta (L^1 T^{-1})^\gamma \\ &= M^\beta L^{\alpha-3\beta+\gamma} T^{-\gamma}, \end{aligned}$$

δίνοντας το παρακάτω αλγεβρικό σύστημα

$$1 = \beta, \quad -2 = \alpha - 3\beta + \gamma, \quad -2 = -\gamma,$$

με λύση τις τιμές  $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, 1, 2)$ . Η ζητούμενη πτώση πίεσης ανά μονάδα μήκους τότε για ροή ρευστού σε αγωγό μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$\frac{\Delta p}{L} \propto D^\alpha \rho^\beta U^\gamma = D^{-1} \rho^1 U^2 = \frac{\rho U^2}{D}.$$

**Παράδειγμα 5.4**

Η ταχύτητα διάδοσης,  $U$ , ενός κύματος πίεσης σε ένα υγρό εξαρτάται από την πυκνότητα,  $\rho$ , και το μέτρο ελαστικότητας,  $E$ , του υγρού. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των εκθετών (μέθοδο του Rayleigh) για να θεμελιώσετε μία σχέση μεταξύ των παραπάνων μεγεθών.

Υποθέτοντας μία σχέση της μορφής

$$U = f(\rho, E),$$

όπου

$$[U] = L^1 T^{-1}, \quad [\rho] = M^1 L^{-3}, \quad [E] = M^1 L^{-1} T^{-2},$$

βρίσκουμε

$$L^1 T^{-1} = (M^1 L^{-3})^\alpha (M^1 L^{-1} T^{-2})^\beta = M^{\alpha+\beta} L^{-3\alpha-\beta} T^{-2\beta}.$$

Το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει λύνεται εύκολα δίνοντας

$$0 = \alpha + \beta, \quad 1 = -3\alpha - \beta, \quad -1 = -2\beta \implies (\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Επομένως

$$U = C \rho^\alpha E^\beta \implies U = C \rho^{-1/2} E^{1/2} \implies U = C \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

όπου  $C$  μία πολλαπλασιαστική σταθερά.

### Παράδειγμα 5.5

Ας υποθέσουμε λείο αγωγό σταθερής διαμέτρου,  $D$ , στον οποίο αναπτύσσεται τυρβώδης ροή ενός ρευστού σταθερής ταχύτητας,  $U$ , πυκνότητας,  $\rho$ , και ιξώδους,  $\mu$ . Ποια είναι η εξάρτηση των απωλειών ύψους,  $\Delta H$ , αν ο αγωγός έχει μήκος  $L$ ;

Επειδή δεν έχει νόημα να μιλάμε για απώλειες ύψους αν δεν γνωρίζουμε το μήκος του αγωγού, είναι σύνηθες αυτές να εκφράζονται με το ισοδύναμο και αδιάστατο μέγεθος  $\Delta H/L$ . Τότε η ζητούμενη σχέση παίρνει τη μορφή

$$\frac{\Delta H}{L} = f(D, U, \rho, \mu, g).$$

Γράφοντας τις διαστάσεις των παραπάνω πέντε μεταβλητών

$$[D] = L^1, \quad [U] = L^1 T^{-1}, \quad [\rho] = M^1 L^{-3}, \quad [\mu] = M^1 L^{-1} T^{-1}, \quad [g] = L^1 T^{-2},$$

παρατηρούμε ότι εμφανίζονται και οι τρεις βασικές διαστάσεις. Σύμφωνα επομένως με το θεώρημα Π του Buckingham, η σχέση που αναζητείται θα περιέχει  $6 - 3 = 3$  αδιάστατες ομάδες. Για να τις υπολογίσουμε διαλέγουμε τρεις εξαρτημένες μεταβλητές (έστω τις  $U$ ,  $\rho$  και  $\mu$ ) δίνοντας για την πρώτη ομάδα

$$\Pi_1 = \frac{\Delta H}{L} U^\alpha \rho^\beta \mu^\gamma \implies M^0 L^0 T^0 = \left(\frac{L}{T}\right)^\alpha \left(\frac{M}{L^3}\right)^\beta \left(\frac{M}{LT}\right)^\gamma,$$

## 2 ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

από όπου προκύπτει ότι

$$\beta + \gamma = 0, \quad \alpha - 3\beta - \gamma = 0, \quad -\alpha - \gamma = 0 \implies (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0),$$

και η πρώτη Π-ομάδα είναι απλά οι ζητούμενες απώλειες ανά μονάδα μήκους

$$\Pi_1 = \frac{\Delta H}{L}.$$

Για τη δεύτερη ομάδα

$$\Pi_2 = gU^\alpha \rho^\beta \mu^\gamma \implies M^0 L^0 T^0 = \frac{L}{T^2} \left(\frac{L}{T}\right)^\alpha \left(\frac{M}{L^3}\right)^\beta \left(\frac{M}{LT}\right)^\gamma,$$

και τότε

$$\beta + \gamma = 0, \quad 1 + \alpha - 3\beta - \gamma = 0, \quad -2 - \alpha - \gamma = 0 \implies (\alpha, \beta, \gamma) = (-3, -1, 1),$$

δηλαδή

$$\Pi_2 = gU^{-3} \rho^{-1} \mu^1 = \frac{g\mu}{\rho U^3}.$$

Τέλος, για την τρίτη ομάδα

$$\Pi_3 = DU^\alpha \rho^\beta \mu^\gamma \implies M^0 L^0 T^0 = L \left(\frac{L}{T}\right)^\alpha \left(\frac{M}{L^3}\right)^\beta \left(\frac{M}{LT}\right)^\gamma,$$

και εξισώνοντας τους αντίστοιχους εκθέτες

$$\beta + \gamma = 0, \quad 1 + \alpha - 3\beta - \gamma = 0, \quad -\alpha - \gamma = 0 \implies (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, -1),$$

δηλαδή

$$\Pi_3 = DU\rho\mu^{-1} = \frac{DU\rho}{\mu}.$$

Οι ζητούμενη επομένως εξάρτηση των απωλειών ύψους ανά μονάδα μήκους αγωγού δίνεται από τη σχέση  $\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3)$  δηλαδή

$$\frac{\Delta H}{L} = f\left(\frac{\mu}{\rho U D}, \frac{g\mu}{\rho U^3}\right).$$

### Παράδειγμα 5.6

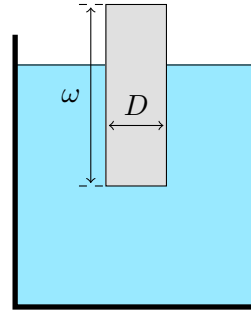
Κύλινδρος διαμέτρου  $D$  επιπλέει σε κατακόρυφη θέση σε υγρό ειδικού βάρους,  $\gamma$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ο κύλινδρος μετατοπιστεί κατά την κατακόρυφη διεύθυνση και αφεθεί ελεύθερος, εκτελεί ταλάντωση γύρω από ένα σημείο ισορροπίας με συχνότητα,  $\omega$ . Αν η μάζα του κυλίνδρου είναι  $m$ , υπολογίστε την εξάρτηση της συχνότητας από τα υπόλοιπα μεγέθη.

Η ζητούμενη σχέση εξάρτησης γράφεται

$$\omega = f(D, \gamma, m).$$

Οι διαστάσεις των μεταβλητών αυτών είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned} [D] &= L^1, \\ [\gamma] &= M^1 L^{-2} T^{-2}, \\ [m] &= M^1, \\ [\omega] &= T^{-1}. \end{aligned}$$



Επειδή το συγκεκριμένο πρόβλημα ορίζεται από τέσσερις συνολικά μεταβλητές ( $\omega, D, \gamma, m$ ) οι οποίες περιγράφονται και από τις τρεις βασικές διαστάσεις, έχουμε  $4 - 3 = 1$  αδιάστατη ομάδα που δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\Pi_1 = \omega D^\alpha \gamma^\beta m^\gamma \implies M^0 L^0 T^0 = T^{-1} L^\alpha \left( \frac{M}{L^2 T^2} \right)^\beta M^\gamma.$$

Το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει τότε λύνεται εύκολα ως εξής

$$-1 - 2\beta = 0, \quad \alpha - 2\beta = 0, \quad -\beta - \gamma = 0 \implies (\alpha, \beta, \gamma) = \left( -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

βρίσκοντας για τη μοναδική  $\Pi$ -ομάδα του παραδείγματος ότι

$$\Pi_1 = \frac{\omega}{D} \sqrt{\frac{m}{\gamma}} \implies \omega = CD \sqrt{\frac{\gamma}{m}},$$

όπου  $C$  μία πολλαπλασιαστική σταθερά. Βλέπουμε δηλαδή ότι η συχνότητα της ταλάντωσης αυξάνεται με αύξηση της διαμέτρου του κυλίνδρου ή του ειδικού βάρους του υγρού και μειώνεται με αύξηση της μάζας του κυλίνδρου.

### Παράδειγμα 5.7

Υπολογίστε τις αδιάστατες  $\Pi$ -ομάδες σε ένα πρόβλημα που αφορά την δύναμη αντίστασης,  $F$ , που δέχεται ένας κύλινδρος διαμέτρου,  $D$ , σε ένα ρευστό που ρέει με σταθερή ταχύτητα,  $U$ . Θεωρήστε σταθερή πυκνότητα και ιξώδες και αμελητέα επίδραση της βαρύτητας.

## 2 ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

Σύμφωνα με την εκφώνηση του παραδείγματος έχουμε την ακόλουθη σχέση μεταξύ των υπό εξέταση μεταβλητών και των βασικών μονάδων

$$[F] = M^1 L^1 T^{-2}, \quad [D] = L^1,$$

$$[U] = L^1 T^{-1}, \quad [\rho] = M^1 L^{-3}, \quad [\mu] = M^1 L^{-1} T^{-1}.$$

Επειδή έχουμε πέντε συνολικά μεταβλητές που για να οριστούν διαστατικά απαιτούνται και οι τρεις βασικές διαστάσεις προκύπτουν δύο Π-ομάδες. Για να τις υπολογίσουμε επιλέγουμε τις τρεις εξαρτημένες μεταβλητές,  $U$ ,  $\rho$  και  $D$  δίνοντας

$$\Pi_1 = F U^\alpha \rho^\beta D^\gamma \implies M^0 L^0 T^0 = \frac{ML}{T^2} \left(\frac{L}{T}\right)^\alpha \left(\frac{M}{L^3}\right)^\beta L^\gamma,$$

και τότε

$$1 + \beta = 0, \quad 1 + \alpha - 3\beta + \gamma = 0, \quad -2 - \alpha = 0 \implies (\alpha, \beta, \gamma) = (-2, -1, -2).$$

Η προκύπτουσα Π-ομάδα παίρνει τη μορφή

$$\Pi_1 = F U^{-1} \rho^{-1} D^{-2} = \frac{F}{\rho U^2 D^2}.$$

Ομοίως

$$\Pi_2 = \mu U^\alpha \rho^\beta D^\gamma \implies M^0 L^0 T^0 = \frac{M}{LT} \left(\frac{L}{T}\right)^\alpha \left(\frac{M}{L^3}\right)^\beta L^\gamma,$$

δίνοντας

$$1 + \beta = 0, \quad -1 + \alpha - 3\beta + \gamma = 0, \quad -1 - \alpha = 0 \implies (\alpha, \beta, \gamma) = (-1, -1, -1),$$

και την αντίστοιχη Π-ομάδα

$$\Pi_2 = \mu U^{-1} \rho^{-1} D^{-1} = \frac{\mu}{\rho U D}.$$

Με απλή απισκόπηση των αποτελεσμάτων είναι προφανές ότι όλες οι Π-ομάδες είναι αδιάστατες, ικανοποιώντας το Βήμα 6 της μεθοδολογίας. Αναγνωρίζοντας τέλος ότι η πρώτη ομάδα εκφράζει το συντελεστή αντίστασης,  $C_d$ , και η δεύτερη τον αντίστροφο αριθμό Reynolds προκύπτει τελικά ότι

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \implies C_d = f(Re).$$

**Παράδειγμα 5.8**

Ένα μοντέλο υπερχειλίσης έχει σχεδιαστεί με κλίμακα  $1 : \kappa$ . Αν η παροχή στο πρωτότυπο είναι  $Q_{\Pi} = 10000 \text{ m}^3/\text{s}$  και στο μοντέλο  $Q_M = 0,1 \text{ m}^3/\text{s}$ , υπολογίστε το λόγο της γεωμετρικής ομοιότητας  $\kappa$ .

Επειδή στο πρόβλημα αυτό υπεισέρχεται ελεύθερη επιφάνεια και η ροή αναπτύσσεται λόγω της βαρύτητας, θα χρησιμοποιήσουμε την ισότητα του αριθμού Froude μεταξύ μοντέλου και πρωτότυπου. Έχουμε λοιπόν ότι,

$$Fr_M = Fr_{\Pi} \implies \frac{U_M}{\sqrt{g_M L_M}} = \frac{U_{\Pi}}{\sqrt{g_{\Pi} L_{\Pi}}} \implies \frac{U_M}{\sqrt{L_M}} = \frac{U_{\Pi}}{\sqrt{L_{\Pi}}}.$$

Γνωρίζοντας το λόγο των ταχυτήτων ως προς το λόγο των χαρακτηριστικών μηκών μπορούμε να υπολογίσουμε το λόγο των παροχών ως εξής

$$\frac{Q_M}{Q_{\Pi}} = \frac{U_M A_M}{U_{\Pi} A_{\Pi}} = \frac{U_M L_M^2}{U_{\Pi} L_{\Pi}^2}.$$

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι

$$\frac{Q_{\Pi}}{Q_M} = \sqrt{\frac{L_{\Pi}}{L_M}} \frac{L_{\Pi}^2}{L_M^2} = \left(\frac{L_{\Pi}}{L_M}\right)^{5/2} = \kappa^{5/2},$$

και αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$\kappa = \left(\frac{Q_{\Pi}}{Q_M}\right)^{2/5} = \left(\frac{10000}{0,1}\right)^{2/5} = 100000^{2/5} = 100.$$

**Παράδειγμα 5.9**

Μία αντλία αναμένεται να τροφοδοτεί μία μεγάλη αρδευτική εγκατάσταση με νερό παροχής  $1 \text{ m}^3/\text{s}$ . Για τη μελέτη της εγκατάστασης αυτής κατασκευάζεται ένα μοντέλο κλίμακας  $1 : 5$ . Ποια είναι η παροχή όγκου και η μεταβολή της πίεσης στο μοντέλο αν η αντίστοιχη αύξηση πίεσης στην αντλία είναι  $\Delta p = 200 \text{ kPa}$ ;

Υποθέτοντας ότι ικανοποιούνται όλα τα κριτήρια ομοιότητας έχουμε

$$Re_M = Re_{\Pi} \implies \frac{\rho_M D_M U_M}{\mu_M} = \frac{\rho_{\Pi} D_{\Pi} U_{\Pi}}{\mu_{\Pi}}.$$

## 2 ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

Επειδή και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιείται το ίδιο ρευστό  $\mu_M = \mu_{\Pi}$  και  $\rho_M = \rho_{\Pi}$  δίνοντας

$$D_M U_M = D_{\Pi} U_{\Pi} \implies \frac{U_{\Pi}}{U_M} = \frac{D_M}{D_{\Pi}} = \frac{1}{5}.$$

Επομένως ο λόγος των ταχυτήτων είναι αντιστρόφως ανάλογος του λόγου των διαμέτρων. Είναι πλέον δυνατό να υπολογιστεί ο λόγος των παροχών όγκου χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα δίνοντας

$$\frac{Q_M}{Q_{\Pi}} = \frac{L_M^2 U_M}{L_{\Pi}^2 U_{\Pi}} = \frac{L_M^2 D_{\Pi}}{L_{\Pi}^2 D_M} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot 5 = \frac{1}{5},$$

και τότε

$$Q_M = \frac{1}{5} Q_{\Pi} = 0,2 \frac{m^3}{s}.$$

Η μεταβολή της πίεσης τότε στο μοντέλο μπορεί να εκτιμηθεί εξισώνοντας τον αριθμό Euler,

$$Eu_M = Eu_{\Pi} \implies \frac{\Delta p_M}{\rho_M U_M^2} = \frac{\Delta p_{\Pi}}{\rho_{\Pi} U_{\Pi}^2} \implies \frac{\Delta p_M}{\Delta p_{\Pi}} = \frac{U_{\Pi}^2}{U_M^2}.$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει τελικά ότι

$$\Delta p_M = \Delta p_{\Pi} \left(\frac{U_M}{U_{\Pi}}\right)^2 = 200 \text{ kPa} \cdot 5^2 = 5000 \text{ kPa}.$$

### Παράδειγμα 5.10

Ένα αεροπλάνο σχεδιάζεται σε μοντέλο κλίμακας 1 : κ για τη μελέτη της οπισθέλκουσας δύναμης. Αν θεωρήσουμε ότι οι συνθήκες είναι σταθερές στο μοντέλο και στο πρωτότυπο, να υπολογιστεί η οπισθέλκουσα δύναμη στο πρώτο, αν η αντίστοιχη στο δεύτερο ισούται με 1000 N.

Η οπισθέλκουσα δύναμη στο μοντέλο μπορεί να υπολογιστεί εξισώνοντας τους συντελεστές οπισθέλκουσας δύναμης,  $C_D$ , μεταξύ μοντέλου και πρωτότυπου σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό,

$$C_D = \frac{\text{δύναμη}}{\text{κινητική ενέργεια ρευστού} \times \text{επιφάνεια}} = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho U^2 A}.$$

Εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές,

$$C_{D,M} = C_{D,\Pi} \implies \frac{F_M}{\frac{1}{2}\rho_M U_M^2 A_M} = \frac{F_\Pi}{\frac{1}{2}\rho_\Pi U_\Pi^2 A_\Pi} \implies \frac{F_M}{U_M^2 A_M} = \frac{F_\Pi}{U_\Pi^2 A_\Pi},$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{F_M}{F_\Pi} = \frac{U_M^2 A_M}{U_\Pi^2 A_\Pi} = \frac{U_M^2 L_M^2}{U_\Pi^2 L_\Pi^2},$$

όπου  $L$  ένα χαρακτηριστικό μήκος. Χρησιμοποιώντας τελικά από την ισότητα του αριθμού Reynolds ότι ο λόγος των ταχυτήτων ισούται με τον αντίστροφο λόγο των χαρακτηριστικών μηκών (βλέπε προηγούμενη άσκηση) προκύπτει

$$\frac{F_M}{F_\Pi} = 1 \implies F_\Pi = 1000 \text{ N}.$$

### Παράδειγμα 5.11

Προσδιορίστε το είδος της ροής νερού στο εσωτερικό κυλινδρικού αγωγού σταθερής διαμέτρου  $D = 10 \text{ cm}$ , αν η μέση ταχύτητα του είναι  $\bar{U} = 4 \text{ cm/s}$ . Χρησιμοποιήστε ότι το δυναμικό ιξώδες για τις συνθήκες της συγκεκριμένης ροής ισούται με  $8,89 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

Για να προσδιορίσουμε το είδος της ροής αρκεί να υπολογίσουμε τον αριθμό Reynolds. Από την Εξίσωση (2.4) προκύπτει

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,04 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,1 \text{ m}}{8,89 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 4500.$$

Η ροή επομένως θα είναι τυρβώδης, αφού  $Re > 4000$ .

### Παράδειγμα 5.12

α) Βρείτε μία έκφραση που να συνδέει τον αριθμό Reynolds με την παροχή του ρευστού. β) Νερό ρέει στο εσωτερικό σωλήνα διαμέτρου  $D = 20 \text{ cm}$  με παροχή  $Q = 4 \text{ lt/s}$ . Αν  $\mu = 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , προσδιορίστε το είδος της ροής.

## 2 ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

α) Γνωρίζουμε ότι

$$Q = UA,$$
$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}.$$

Συνδιάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει

$$Re = \frac{\rho \left(\frac{Q}{A}\right) D}{\mu} = \frac{\rho \left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right) D}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\pi D \mu}.$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι αύξηση της διαμέτρου ή του δυναμικού ιξώδους ελαττώνουν τον αριθμό Reynolds οδηγώντας τη ροή στη στρωτή περιοχή, ενώ αντίθετως αύξηση της πυκνότητας ή της παροχής οδηγούν τη ροή στην τυρβώδη περιοχή.

β) Αντικαθιστώντας τα δεδομένα της άσκησης,

$$Re = \frac{4 \cdot 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 4 \frac{lt}{s} \cdot 1 m^3}{\pi \cdot 0,2 m \cdot 8,9 \cdot 10^{-4} Pa \cdot s} = \frac{16 \frac{kg}{s}}{5,589 \cdot 10^{-4} \frac{N}{m}} = 28627.$$

Επομένως η ροή είναι τυρβώδης.

### Παράδειγμα 5.13

Για ποιες τιμές της παροχής σε  $lt/s$  η ροή της παραπάνω άσκησης θα βρίσκεται στη μεταβατική περιοχή;

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης γνωρίζουμε ότι

$$Re = \frac{4\rho Q}{\pi D \mu} \implies Q = Re \frac{\pi D \mu}{4\rho}.$$

Θέλουμε η ροή να βρίσκεται στη μεταβατική περιοχή, δηλαδή αρκεί να ικανοποιείται η συνθήκη  $2000 < Re < 4000$ . Για το ελάχιστο όριο έχουμε

$$Q_{Re=2000} = 2000 \cdot \frac{\pi \cdot 0,2 m \cdot 8,9 \cdot 10^{-4} Pa \cdot s}{4 \cdot 1000 \frac{kg}{m^3}} = 3,2 \cdot 10^{-4} \frac{m^3}{s} = 0,32 \frac{lt}{s}.$$

Για το μέγιστο όριο αντίστοιχα προκύπτει

$$Q_{Re=4000} = 4000 \cdot \frac{\pi \cdot 0,2 \text{ m} \cdot 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}}{4 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 5,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0,56 \frac{\text{lt}}{\text{s}}.$$

Η παροχή επομένως που αντιστοιχεί στη μεταβατική ροή ικανοποιεί την ανισότητα

$$Q_{Re=2000} < Q < Q_{Re=4000} \implies 0,32 \frac{\text{lt}}{\text{s}} < Q < 0,56 \frac{\text{lt}}{\text{s}}.$$

### Παράδειγμα 5.14

Σωλήνας τετραγωνικής διατομής πλευράς 1 cm διαρρέεται από γλυκερίνη σταθερής πυκνότητας 1,26 gr/cm<sup>3</sup> και δυναμικού ιξώδους 0,95 Pa · s. Αν η ταχύτητα ροής ισούται με 20 cm/s, υπολογίστε τον αριθμό Reynolds.

Σε αντίθεση με όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις, η διατομή του σωλήνα στη συγκεκριμένη άσκηση είναι τετραγωνική. Το ερώτημα που αυτόματα τίθεται αφορά το χαρακτηριστικό μήκος στην εξίσωση για τον αριθμό Reynolds. Στην περίπτωση των κυλινδρικών αγωγών είναι προφανές ότι αυτό θα είναι η διάμετρος. Ποιο είναι όμως το αντίστοιχο μήκος σε αγωγούς των οποίων η γεωμετρία δεν είναι τόσο συμμετρική και η επιλογή του χαρακτηριστικού μήκους τόσο προφανής; Για να απαντηθεί το ερώτημα αυτό εισάγουμε την έννοια της *υδραυλικής διαμέτρου*,  $D_H$ , η οποία ορίζεται ως

$$D_H = \frac{4A}{P},$$

όπου  $A$  και  $P$  το εμβαδό της διατομής και η βρεχόμενη περίμετρος του αγωγού αντίστοιχα. Η εξίσωση για τον αριθμό Reynolds τότε παίρνει τη μορφή,

$$Re = \frac{\rho U D_H}{\mu}.$$

Επομένως είναι προφανές γιατί στην περίπτωση των κυλινδρικών αγωγών χρησιμοποιείται η διάμετρος για το χαρακτηριστικό μήκος αφού,

$$D_H = \frac{4 \frac{\pi D^2}{4}}{\pi D} = D.$$

## 2 ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

Για αγωγούς τετραγωνικής διατομής πλευράς  $\alpha$  από την άλλη έχουμε  $D_H = \alpha$  δίνοντας

$$Re = \frac{\rho U \alpha}{\mu} = \frac{1,26 \frac{gr}{cm^3} \cdot 20 \frac{cm}{s} \cdot 1 cm}{0,95 Pa \cdot s} = \frac{1260 \frac{kg}{m^3} \cdot 0,2 \frac{m}{s} \cdot 0,01 m}{0,95 Pa \cdot s} = 2,65.$$

### Παράδειγμα 5.15

Ένα ψάρι χαρακτηριστικού μήκους  $1m$  κολυμπάει σε νερό πυκνότητας  $997kg/m^3$  και ιξώδους  $1,0016 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$ . Η κίνηση του ψαριού θεωρείται περιοδική με περίοδο  $0.5s$  όταν η ταχύτητα του νερού ισούται με  $10m/s$ . Αν  $\Delta p = 10 KPa$ , συγκρίνεται τους αδιάστατους αριθμούς της κανονικοποιημένης εξίσωσης Navier-Stokes ( $g = 9,81m/s^2$ ).

Ξεκινώντας από την Εξίσωση (2.10) και υπενθυμίζοντας ότι όλα τα μεγέθη με περισπωμένη είναι της τάξης μεγέθους της μονάδας προκύπτει για τον κάθε όρο ξεχωριστά

$$St \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{t}} = \frac{fL}{U} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{t}} \sim \frac{2 \cdot 1}{10} = 0,2, \quad \frac{1}{Fr^2} \hat{g} = \frac{gL}{U^2} \hat{g} \sim \frac{9,81 \cdot 1}{10^2} = 0,0981,$$

$$Eu \hat{\nabla} \hat{p} = \frac{\Delta p}{\rho U^2} \hat{\nabla} \hat{p} \sim \frac{10000}{997 \cdot 100} = 0,1, \quad \frac{1}{Re} \hat{\nabla}^2 \hat{U} = \frac{\mu}{\rho LU} \hat{\nabla}^2 \hat{U} = 10^{-7}.$$

Συμπεραίνουμε επομένως ότι όλοι οι όροι της εξίσωσης είναι συγκρίσιμοι εκτός από τον αδρανειακό όρο που είναι αμελητέος.

---

## ΑΠΩΛΕΙΕΣ ΡΟΗΣ

### 3.1 Εισαγωγή

---

Στην παράγραφο 1.5.2.1 παρουσιάστηκε μία έκφραση για την εξίσωση ενέργειας παρουσία μηχανών που αποδίδουν ή καταναλώνουν έργο σε ένα ρευστομηχανικό σύστημα και απωλειών λόγω της ροής του ρευστού. Μέρος της ενέργειας που είναι αποθηκευμένη ή προσδίδεται σε αυτό χρησιμοποιείται για να ισοσταθμίσει τις απώλειες που αναπτύσσονται τόσο μεταξύ του ρευστού και των τοιχωμάτων των αγωγών, όσο και λόγω των εσωτερικών τριβών του. Ο υπολογισμός των απωλειών αυτών είναι αναγκαίος, καθώς αποτελεί έναν από τους βασικότερους παράγοντες για τη μελέτη του εκάστοτε συστήματος και την επιλογή των κατάλληλων διατάξεων (όπως αντλίες, ηλεκτροκινητήρες, κ.λπ.) με σκοπό την εύρυθμη λειτουργία του. Αν οι απώλειες λόγω ροής σε αγωγό εκφραστούν σε μονάδες μήκους, τότε ονομάζονται *απώλειες ύψους* και χωρίζονται σε δύο κατηγορίες,

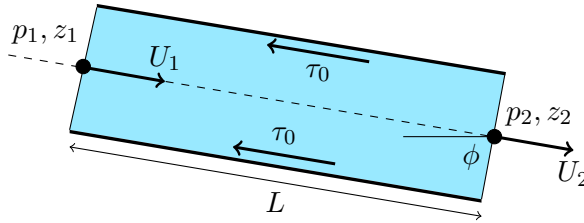
- τις *συνεχείς απώλειες* που οφείλονται στην αναπτυσσόμενη διαμητρική τάση στα τοιχώματα λόγω της κίνησης του ρευστού,
- τις *τοπικές απώλειες* που οφείλονται σε απότομες μεταβολές της γεωμετρίας ή της διεύθυνσης ροής του ρευστού.

Το συνολικό ύψος απωλειών τότε ισούται με το άθροισμα των συνεχών και τοπικών απωλειών.

## 3.2 Συνεχείς απώλειες

### 3.2.1 Η εξίσωση των Darcy-Weisbach

Έστω κλειστός αγωγός σταθερής διαμέτρου,  $D$ , του οποίου ο άξονας συμμετρίας σχηματίζει γωνία  $\phi$  με το οριζόντιο επίπεδο όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1. Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν συσκευές που προσδίδουν ή κα-



Σχήμα 3.1: Συνεχείς απώλειες και διατμητική τάση για ροή σε σωλήνα.

ταναλώνουν έργο, η γενική εξίσωση ενέργειας (1.97) παίρνει τη μορφή

$$\frac{U_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{U_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + h_f,$$

ή ισοδύναμα

$$h_f = \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} + (z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}.$$

Επειδή η διατομή του αγωγού έχει θεωρηθεί σταθερή προκύπτει ότι  $U_1 = U_2$  και οι συνεχείς απώλειες δίνονται από την παρακάτω έκφραση

$$h_f = (z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}. \quad (3.1)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Newton σε ένα ροϊκό στοιχείο του Σχήματος 3.1. Οι δυνάμεις που ασκούνται είναι αυτές της πίεσης, της διατμητικής τάσης που ανθίσταται στην κίνηση και του βάρους του ροϊκού στοιχείου. Η παροχή ορμής επίσης ισούται με το μηδέν καθώς

$$\rho (U_1 Q_1 - U_2 Q_2) = 0.$$

Συλλέγοντας όλα τα παραπάνω, οι δυνάμεις κατά τη διεύθυνση της ροής γράφονται

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{\tau_0} + \mathbf{F}_g = 0 &\implies \\ (p_1 - p_2) \frac{\pi D^2}{4} - \tau_0 \cdot (\pi DL) + \gamma \left( \frac{\pi D^2}{4} \right) L \cdot \sin \phi = 0 &\implies \\ \frac{\gamma D}{4} \left[ \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (z_1 - z_2) \right] = \tau_0 L, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι  $\sin \phi = (z_1 - z_2)/L$ . Τελικά βρίσκουμε ότι

$$\frac{4\tau_0 L}{\gamma D} = (z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}. \quad (3.2)$$

Παρατηρώντας τις Εξισώσεις (3.1) και (3.2) βλέπουμε ότι τα δεξιά μέλη είναι ίσα και επομένως

$$h_f = \frac{4\tau_0 L}{\gamma D}. \quad (3.3)$$

Το αποτέλεσμα (3.3) συσχετίζει τις συνεχείς απώλειες,  $h_f$ , ενός συγκεκριμένου ρευστού με την αναπτυσσόμενη διατμητική τάση,  $\tau_0$ , το μήκος,  $L$ , και τη διάμετρο,  $D$ . Όπως είναι αναμενόμενο, οι απώλειες εξαρτώνται ανάλογα με τις τάσεις και το μήκος του αγωγού και αντιστρόφως ανάλογα της διαμέτρου του. Μία άμεση συνέπεια είναι ότι αγωγοί πολύ μεγάλου μήκους αναπτύσσουν σημαντικές απώλειες ανεξάρτητα από τη φύση του ρευστού. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητη η εφαρμογή αντλιών κατά μήκος τους με σκοπό την αναπλήρωση της απαιτούμενης ενέργειας εξασφαλίζοντας έτσι την ομαλή λειτουργία σε όλο το μήκος της εκάστοτε εγκατάστασης.

Μία ισοδύναμη έκφραση της Εξίσωσης (3.3) μπορεί να εξαχθεί εκφράζοντας τις συνεχείς απώλειες συναρτήσει του κινηματικού ύψους,  $U^2/2g$ , ως εξής

$$h_f = \frac{4\tau_0}{\gamma} \frac{2g}{U^2} \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = \frac{4\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}. \quad (3.4)$$

Ο λόγος  $8\tau_0/(\rho U^2)$  ονομάζεται συντελεστής τριβής,  $f$ , είναι αδιάστατος αριθμός και συνήθως υπολογίζεται από το διάγραμμα Moody που παρουσιάζεται παρακάτω. Η Εξίσωση (3.4) τότε παίρνει την τελική της μορφή

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}, \quad (3.5)$$

και έχει επικρατήσει ως η εξίσωση των Darcy-Weisbach προς τιμή του Γάλλου μηχανικού Darcy (Henry Darcy, 1803-1858) και του Γερμανού μαθηματικού Weisbach (Julius Weisbach, 1806-1871). Αξίζει να σημειωθεί ότι για την Εξίσωση (3.5) δεν έγινε διάκριση στο είδος της ροής, αν δηλαδή είναι στρωτή ή τυρβώδης και επομένως η εξίσωση των Darcy-Weisbach ισχύει για οποιαδήποτε ροή υπό πίεση. Επίσης θεωρήσαμε κυλινδρικό αγωγό, αλλά η ανάλυση μπορεί να επεκταθεί για οποιονδήποτε αγωγό σταθερής διατομής.

### 3.2.2 Η εξίσωση των Hazen-Williams

Η εξίσωση των Hazen-Williams είναι μία εμπειρική εξίσωση για τον υπολογισμό των απωλειών ύψους σε ένα σωλήνα που διαρέεται από νερό όταν η ροή είναι τυρβώδης. Η εξίσωση αυτή υπερτερεί της αντίστοιχης των Darcy-Weisbach στο γεγονός ότι δεν απαιτεί καμία επαναληπτική για τον υπολογισμό των απωλειών, αλλά ταυτόχρονα συνοδεύεται από αρκετούς περιορισμούς. Συγκεκριμένα, μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε δίκτυα μεταφοράς νερού, που περιέχουν αγωγούς με διάμετρο στο διάστημα  $5,08\text{cm} \leq D \leq 15,24\text{cm}$  και ταχύτητες νερού  $U < 3,048\text{m/s}$ .<sup>1</sup> Για μεγαλύτερους αγωγούς ή ταχύτητες το σφάλμα στους υπολογισμούς αυξάνεται και τα ποατελέσματα δε θεωρούνται αξιόπιστα. Με τις προϋποθέσεις αυτές η εξίσωση των Hazen-Williams γράφεται

$$h_f = L \left( \frac{Q}{0,849 A C_h R_h^{0,63}} \right)^{1,852}, \quad (3.6)$$

όπου  $C_h$  ένας αδιάστατος συντελεστής που ονομάζεται συντελεστής των Hazen-Williams (δίνεται από πίνακες) και  $R_h$  η υδραυλική ακτίνα της ροής. Με βάση την Εξίσωση (3.6) προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις για την ταχύτητα και την παροχή ως

$$U = 0,849 C_h R_h^{0,63} S^{0,54},$$

$$Q = 0,849 A C_h R_h^{0,63} S^{0,54},$$

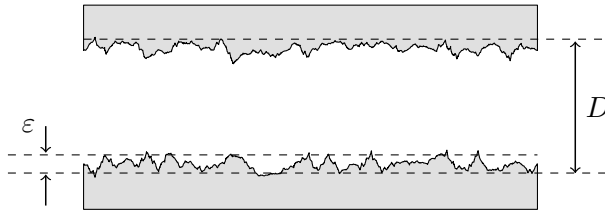
αντίστοιχα όπου  $S$  οι απώλειες ύψους ανά μονάδα μήκους του σωλήνα. Παρόλο που οι εξισώσεις αυτές δεν επιτρέπουν τον υπολογισμό της επίδρασης της πυκνότητας ή του ιξώδους του νερού στους υπολογισμούς, δίνουν εν γένει μία απόκλιση της τάξης του 10% σε σχέση με τα πιο ακριβή αποτελέσματα των Darcy-Weisbach.

<sup>1</sup> Τα νούμερα αυτά αν και διαισθητικά δε φαίνονται λογικά προκύπτουν από τις αντίστοιχες τιμές στο αγγλοσαξονικό σύστημα μονάδων όπου  $2'' \leq D \leq 6''$  και  $U < 10\text{ft/s}$ .

### 3.2.3 Ο συντελεστής τριβής

#### 3.2.3.1 Τραχύτητα αγωγού

Η *τραχύτητα* (roughness),  $\epsilon$ , ενός τοιχώματος αναφέρεται στην υφή ή τις ανωμαλίες στην εσωτερική επιφάνεια του τοιχώματος. Διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στα χαρακτηριστικά ροής του ρευστού, καθώς επηρεάζει την αντίσταση στη ροή και την πτώση πίεσης εντός ενός σωλήνα ή αγωγού. Η τραχύτητα εκφράζεται σε μονάδες μήκους (συνήθως εκατοστά ή χιλιοστά) και μπορεί να ποικίλλει ανάλογα με το υλικό και την κατάσταση του σωλήνα. Συχνά επίσης χρησιμοποιείται και η *σχετική τραχύτητα* (relative roughness) που ορίζεται ως τον λόγο  $\epsilon/D$ , όπου  $D$  η διάμετρος του αγωγού. Στο Σχήμα 3.2 παρουσιάζεται μία σχηματική αναπαράσταση της ανομοιογένειας στην εσωτερική επιφάνεια ενός αγωγού βοηθώντας μας να ορίσουμε την τραχύτητα ως ένα μετρο της μέσης απόκλισης λόγω ατελειών της εσωτερικής επιφάνειας σε σύγκριση με ένα απόλυτα λείο εσωτερικά αγωγό.



Σχήμα 3.2: Τραχύτητα και σχετική τραχύτητα.

Η επίδραση της τραχύτητας στην περίπτωση της στρωτής ροής είναι μικρή καθώς η στρωματοποίηση της ροής λόγω της σημαντικής συνεκτικότητας αποσβένει τυχόν ανομοιομορφίες που αναπτύσσονται και σε συνδυασμό με τις χαμηλές ταχύτητες κοντά στο τοίχωμα, αποτρέπει τη δημιουργία και τη διάδοση διαταραχών. Αντιθέτως, για μεγάλους αριθμούς  $Re$  όπου επικρατούν οι μη γραμμικοί όροι των εξισώσεων Navier-Stokes, το ρευστό χάνει αυτή τη δυνατότητα απόσβεσης. Η αυξανόμενη τότε με το χρόνο συσσώρευση ανομοιομορφιών στη ροή οδηγεί και σε μεγαλύτερες κατά μήκος του αγωγού απώλειες. Στον Πίνακα 3.1 παρουσιάζονται μερικές χαρακτηριστικές τιμές της τραχύτητας για διάφορα υλικά. Είναι προφανές ότι δεν είναι δυνατό να συμπεριληφθούν όλα τα υλικά σε έναν πίνακα. Ως εκ τούτου, ο μηχανικός ή ο ερευνητής που μελετάει ένα συγκεκριμένο υλικό, τις περισσότερες φορές απευθύνεται στην κατασκευάστρια εταιρία ή στο αντίστοιχο εγχειρίδιο λειτουργίας.

Πίνακας 3.1: Τιμές τραχύτητας για διάφορα υλικά.

Υλικό	Τραχύτητα (mm)
Γαλβανισμένος σίδηρος	0,15
Ανοξείδωτος χάλυβας	0,002
Χυτοσίδηρος	0,26
Χαλκός	0,0015
Τσιμέντο	0,5 – 3
Λείο ξύλο	0,9

### 3.2.3.2 Εξισώσεις που περιγράφουν το συντελεστή τριβής

Εκτός από το διάγραμμα Moody που εξετάζεται παρακάτω και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του συντελεστή τριβής, έχουν κατά καιρούς προταθεί μία σειρά από εμπειρικές και μη σχέσεις ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του αγωγού και το είδος της ροής. Μερικές από τις πιο χαρακτηριστικές είναι οι ακόλουθες εξισώσεις των:

- Blasius για λείους αγωγούς και για την περιοχή  $4 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^5$

$$f = 0,3164 \cdot Re^{-0,25}.$$

- Colebrook-White για τυρβώδη ροή

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re\sqrt{f}} \right).$$

Η εξίσωση αυτή προτάθηκε το 1939 και αποτελεί τη πιο γνωστή εμπειρική σχέση για τον υπολογισμό του συντελεστή τριβής σε τυρβώδη ροή. Λαμβάνει υπόψη τόσο τον αριθμό  $Re$  όσο και την τραχύτητα του αγωγού και η γραφική απεικόνιση αυτής αποτελεί το διάγραμμα Moody που εξετάζεται στην επόμενη ενότητα. Επειδή η εξίσωση είναι πεπλεγμένη δεν είναι δυνατό να λυθεί αναλυτικά παρά μόνο με χρήση κάποιας επαναληπτικής διαδικασίας.

- Swamee-Jain για ροή σε αγωγούς στην τυρβώδη περιοχή ( $Re > 4000$ )

$$f = \frac{0,25}{\left[ \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2}.$$

Αποτελεί προσέγγιση της εξίσωσης Colebrook και το σημαντικότερο πλεονέκτημά της είναι ότι μπορεί να λυθεί αναλυτικά αφού δεν έχει πεπλεγμένη μορφή.

- Haaland για πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε κύλινδρο

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \log \left[ \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right)^{1,11} + \frac{6,9}{Re} \right].$$

Προτάθηκε το 1983 από τον S.E. Haaland και όπως στην περίπτωση της εξίσωσης Swamee-Jain μπορεί να λυθεί απευθείας για τον υπολογισμό του συντελεστή τριβής,  $f$ .

- Prandtl (1935) για τυρβώδη ροή σε λείους αγωγούς

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,0 \log (Re \sqrt{f}) - 0,8.$$

Όσο αφορά την περίπτωση στρωτής ροής σε κυλινδρικό αγωγό, ο συντελεστής τριβής,  $f$ , είναι δυνατό να υπολογιστεί αναλυτικά συνδυάζοντας γνωστά αποτελέσματα ως εξής. Από την Ενότητα 1.3.5.4.1 γνωρίζουμε ότι η πτώση πίεσης ανά μονάδα μήκους ενός κυλινδρικού αγωγού δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{32\mu U}{D^2},$$

όπου  $U$  η μέση ταχύτητα του ρευστού σε μία διατομή του αγωγού. Οι απώλειες ύψους επιπέδων,  $h_f$ , εκφράζονται από την Εξίσωση (3.5) επομένως

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = \frac{\Delta p}{\gamma} \implies \frac{\Delta p}{L} = f \frac{\rho U^2}{2D}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω δύο αποτελέσματα προκύπτει τελικά ότι

$$\frac{32\mu U}{D^2} = f \frac{\rho U^2}{2D} \implies f = \frac{64\mu}{\rho U D} \implies f = \frac{64}{Re}. \quad (3.7)$$

Όπως είναι αναμενόμενο, ρευστά με μεγάλο ιξώδες ή ροές που χαρακτηρίζονται από χαμηλές ταχύτητες ή που λαμβάνουν χώρα σε αγωγούς μικρών διατομών αντιστοιχούν σε μεγάλους συντελεστές τριβής.

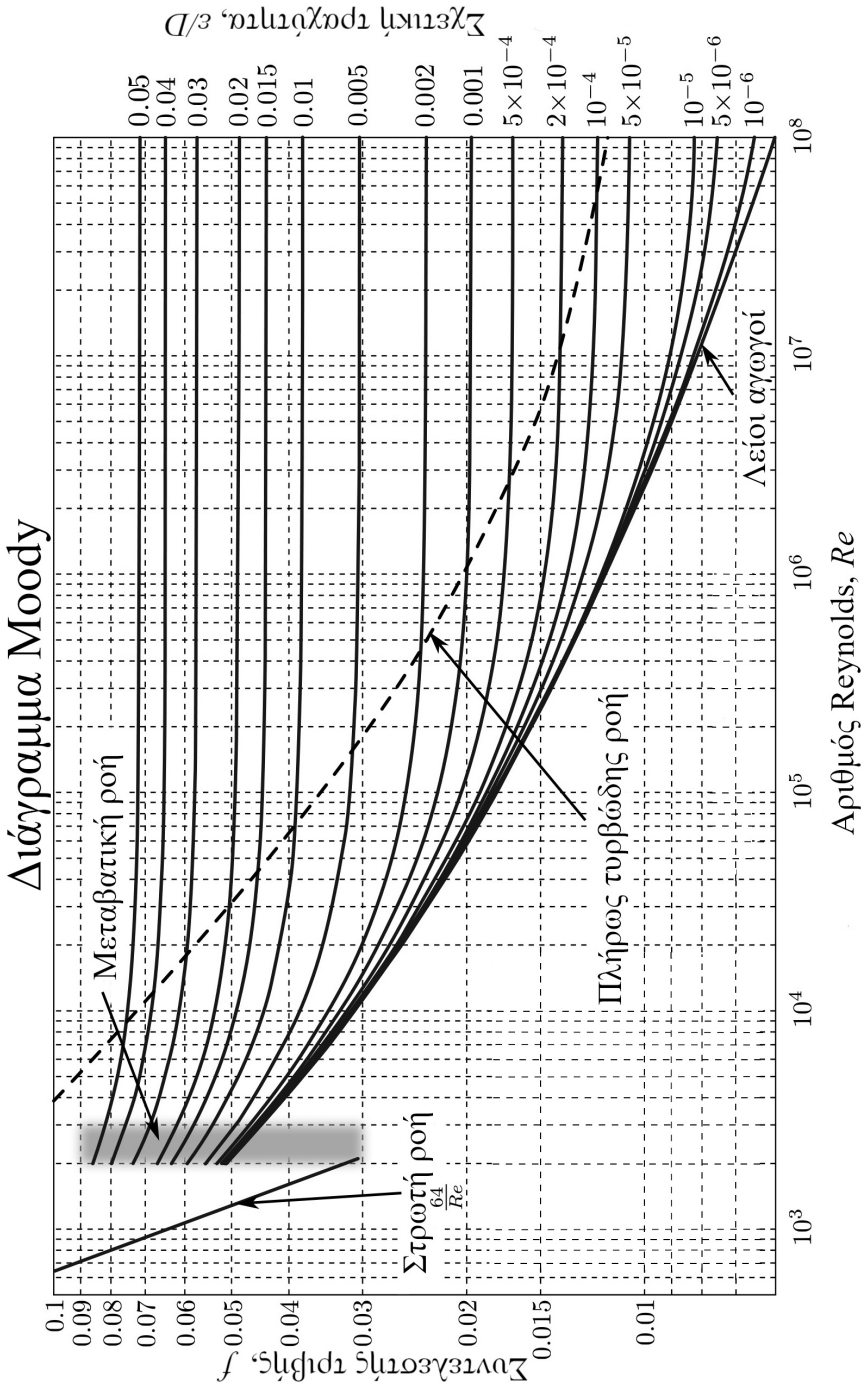
### 3.2.3.3 Διάγραμμα Moody

Η αποτυχία να βρεθεί μία θεωρία που θα υπολογίζει το συντελεστή τριβής για όλες τις περιπτώσεις, οδήγησε τον Lewis Ferry Moody (1880–1953) να σχεδιάσει ένα διάγραμμα για τον προσδιορισμό του. Το διάγραμμα αυτό που παρουσιάστηκε το 1944, χρησιμοποιεί την εξίσωση των Colebrook-White και δίνει προσεγγιστικές τιμές για τον συντελεστή τριβής συναρτήσει της σχετικής τραχύτητας και του αριθμού  $Re$ . Ονομάστηκε *διάγραμμα Moody* (Moody diagram ή Moody chart) προς τιμήν του και αποτελεί ίσως το διασημότερο διάγραμμα στη μηχανική των ρευστών.

Στο Σχήμα 3.3 παρουσιάζεται ένα τυπικό διάγραμμα Moody. Ο οριζόντιος άξονας περιέχει τον αριθμό  $Re$ , ο δεξιά κάθετος τη σχετική τραχύτητα,  $\varepsilon/D$ , και ο αριστερά κάθετος το συντελεστή τριβής,  $f$ . Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της ροής, στο διάγραμμα διακρίνονται τρεις κατηγορίες. Στη στρωτή ροή ( $Re < 2000$ ) όπου ο συντελεστής τριβής είναι αντιστρόφως ανάλογος του αριθμού Reynolds και μπορεί να υπολογιστεί εύκολα χρησιμοποιώντας τη σχέση  $f = 64/Re$ . Στη μεταβατική περιοχή ( $2000 \leq Re \leq 4000$ ) στην οποία η ροή είναι ασταθής καθώς μπορεί να κυμαίνεται μεταξύ στρωτής και τυρβώδους και δεν είναι εύκολος ο υπολογισμός του συντελεστή τριβής με ακρίβεια. Για το λόγο αυτό στα περισσότερα διαγράμματα η περιοχή αυτή παρουσιάζεται σκιασμένη αφού τα αποτελέσματα δεν θεωρούνται ιδιαίτερα αξιόπιστα. Τέλος, στη τυρβώδη περιοχή ( $Re > 4000$ ) όπου ο συντελεστής τριβής μειώνεται όσο αυξάνεται ο αριθμός Reynolds και αυξάνεται καθώς αυξάνεται η σχετική τραχύτητα του σωλήνα.

Η χρήση του διαγράμματος για τον υπολογισμό του  $f$  αποτελείται από τρία βήματα

- *Βήμα 1:* γνωρίζοντας την τιμή της σχετικής τραχύτητας προσδιορίζουμε την αντίστοιχη καμπύλη στο διάγραμμα. Αν η προκύπτουσα τιμή δεν αντιστοιχεί σε μία δοσμένη καμπύλη, μπορούμε να εφαρμόσουμε μία μέθοδο παρεμβολής για την έυρεσή της.
- *Βήμα 2:* από την τιμή του αριθμού  $Re$  στον οριζόντιο άξονα που αντιστοιχεί στην υπό εξέταση ροή φέρουμε κάθετη προς τα επάνω.
- *Βήμα 3:* η καμπύλη του Βήματος 1 και η κάθετη του Βήματος 2 έχουν ένα μοναδικό σημείο τομής. Από το σημείο αυτό φέρουμε παράλληλη ως προς τον οριζόντιο άξονα μέχρι να τμήσει τον άξονα του συντελεστή τριβής και διαβάζουμε την τιμή που προκύπτει.



Σχήμα 3.3: Διάγραμμα Moody για τον υπολογισμό του συντελεστή τριβής.

### 3 ΑΠΩΛΕΙΕΣ ΡΟΗΣ

Δύο σημαντικές διαπιστώσεις αξίζει να αναφερθούν στο σημείο αυτό παρατηρώντας το διάγραμμα. Η πρώτη είναι ότι ακόμα και για λείους αγωγούς ο συντελεστής τριβής είναι μη μηδενικός. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ακόμα και στην περίπτωση απουσίας "τριβής" αναπτύσσεται αντίσταση στη ροή λόγω συνεκτικότητας του ρευστού. Η τραχύτητα επομένως παρόλο που συνεισφέρει σημαντικά στην αντίσταση που αναπτύσσεται σε μία ροή δεν αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την εμφάνισή της. Η διαπίστωση αυτή ισοδύναμα μπορεί να εκφραστεί με τη συνθήκη μη ολίσθησης που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 4. Για μεγάλους επίσης αριθμούς Reynolds παρατηρούμε ότι οι καμπύλες γίνονται σχεδόν οριζόντιες και η τιμή του συντελεστή τριβής εξαρτάται μόνο από τη σχετική τραχύτητα. Αυτό συμβαίνει γιατί το πάχος του οριακού στρώματος (που εξετάζεται στο επόμενο κεφάλαιο) γίνεται πολύ λεπτό και η ροή επηρεάζεται ουσιαστικά μόνο από την τραχύτητα του αγωγού.

Με τη βοήθεια όλων των παραπάνω θεωρήσεων μπορούμε να χωρίσουμε τα προβλήματα της κατηγορίας αυτής σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις σύμφωνα με τον Πίνακα 3.2. Χαρακτηριστικά παραδείγματα των κατηγοριών αυ-

Πίνακας 3.2: Κατηγορίες προβλημάτων υπολογισμού απωλειών.

$\alpha/\alpha$	Ζητείται	Δίνονται	Μέθοδος επίλυσης
1	$h_f$	$Q, L, D, \nu, \varepsilon$	Απευθείας
2	$U$ ή $Q$	$h_f, L, D, \nu, \varepsilon$	Επαναλήψεις
3	$D$	$h_f, L, Q, \nu, \varepsilon$	Επαναλήψεις

τών παρουσιάζονται στην ενότητα των λυμένων παραδειγμάτων.

### 3.3 Τοπικές απώλειες

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήθηκαν οι απώλειες κατά τη ροή ενός ρευστού διαμέσου ευθύγραμμων αγωγών σταθερής διατομής. Όλες οι πραγματικές εγκαταστάσεις όμως δεν αποτελούνται αποκλειστικά από τέτοιου τύπου αγωγούς, αλλά και από πλήθος εξαρτημάτων (ενώσεις, βαλβίδες, προσαρμογείς, μετρητικά όργανα, βάνες) ή τμήματα μεταβλητής γεωμετρίας (στόμια εισόδου-εξόδου ροής, καμπυλώσεις, γωνίες, διακλαδώσεις) που υποβαθμίζουν και αυτά με τη σειρά τους την ενεργειακή κατάσταση ενός ρευστού. Οι απώλειες αυτές

ονομάζονται *τοπικές* ή *δευτερεύουσες*<sup>2</sup> (minor losses) και η αναλυτική του μελέτη με σκοπό την παραγωγή ακριβών αποτελεσμάτων είναι πρακτικά αδύνατη λόγω του τεράστιου αριθμού διαφορετικών τέτοιων διατάξεων και της πολυπλοκότητας της ροής διαμέσω αυτών.

Αν συμβολίσουμε τις τοπικές απώλειες με  $h_m$  και θαωρήσουμε ότι εξαρτάται μόνο από την μέση ταχύτητα του ρευστού,  $U$ , και την επιτάχυνση της βαρύτητας,  $g$ , προκύπτει με χρήση του θεωρήματος  $\Pi$  του Buckingham ότι υπάρχει μόνο μία αδιάστατη ομάδα που δίνεται από τη σχέση

$$\Pi_1 = h_m U^\alpha g^\beta \implies M^0 L^0 T^0 = L \left( \frac{L}{T} \right)^\alpha \left( \frac{L}{T^2} \right)^\beta = L^{1+\alpha+\beta} T^{-\alpha-2\beta},$$

και εξισώνοντας τους αντίστοιχους εκθέτες

$$1 + \alpha + \beta = 0, \quad -\alpha - 2\beta = 0 \implies (\alpha, \beta) = (-2, 1),$$

δίνοντας

$$\Pi_1 = h_m \frac{g}{U^2} \implies h_m = C \frac{U^2}{g},$$

όπου  $C$  μία πολλαπλασιαστική σταθερά. Είμαστε πλέον σε θέση να ισχυριστούμε ότι οι τοπικές απώλειες είναι ανάλογες του κινηματικού ύψους της ενέργειας του ρευστού,  $U^2/2g$ , και μίας νέας σταθεράς που συμβολίζεται με  $\kappa$  και ονομάζεται συντελεστής τοπικών απωλειών, δηλαδή

$$h_m = \kappa \frac{U^2}{2g}.$$

Ο συντελεστής τοπικών απωλειών είναι ένας εμπειρικός συντελεστής, η τιμή του οποίου εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Είναι όμως δυνατό να γίνουν εκτιμήσεις για το εύρος τιμών του, καθώς όπως είναι φυσικό περιμένουμε μεγάλες τιμές σε απότομες και αποκλίνουσες ροές όπου ευνοείται η δημιουργία στροβίλων και μικρότερες τιμές σε ομαλές και συγκλίνουσες ροές. Εξαιτίας του τεράστιου αριθμού διαφορετικών γεωμετριών και ροών, δεν είναι δυνατό να κατασκευαστεί ένα αντίστοιχο με το Moody διάγραμμα για τον προσδιορισμό του

<sup>2</sup> Στο βιβλίο αυτό χρησιμοποιείται ο όρος τοπικές απώλειες διότι πολύ συχνά δημιουργείται σύγχυση και σχηματίζεται λανθασμένα η εντύπωση ότι οι απώλειες αυτές είναι αμελητέες (δηλαδή δευτερεύουσες) και μπορούν είτε να μη ληφθούν υπόψη ή να αγνοηθούν ως προς τις αντίστοιχες γραμμικές. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα μία μερικώς ανοιχτή βαλβίδα, όπως οι τοπικές απώλειες όχι μόνο δεν μπορούν να αγνοηθούν αλλά μπορεί να είναι και μεγαλύτερες των αντίστοιχων γραμμικών.

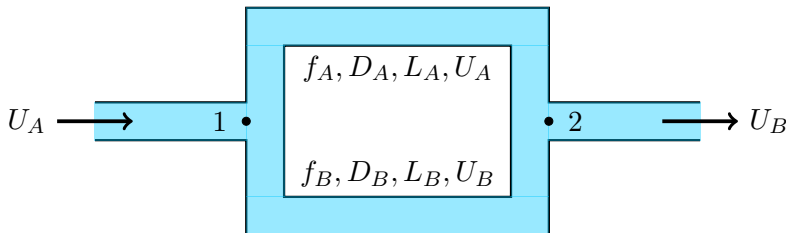
συντελεστή,  $\kappa$ . Για το λόγο αυτό, έχουν κατασκευαστεί πίνακες και γραφικές παραστάσεις με τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις εφαρμογών που αποτελούν μέχρι και σήμερα τον καταλληλότερο οδηγό για τον προσδιορισμό του συντελεστή τοπικών απωλειών. Στο Παράρτημα Δ παρουσιάζονται οι σημαντικότερες γεωμετρίες και οι αντίστοιχες τιμές του συντελεστή, ακολουθώντας τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο βιβλίο των Cengel και Cimbala<sup>3</sup> και διάφορες άλλες πηγές.

### 3.4 Συνολικές απώλειες και παράλληλη σύνδεση

Είμαστε σε θέση πλέον να εκφράσουμε το συνολικό ύψος απωλειών,  $h_{o\lambda}$ , ως το άθροισμα συνεχών και τοπικών

$$h_{o\lambda} = \sum_{i,j} (h_{i,f} + h_{j,m}) = \sum_i f_i \frac{L_i}{D_i} \frac{U_i^2}{2g} + \sum_j \kappa_j \frac{U_j^2}{2g}, \quad (3.8)$$

όπου  $i$  και  $j$  οι επιμέρους γραμμικές και τοπικές απώλειες αντίστοιχα. Η Εξίσωση (3.8) ονομάζεται εξίσωση συνδυασμένου ύψους απωλειών και εφαρμόζεται σε πιο πολύπλοκα συστήματα σύνδεσης αγωγών. Ένα τέτοιο είναι και η παράλληλη σύνδεση δύο αγωγών όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4. Τα σημεία 1 και 2



Σχήμα 3.4: Ροή σε παράλληλη σύνδεση σωλήνων.

ονομάζονται κόμβοι ή σημεία διακλάδωσης (junctions) και με απλή επισκόπηση είναι προφανές ότι

$$Q_1 = Q_A + Q_B = Q_2. \quad (3.9)$$

Η πτώση πίεσης,  $p_2 - p_1$ , θα πρέπει να είναι ίδια ανεξάρτητα της διαδρομής που θα ακολουθήσει το ρευστό. Εν γένει τρεις είναι οι κανόνες που πρέπει να ικανοποιούνται σε μία τέτοια διάταξη

<sup>3</sup> Fluid Mechanics, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering.

### 3.4 Συνολικές απώλειες και παράλληλη σύνδεση

- η παροχή μάζας προς ένα κόμβο (1) ισούται με την παροχή μάζας από ένα κόμβο (2),
- η ροή σε κάθε ένα από τους αγωγούς σε παράλληλη σύνδεση θα πρέπει να ικανοποιεί τις δοθείσες εξισώσεις απωλειών,
- το άθροισμα των απωλειών σε μία κλειστή καμπύλη θα πρέπει να είναι ίση με το μηδέν.

Οι δύο πρώτοι κανόνες είναι αρκετά προφανείς και δεν χρειάζεται να αναλυθούν περαιτέρω. Ο τρίτος όμως φαινομενικά αντιβαίνει τη διαίσθησή μας καθώς αναφέρει ότι ανεξάρτητα των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των αγωγών, οι απώλειες στον κλειστό βρόχο του σχήματος είναι ίσες με μηδέν. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό θα θεωρήσουμε μία έκφραση παρόμοια με την Εξίσωση (1.97) για να εκφράσουμε την ενεργειακή διαφορά μεταξύ των σημείων 1 και 2 συναρτήσει των απωλειών,  $h_f$ , ως εξής<sup>4</sup>

$$\frac{U_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{U_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + h_f,$$

δίνοντας για τους αγωγούς  $A$  και  $B$  ότι

$$h_{f,A} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} + z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\gamma},$$

$$h_{f,B} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} + z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\gamma}.$$

Με απλή επισκόπηση παρατηρούμε ότι τα δεξιά μέλη είναι ίσα αφού αναφέρονται στα ίδια σημεία 1 και 2, δηλαδή

$$h_{f,A} = h_{f,B} \implies \sum_{i=A,B} h_{f,i} = 0.$$

Το αποτέλεσμα αυτό προφανώς δεν υπονοεί ότι οι συνολικές απώλειες ισούνται με το μηδέν, αλλά ότι και οι δύο σωλήνες που σχηματίζουν τον κλειστό βρόχο του Σχήματος 3.4 συνεισφέρουν εξίσου στην ενεργειακή υποβάθμιση του ρεστού από το σημείο 1 στο σημείο 2.

Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα τότε είναι δυνατόν να προκύψει θεωρώντας την Εξίσωση (3.5) για τους δύο κλάδους  $A$  και  $B$  του βρόχου αφού

$$f_A \frac{L_A}{D_A} \frac{U_A^2}{2g} = f_B \frac{L_B}{D_B} \frac{U_B^2}{2g} \implies \frac{U_A}{U_B} = \sqrt{\frac{f_B L_B D_A}{f_A L_A D_B}}.$$

<sup>4</sup> Θεωρώντας αμελητέες τοπικές απώλειες.

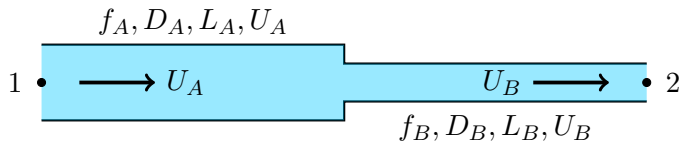
Γνωρίζοντας επομένως τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των σωλήνων και τους αντίστοιχους συντελεστές τριβής μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή της ροής στους αγωγούς αυτούς. Μεταβολή των χαρακτηριστικών αυτών θα οδηγήσει προφανώς σε αλλαγή των ταχυτήτων αυτών και σε αυτορρύθμιση του συστήματος ώστε να ικανοποιούνται όλες οι παραπάνω θεωρήσεις. Διατάξεις με περισσότερους σωλήνες και πιο πολύπλοκα συστήματα αποτελούν τα λεγόμενα *δίκτυα σωληνώσεων* που δεν αποτελούν αντικείμενο του παρόντος βιβλίου και ο αναγνώστης καλείται να συμβουλευτεί βιβλία εφαρμοσμένης μηχανικής ρευστών ή υδραυλικής.

### 3.5 Σύνδεση σωλήνων σε σειρά

Στην περίπτωση σύνδεσης σωλήνων σε σειρά η εξίσωση ενέργειας αμελώντας το κινηματικό ύψος του ρευστού και θεωρώντας οριζόντια διάταξη γράφεται

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = h_{f,A} + h_{f,B} = f_A \frac{L_A}{D_A} \frac{U_A^2}{2g} + f_B \frac{L_B}{D_B} \frac{U_B^2}{2g},$$

αγνοώντας τις τοπικές απώλειες όπως φαίνεται γραφικά στο Σχήμα 3.5. Η πτώση πίεσης δηλαδή μεταξύ των σημείων 1 και 2 ισούται με το άθροισμα των γραμμικών απωλειών κατά μήκος των σωλήνων. Από την εξίσωση συνέχειας



Σχήμα 3.5: Ροή σε σύνδεση σωλήνων σε σειρά.

επίσης γνωρίζουμε ότι η παροχή όγκου πρέπει να είναι σταθερή. Η αντίστοιχη σχέση της Εξίσωσης (3.9) για την παροχή παίρνει τότε τη μορφή

$$Q_A = Q_B \implies U_A A_A = U_B A_B.$$

Στην περίπτωση που οι συντελεστές τριβής είναι ίσοι, είναι δυνατό να υπολογιστούν οι συνολικές απώλειες συναρτήσει ενός ισοδύναμου σωλήνα με μήκος  $L = L_A + L_B$  και διάμετρο  $D_{l\sigma}$ . Με τη βοήθεια της εξίσωσης Darcy-Weisbach μπορούμε τότε να γράψουμε

$$f \frac{L}{D_{l\sigma}} \frac{U^2}{2g} = f \frac{L_A}{D_A} \frac{U_A^2}{2g} + f \frac{L_B}{D_B} \frac{U_B^2}{2g},$$

όπου  $U = 4Q/\pi D^4$  δίνοντας

$$\frac{L}{D_{\iota\sigma}^5} \frac{8fQ^2}{g\pi^2} = \left( \frac{L_A}{D_A^5} + \frac{L_B}{D_B^5} \right) \frac{8fQ^2}{g\pi^2} \implies D_{\iota\sigma} = \left( \frac{L}{\frac{L_A}{D_A^5} + \frac{L_B}{D_B^5}} \right)^{1/5}.$$

Προφανώς, στην ειδική περίπτωση όπου  $L_A = L_B = L/2$  και  $D_A = D_B = D$  προκύπτει ότι  $D_{\iota\sigma} = D$ .

### 3.6 Λυμένα παραδείγματα

#### Παράδειγμα 6.1

Αγωγός μήκους  $L = 30m$  και διάμετρου  $D = 30mm$  διαρρέεται από νερό παροχής  $Q = 2lt/s$  και κινηματικού ιξώδους  $\nu = 10^{-6} m^2/s$ . Αν η τραχύτητα του αγωγού  $\varepsilon = 0,06mm$ , υπολογίστε το ύψος απωλειών του αγωγού για  $g = 9,81m/s^2$ .

Το παράδειγμα αυτό ανήκει στην πρώτη κατηγορία του Πίνακα 3.2 καθώς η επίλυση μπορεί να γίνει απευθείας και χωρίς τη χρήση επαναληπτικής μεθόδου. Για να υπολογίσουμε λοιπόν τις συνεχείς απώλειες χρησιμοποιούμε την εξίσωση των Darcy-Weisbach αφού υπολογίσουμε τη μέση ταχύτητα ροής

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0,002 \frac{m^3}{s}}{\pi (0,03m)^2} = 2,83 \frac{m}{s}.$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τα αποτελέσματα για τον αριθμό Reynolds και τη σχετική τραχύτητα

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{2,83 \frac{m}{s} \cdot 0,03m}{10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 84900 \quad \text{και} \quad \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,06mm}{30mm} = 0,002,$$

στο διάγραμμα Moody βρίσκουμε  $f = 0,0254$ . Αντικαθιστώντας τέλος στην Εξίσωση (3.5) προκύπτει ότι

$$h_f = 0,02537 \cdot \frac{30m}{0,03m} \cdot \frac{8 \frac{m^2}{s^2}}{19,62 \frac{m}{s^2}} = 10,36m.$$

## Παράδειγμα 6.2

Ένας οριζόντιος αγωγός μήκους  $L = 380m$  και διαμέτρου  $D = 8cm$  παρουσιάζει πτώση πίεσης ίση με  $190kPa$ . Αν η τραχύτητα του αγωγού είναι  $0,32mm$ , προσδιορίστε την παροχή όγκου για  $\nu = 10^{-6}m^2/s$  και  $g = 9,81m/s^2$ .

Η ζητούμενη παροχή θα προκύψει από τη σχέση  $Q = UA$ . Από τα δεδομένα της άσκησης μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό της διατομής,  $A$ , αλλά δεν γνωρίζουμε την ταχύτητα,  $U$ . Επειδή όμως η διάμετρος του αγωγού είναι σταθερή και ο αγωγός είναι οριζόντιος έχουμε  $U_1 = U_2$ ,  $z_1 = z_2$  και η εξίσωση ενέργειας (1.97) απλοποιείται ως εξής

$$h_f = \frac{p_1 - p_2}{\gamma},$$

δίνοντας

$$h_f = \frac{190000Pa}{9810 \frac{N}{m^3}} = \frac{190000 \frac{N}{m^2}}{9810 \frac{N}{m^3}} = 19,37m.$$

Η σχετική τραχύτητα,  $\varepsilon/D$ , επίσης προκύπτει ίση με 0,004. Δεν είναι όμως γνωστός ο αριθμός Reynolds με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατός ο προσδιορισμός του συντελεστή τριβής. Μπορούμε όμως να υποθέσουμε (και να ελέγξουμε στο τέλος) ότι η ροή είναι πλήρως τυρβώδης με αποτέλεσμα οι καμπύλες στο διάγραμμα Moody να είναι σχεδόν παράλληλες και να μην εξαρτάται η τιμή του συντελεστή τριβής από τον αριθμό Reynolds. Προκύπτει τότε ότι

$$f = 0,0284.$$

Είναι πλέον δυνατός ο υπολογισμός της ταχύτητας και κατά συνέπεια και της παροχής αφού

$$U = \sqrt{\frac{2gDh_f}{fL}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 0,08m \cdot 19,37m}{0,0284 \cdot 380m}} = 1,68 \frac{m}{s}.$$

Η ταχύτητα αυτή ισοδυναμεί με παροχή ίση με

$$Q = UA = 1,68 \frac{m}{s} \cdot \frac{3,14 \cdot (0,08m)^2}{4} = 8,44 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}.$$

**ΕΛΕΓΧΟΣ:** Γνωρίζοντας την ταχύτητα, είμαστε πλέον σε θέση να ελέγξουμε την υπόθεση της τυρβώδους ροής υπολογίζοντας τον αριθμό Reynolds

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{1,68 \frac{m}{s} \cdot 0,08m}{10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 134400.$$

Η ροή επομένως είναι τυρβώδης και ο συντελεστής τριβής που υπολογίστηκε παραπάνω είναι ακριβής και δεν χρειάζεται διόρθωση.

### Παράδειγμα 6.3

Καύσιμο diesel κινηματικού ιξώδους  $5 \text{ mm}^2/\text{s}$  πρόκειται να μεταφερθεί μέσω κυλινδρικού αγωγού διαμέτρου  $40 \text{ cm}$  σε μία δεξαμενή που απέχει  $100 \text{ m}$ . Αν η απαιτούμενη παροχή ισούται με  $0,003 \text{ m}^3/\text{s}$ , υπολογίστε τις συνεχείς απώλειες του αγωγού αν  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

Θα ελέγξουμε αρχικά αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης για να υπολογίσουμε το συντελεστή τριβής. Έχουμε λοιπόν

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0,003 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\pi \cdot (0,4\text{m})^2} = 0,024 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

και τότε

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{0,024 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,4\text{m}}{5 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}} \cdot \frac{10^{-6} \text{m}^2}{\text{mm}^2}} = 1920.$$

Η ροή δηλαδή είναι στρωτή και ο υπολογισμός του συντελεστή τριβής μπορεί να γίνει με χρήση της Εξίσωσης (3.7) δίνοντας  $f = 0,0333$ . Οι απώλειες επομένως του αγωγού ισούνται με

$$\begin{aligned} h_f &= 0,0333 \cdot \frac{100\text{m}}{0,4\text{m}} \cdot \frac{\left(0,024 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{19,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,0333 \cdot 250 \cdot \frac{5,76 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{19,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\ &= 2,44 \cdot 10^{-4} \text{m}. \end{aligned}$$

Λόγω της ιδιαίτερα μικρής τιμής της ταχύτητας αναπτύσσονται πολύ μικρές συνεχείς απώλειες. Απώλειες τέτοιου μεγέθους δεν εμφανίζονται συνήθως σε πραγματικές εφαρμογές.

## Παράδειγμα 6.4

Νερό κινηματικού ιξώδους  $\nu = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  θα μεταφερθεί με χρήση αγωγού από γαλβανισμένο σίδηρο τραχύτητας  $\varepsilon = 0,28 \text{ mm}$ . Οι προδιαγραφές της εγκατάστασης επιβάλλουν ύψος απωλειών ίσο με  $2 \text{ m}$  κάθε  $500 \text{ m}$  αγωγού όταν η παροχή όγκου είναι  $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$ . Προσδιορίστε τη διάμετρο του αγωγού,  $D_0$ , αν  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

Στην άσκηση αυτή τόσο ο συντελεστής τριβής όσο και η διάμετρος δεν είναι γνωστά μεγέθη και επομένως η εξίσωση των Darcy-Weisbach περιέχει δύο αγνώστους, τα  $h_f$  και  $f$ . Έχουμε λοιπόν

$$h_f = \frac{f}{2g} \frac{L}{D} \frac{16Q^2}{\pi^2 D^4} = \frac{16Q^2 f L}{2g \pi^2 D^5}.$$

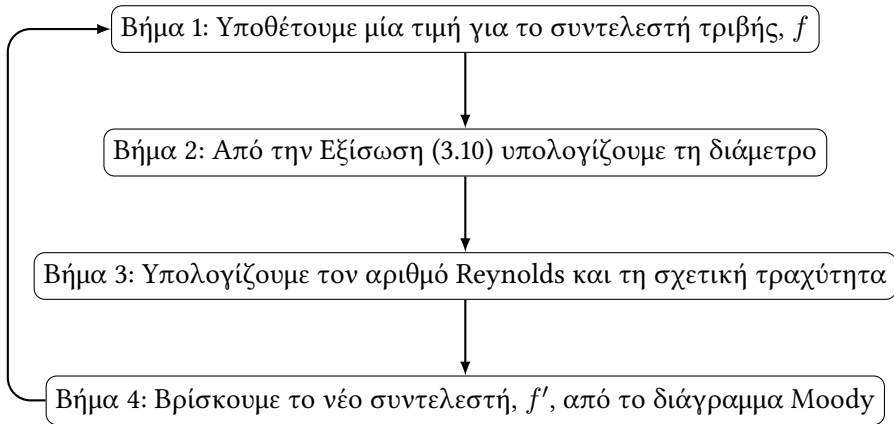
Επειδή ζητείται η διάμετρος, το παράδειγμα αυτό ανήκει στην τρίτη κατηγορία του Πίνακα 3.2. Λύνοντας τότε ως προς τη ζητούμενη διάμετρο σχηματίζεται η παρακάτω σχέση μεταξύ αυτής και του συντελεστή τριβής

$$\frac{D^5}{f} = \frac{16Q^2 L}{2g \pi^2 h_f} \implies \frac{D}{f^{1/5}} = \left( \frac{8Q^2 L}{g \pi^2 h_f} \right)^{1/5},$$

και αντικαθιστώντας

$$\frac{D}{f^{1/5}} = \left[ \frac{8 \cdot \left( 0,1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right)^2 \cdot 500 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \pi^2 \cdot 2 \text{ m}} \right]^{1/5} = (0,207 \text{ m}^5)^{1/5} = 0,73 \text{ m}. \quad (3.10)$$

Τα άγνωστα μεγέθη στην Εξίσωση (3.10) δεν υπολογίζονται αναλυτικά, αλλά μπορούν να προσεγγιστούν με μεγάλη ακρίβεια με τη μέθοδο των δοκιμών. Η μέθοδος των δοκιμών είναι μία επαναληπτική μέθοδος, η οποία αποτελείται από τα εξής βήματα: υποθέτουμε αρχικά μία τιμή για το  $f$  (βήμα 1). Χρησιμοποιώντας την τιμή αυτή και την Εξίσωση (3.10) υπολογίζουμε τη διάμετρο  $D$  (βήμα 2). Στο σημείο αυτό είναι πλέον γνωστά όλα τα μεγέθη, οπότε υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds και τη σχετική τραχύτητα (βήμα 3). Στο τελευταίο βήμα (βήμα 4), υπολογίζουμε το νέο συντελεστή τριβής,  $f'$ , που προκύπτει από τις τιμές του προηγούμενου βήματος και συγκρίνουμε την τιμή  $f$  που υποθέσαμε αρχικά με την τιμή  $f'$  που υπολογίσαμε από το διάγραμμα Moody. Αν οι δύο αυτές



Σχήμα 3.6: Η μέθοδος των δοκιμών και τα βήματα που την απαρτίζουν.

τιμές διαφέρουν αρκετά, επαναλαμβάνεται η διαδικασία. Το κριτήριο για την ολοκλήρωση της επαναληπτικής διαδικασίας λαμβάνει χώρα όταν η διαφορά  $f' - f$  ικανοποιήσει την ακρίβεια που έχει τεθεί για το εκάστοτε πρόβλημα. Τα βήματα αυτά παρουσιάζονται γραφικά στο Σχήμα 3.6 και εφαρμόζονται για το συγκεκριμένο παράδειγμα ως εξής

Δοκιμή 1: Έστω  $f = 0,015$ . Βρίσκουμε τότε ότι

$$D = 0,315m, \quad Re = \frac{4Q}{\nu\pi D} = 3,674 \cdot 10^5 \quad \text{και} \quad \frac{\varepsilon}{D} = 8,889 \cdot 10^{-4}.$$

Από το διάγραμμα Moody και για το σύνολο των τιμών αυτών παίρνουμε  $f' = 0,02$ . Επειδή η αρχική και η τελική τιμή των συντελεστών τριβής δεν έχουν ικανοποιητική ακρίβεια, επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

Δοκιμή 2: Έστω  $f = 0,02$ . Στην περίπτωση αυτή προκύπτει

$$D = 0,3338m, \quad Re = \frac{4Q}{\nu\pi D} = 3,469 \cdot 10^5 \quad \text{και} \quad \frac{\varepsilon}{D} = 8,387 \cdot 10^{-4}.$$

Η δεύτερη δοκιμή δίνει  $f' = 0,01977$ . Είναι εμφανής η σύγκλιση των δύο τιμών για το συντελεστή τριβής ήδη από τη δεύτερη δοκιμή. Εφαρμόζουμε όμως και άλλη μία σειρά υπολογισμών για να επιτύχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια. Προκύπτει λοιπόν ότι

### 3 ΑΠΩΛΕΙΕΣ ΡΟΗΣ

Δοκιμή 3: Έστω  $f = 0,01977$ . Τελικά υπολογίζουμε

$$D = 0,333m, \quad Re = \frac{4Q}{\nu\pi D} = 3,478 \cdot 10^5, \quad \text{και} \quad \frac{\varepsilon}{D} = 8,408 \cdot 10^{-4}.$$

Από την τρίτη δοκιμή προκύπτει ότι  $f' = 0,01978$ . Η διαφορά πλέον είναι αμελητέα και μπορούμε με ασφάλεια να συμπεράνουμε ότι η ζητούμενη διάμετρος,  $D_0$ , για τη μεταφορά νερού σύμφωνα με τις προδιαγραφές του παραδείγματος είναι

$$D_0 = 0,333m.$$

#### Παράδειγμα 6.5

Σωλήνας μήκους  $30m$  διαρρέεται από σταθερή παροχή  $Q = 70m^3/h$ . Για το σωλήνα αυτό βρέθηκε ότι οι γραμμικές απώλειες  $h_f = 25m$ . Εάν η τραχύτητα του σωλήνα,  $\varepsilon$ , και το κινηματικό ιξώδες του ρευστού,  $\nu$ , ισούνται με  $0,0002cm$  και  $1,15 \cdot 10^{-6}m^2/s$  αντίστοιχα, υπολογίστε τη διάμετρο του σωλήνα για  $g = 9,81m/s^2$ .

Η ζητούμενη διάμετρος,  $D$ , (τρίτη κατηγορία παραδείγματος σύμφωνα με τον Πίνακα 3.2) θα υπολογιστεί από τη σχέση των Darcy-Weisbach όπου τα μεγέθη  $f$  και  $U$  είναι επίσης άγνωστα. Επειδή όμως είναι γνωστή η παροχή, από την εξίσωση συνέχειας μπορούμε να γράψουμε

$$Q = U \frac{\pi D^2}{4} \implies U^2 = \frac{16Q^2}{\pi^2 D^4},$$

δίνοντας

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{1}{2g} \frac{16Q^2}{\pi^2 D^4} = \frac{8fLQ^2}{g\pi^2 D^5} \implies D = \left( \frac{8LQ^2}{g\pi^2 h_f} f \right)^{1/5}.$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$D = \left[ \frac{8 \cdot 30m \cdot \left( \frac{70}{3600} \frac{m^3}{s} \right)^2}{9,81 \frac{m}{s^2} \cdot \pi^2 \cdot 25m} f \right]^{1/5} \implies D = 0,1303 \cdot f^{1/5} m.$$

Επειδή το αποτέλεσμα περιέχει δύο άγνωστα μεγέθη χρησιμοποιούμε ξανά τη μέθοδο των δοκιμών.

Δοκιμή 1: Έστω  $f = 0,015$ . Βρίσκουμε τότε ότι

$$D = 0,05626m, \quad Re = \frac{4Q}{\nu\pi D} = 3,828 \cdot 10^5 \quad \text{και} \quad \frac{\varepsilon}{D} = 3,555 \cdot 10^{-5}.$$

Από το διάγραμμα Moody για το σύνολο των τιμών αυτών βρίσκουμε ότι  $f' = 0,01424$ , δίνοντας ένα σφάλμα λίγο μεγαλύτερο από 5%. Για να βελτιώσουμε λοιπόν την ακρίβεια του αποτελέσματος, επιλέγουμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία δοκιμών μία ακόμα φορά.

Δοκιμή 2: Έστω  $f = 0,01424$ . Με αντικατάσταση βρίσκουμε

$$D = 0,05567m, \quad Re = \frac{4Q}{\nu\pi D} = 3,869 \cdot 10^5 \quad \text{και} \quad \frac{\varepsilon}{D} = 3,593 \cdot 10^{-5}.$$

Από το διάγραμμα Moody προκύπτει τότε ότι  $f' = 0,01422$ . Επειδή το νέο σφάλμα δεν υπερβαίνει το 0,15% τερματίζουμε τη διαδικασία δοκιμών και θέτουμε σαν τελική τιμή την  $f = 0,01423$  (που αποτελεί το μέσο όρο των δύο τιμών για το συντελεστή τριβής της δεύτερης δοκιμής). Η ζητούμενη διάμετρος επομένως ισούται με

$$D = 0,1303 \cdot (0,01423)^{1/5} = 0,05567m.$$

### Παράδειγμα 6.6

Νερό κυκλοφορεί σε οριζόντιο σωλήνα διαμέτρου  $8cm$  και συνολικού μήκους  $40m$ . Εάν  $\varepsilon = 0,046mm$ ,  $\Delta P = 30000Pa$ ,  $\nu = 10^{-6}m^2/s$  και  $\gamma = 9810N/m^3$ , υπολογίστε την ογκομετρική παροχή του σωλήνα.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο σωλήνας είναι οριζόντιος και σταθερής διατομής έχουμε

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} + h_f \implies h_f = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{30000Pa}{9810 \frac{N}{m^3}} = 3,06m.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση γραμμικών απωλειών

$$3,06m = f \frac{40m}{0,08m} \frac{U^2}{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}} \implies fU^2 = 0,12 \frac{m^2}{s^2}.$$

### 3 ΑΠΩΛΕΙΕΣ ΡΟΗΣ

Το παράδειγμα επομένως αυτό ανήκει στη δεύτερη κατηγορία σύμφωνα με τον Πίνακα 3.2 και επειδή έχουμε μία εξίσωση με δύο αγνώστους εφαρμόζουμε τη μέθοδο των δοκιμών.

Δοκιμή 1: Έστω  $f = 0,025$ . Έχουμε τότε ότι

$$U = \sqrt{\frac{0,12}{f}} = 2,19 \frac{m}{s}, \quad Re = \frac{UD}{\nu} = 1,75 \cdot 10^5 \quad \text{και} \quad \frac{\varepsilon}{D} = 0,000575.$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα και το διάγραμμα Moody βρίσκουμε ότι  $f' = 0,0195$ . Επειδή οι δύο τιμές των συντελεστών τριβής διαφέρουν αρκετά μεταξύ τους, επαναλαμβάνουμε ξανά τη διαδικασία των δοκιμών.

Δοκιμή 2: Έστω  $f = 0,0195$ . Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$U = \sqrt{\frac{0,12}{f}} = 2,48 \frac{m}{s}, \quad Re = \frac{UD}{\nu} = 1,98 \cdot 10^5 \quad \text{και} \quad \frac{\varepsilon}{D} = 0,000575.$$

Χρησιμοποιώντας ξανά το διάγραμμα Moody βρίσκουμε ότι  $f' = 0,0193$ . Θεωρώντας τη διαφορά μεταξύ των δύο αυτών τιμών για το συντελεστή τριβής αμελητέα, μπορούμε να θέσουμε  $f = 0,0194$  δίνοντας

$$U = 2,49 \frac{m}{s}.$$

Είμαστε πλέον σε θέση να υπολογίσουμε την ογκομετρική παροχή ως εξής

$$Q = UA = 2,49 \frac{m}{s} \cdot \frac{3,14 \cdot (0,08m)^2}{4} \implies Q = 0,0125 \frac{m^3}{s}.$$

#### Παράδειγμα 6.7

Δεξαμενή ανοιχτή στο περιβάλλον αδειάζει μέσω ευθύγραμμου χαλύβδινου αγωγού τραχύτητας  $0,045mm$  και διαμέτρου  $40cm$ . Αν η υψομετρική διαφορά ισούται με  $35m$  και το μήκος του αγωγού είναι  $100m$  υπολογίστε την ταχύτητα εκροής του νερού από τον αγωγό. Θεωρείστε ότι  $\nu = 10^{-6}m^2/s$  και  $g = 9,81m/s^2$ .

Το παράδειγμα αυτό λύνεται με εφαρμογή της μεθόδου των δοκιμών και ανήκει στη δεύτερη κατηγορία του Πίνακα 3.2. Χρησιμοποιώντας ότι  $p_1 = p_2 =$

$0, U_1 = 0, z_1 - z_2 = 35m$  και αντικαθιστώντας τα δεδομένα της εκφώνησης στην εξίσωση

$$\frac{U_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{U_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \implies U_2 = \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)D}{fL + D}},$$

βρίσκουμε ότι

$$U_2 = \sqrt{\frac{274,7}{100f + 0,4}} \frac{m}{s}.$$

Εφαρμόζοντας ξανά τη μέθοδο των δοκιμών προκύπτουν τα εξής:

Δοκιμή 1: Έστω  $f = 0,022$ . Έχουμε τότε ότι

$$U_2 = 10,28 \frac{m}{s}, \quad Re = \frac{U_2 D}{\nu} = 4,11 \cdot 10^6 \quad \text{και} \quad \frac{\varepsilon}{D} = 0,0001125,$$

δίνοντας  $f' = 0,013$ . Επειδή η απόκλιση των δύο τιμών για το συντελεστή τριβής είναι πολύ μεγάλη, επαναλαμβάνουμε προφανώς ξανά τη διαδικασία των δοκιμών.

Δοκιμή 2: Έστω  $f = 0,013$ . Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$U_2 = 12,71 \frac{m}{s}, \quad Re = \frac{U_2 D}{\nu} = 5,08 \cdot 10^6 \quad \text{και} \quad \frac{\varepsilon}{D} = 0,0001125,$$

και τότε  $f' = 0,0126$ . Θεωρώντας ότι επιτεύχθηκε η απαιτούμενη σύγκλιση, μπορούμε να τερματίσουμε τη μέθοδο των δοκιμών και να θέσουμε τελικά

$$U_2 = 12,71 \frac{m}{s}.$$

Στην περίπτωση που θέλαμε να υπολογίσουμε και την παροχή στον αγωγό, αυτή προκύπτει εύκολα καθώς

$$Q = U_2 \frac{\pi D^2}{4} = 12,71 \frac{m}{s} \frac{\pi (0,4m)^2}{4} = 1,6 \frac{m^3}{s}.$$

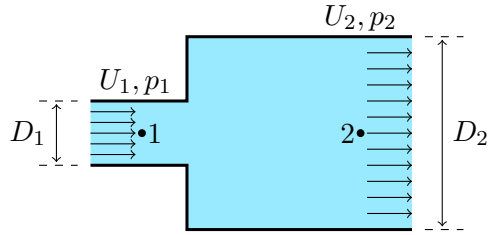
### Παράδειγμα 6.8

Να υπολογιστεί ο συντελεστής τοπικών απωλειών για την περίπτωση απότομης διαστολής σωληνογραμμής όπως στο σχήμα.

### 3 ΑΠΩΛΕΙΕΣ ΡΟΗΣ

Η εξίσωση Bernoulli συμπεριλαμβάνομένων των απωλειών μεταξύ των σημείων 1 και 2 γράφεται

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_m.$$



Εκφράζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς τις τοπικές απώλειες και υποθέτοντας ότι τα δυναμικά ύψη των σημείων 1 και 2 είναι ίσα

$$h_m = \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}.$$

Παρατηρούμε επομένως ότι για να εκφράσουμε το συντελεστή τοπικών απωλειών συναρτήσει των γεωμετρικών χαρακτηριστικών θα πρέπει να απαλείψουμε τις πιέσεις από την τελευταία εξίσωση. Αυτό μπορεί να λάβει χώρα από την εξίσωση διατήρησης της ορμής μεταξύ των διατομών 1 και 2. Πιο συγκεκριμένα

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \dot{m}\mathbf{U},$$

ή ισοδύναμα

$$A\Delta p = Q\Delta U \xrightarrow{A \neq 0} (p_1 - p_2) = \rho U_2(U_2 - U_1).$$

Συνδυάζοντας τέλος όλα τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει

$$\begin{aligned} h_m &= \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} + \frac{\rho U_2^2}{\gamma} - \frac{\rho U_1 U_2}{\gamma} = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{U_2^2}{2g} - \frac{\rho U_1 U_2}{\gamma} \\ &= \frac{U_1^2}{2g} + \frac{U_1^2}{2g} \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - \frac{U_1^2}{g} \frac{A_1}{A_2} = \frac{U_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση συνέχειας  $U_2 = U_1 (A_1/A_2)$ , μεταξύ των διατομών 1 και 2. Επομένως με απλή επισκόπηση προκύπτει ότι ο συντελεστής τοπικών απωλειών,  $\kappa$ , για ροή σε απότομη διαστολή σωληνογραμμής δίνεται από τη σχέση

$$\kappa = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2.$$

Ο λόγος επομένως των δύο διατομών (όπου  $A_2 \geq A_1$ ) καθορίζει και το συντελεστή τοπικών απωλειών δίνοντας τις παρακάτω δύο οριακές τιμές

- $A_1 \rightarrow A_2$ : στην περίπτωση αυτή  $\kappa \approx 0$  δίνοντας  $h_m \rightarrow 0$ . Όπως είναι αναμενόμενο οι τοπικές απώλειες μηδενίζονται όταν οι διατομές είναι ίσες.
- $A_1 \ll A_2$ : στην περίπτωση αυτή  $\kappa \rightarrow 1$  δίνοντας  $h_m \rightarrow U^2/2g$ . Για πολύ μεγάλες αλλαγές διατομής προκύπτει δηλαδή ότι η κινητική ενέργεια του ρευστού μετατρέπεται εξ ολοκλήρου σε τοπικές απώλειες.

### Παράδειγμα 6.9

Νερό πυκνότητας  $\rho = 999 \text{ m/s}^3$  και ιξώδους  $\mu = 0,001 \text{ Pas}$  ρέει σε σωλήνα από χυτοσίδηρο συνολικού μήκους  $11 \text{ m}$  και διαμέτρου  $4 \text{ cm}$ . Ο σωλήνας έχει δύο καμπτήρες  $90^\circ$  κατά μήκος του με συντελεστή τοπικών απωλειών ίσο με  $0,95$ . Αν η ταχύτητα του ρευστού ισούται με  $6 \text{ m/s}$  υπολογίστε τις συνολικές απώλειες (γραμμικές και τοπικές) για  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

Με εφαρμογή της Εξίσωσης (3.8) για  $j = 1$  (ένας σωλήνας σταθερής διατομής) και  $j = 2$  (δύο καμπτήρες) έχουμε

$$h_{o\lambda} = \sum_{i=1} f_i \frac{L_i}{D_i} \frac{U_i^2}{2g} + \sum_{j=2} \kappa_j \frac{U_j^2}{2g},$$

όπου ο συντελεστής τριβής θα υπολογιστεί με τη βοήθεια του διαγράμματος Moody. Για να γίνει αυτό απαιτείται ο υπολογισμός του αριθμού Reynolds και της σχετικής τραχύτητας με τη βοήθεια του Πίνακα 3.1 ως εξής

$$Re = \frac{999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,04 \text{ m}}{0,001 \text{ Pas}} = 239760, \quad \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,26 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 6,5 \cdot 10^{-3}.$$

Προκύπτει τότε από το διάγραμμα ότι  $f = 0,03327$  και αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε

$$h_{o\lambda} = 0,03327 \frac{11 \text{ m}}{0,04 \text{ m}} \frac{36 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{19,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} + 2 \cdot 0,95 \frac{36 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{19,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \implies h_{o\lambda} = 20,27 \text{ m}.$$

**Παράδειγμα 6.10**

Νερό πυκνότητας  $999 \text{ kg/m}^3$  και ιξώδους  $1,003 \text{ mPas}$  ρέει με ταχύτητα  $2 \text{ m/s}$  σε λείο και οριζόντιο αγωγό διαμέτρου  $25 \text{ mm}$ . Υπολογίστε την πτώση πίεσης ανά μονάδα μήκους του αγωγού.

Η πτώση πίεσης ανά μονάδα μήκους του αγωγού,  $\Delta p/L$ , μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση

$$h_f = \frac{\Delta p}{\gamma} \implies \frac{\Delta p}{L} = \gamma \frac{h_f}{L} \implies \frac{\Delta p}{L} = \frac{\rho f}{2D} U^2.$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το μόνο που χρειάζεται είναι να υπολογίσουμε το συντελεστή τριβής καθώς όλα τα υπόλοιπα μεγέθη είναι γνωστά. Επειδή δε γνωρίζουμε το είδος της ροής έχουμε

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,025 \text{ m}}{1,003 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}} = 49800.$$

Η τιμή αυτή ανήκει στο διάστημα  $4 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^5$  και επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την εξίσωση Blasius για λείους αγωγούς

$$f = 0,3164 \cdot Re^{-0,25} \implies f = 0,021.$$

Αντικαθιστώντας τελικά όλα τα αποτελέσματα στην αρχική εξίσωση βρίσκουμε

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,021}{2 \cdot 0,025 \text{ m}} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \implies \frac{\Delta p}{L} = 1678,3 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}.$$

**Παράδειγμα 6.11**

Σε ένα αγωγό διαμέτρου  $10 \text{ cm}$  με συντελεστή  $C_h = 130$  παρατηρούνται απώλειες ύψους  $6 \text{ m}$  για κάθε  $300 \text{ m}$  αγωγού. Υπολογίστε την ταχύτητα ροής και την παροχή όγκου διαμέσω του αγωγού αυτού.

Χρησιμοποιώντας ότι  $S = h_f/L = 6 \text{ m}/300 \text{ m} = 0,02$  προκύπτει

$$U = 0,849 C_h R^{0,63} S^{0,54} = 0,849 \cdot 130 \cdot (0,05)^{0,63} \cdot (0,02)^{0,54} = 2,02 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

και

$$Q = 0,849 AC_h R^{0,63} S^{0,54}$$

$$= 0,849 \cdot 3,14 \cdot (0,05 \text{ m})^2 \cdot 130 \cdot (0,05)^{0,63} \cdot (0,02)^{0,54} = 0,016 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

### Παράδειγμα 6.12

Υπολογίστε την ισοδύναμη διάμετρο,  $D_{\iota\sigma}$ , για την περίπτωση δύο σωλήνων σε παράλληλη σύνδεση όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 3.4.

Σύμφωνα με το Σχήμα 3.4 η συνολική παροχή όγκου ισούται με το άθροισμα των αντίστοιχων παροχών στους σωλήνες  $A$  και  $B$ . Αμελώντας τις τοπικές απώλειες και θεωρώντας ότι ο ισοδύναμος σωλήνας έχει τις ίδιες γραμμικές απώλειες, μπορούμε να γράψουμε

$$h_f = \frac{8f_i L_i Q_i^2}{D_i^5 g \pi^2} \implies Q_i = \sqrt{\frac{h_f D_i^5 g \pi^2}{8f_i L_i}},$$

δίνοντας

$$\sqrt{\frac{h_f D_{\iota\sigma}^5 g \pi^2}{8f_{\iota\sigma} L_{\iota\sigma}}} = \sqrt{\frac{h_f D_A^5 g \pi^2}{8f_A L_A}} + \sqrt{\frac{h_f D_B^5 g \pi^2}{8f_B L_B}}.$$

Απλοποιώντας την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\sqrt{\frac{D_{\iota\sigma}^5}{f_{\iota\sigma} L_{\iota\sigma}}} = \sqrt{\frac{D_A^5}{f_A L_A}} + \sqrt{\frac{D_B^5}{f_B L_B}}.$$

Στην περίπτωση που οι συντελεστές τριβής είναι σταθεροί το αποτέλεσμα αυτό απλοποιείται ως εξής

$$\sqrt{\frac{D_{\iota\sigma}^5}{L_{\iota\sigma}}} = \sqrt{\frac{D_A^5}{L_A}} + \sqrt{\frac{D_B^5}{L_B}}.$$

Αν επιπλέον τα μήκη όλων των σωλήνων είναι ίσα βρίσκουμε την ακόλουθη απλοϊκή έκφραση για την ισοδύναμη διάμετρο

$$\sqrt{D_{\iota\sigma}^5} = \sqrt{D_A^5} + \sqrt{D_B^5} \implies D_{\iota\sigma} = \left( D_A^{5/2} + D_B^{5/2} \right)^{2/5}.$$

**Παράδειγμα 6.13**

Τρεις αγωγοί μήκους  $300m$ ,  $200m$  και  $400m$  και διαμέτρων  $0,4m$ ,  $0,5m$  και  $0,6m$  αντίστοιχα συνδέονται σε σειρά. Οι αγωγοί αυτοί πρέπει να αντικατασταθούν από ένα αγωγό μήκους  $L = 1000m$ . Υπολογίστε την ισοδύναμη διάμετρο,  $D_{ισ}$ , έτσι ώστε οι συνολικές γραμμικές απώλειες να παραμείνουν σταθερές.

Γενικεύοντας το αποτέλεσμα (3.10) για την περίπτωση τριών σωλήνων έχουμε

$$D_{ισ} = \left( \frac{L}{\frac{L_A}{D_A^5} + \frac{L_B}{D_B^5} + \frac{L_\Gamma}{D_\Gamma^5}} \right)^{1/5}.$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα του παραδείγματος έχουμε

$$D_{ισ} = \left( \frac{1000m}{\frac{300m}{(0,4m)^5} + \frac{200m}{(0,5m)^5} + \frac{400m}{(0,6m)^5}} \right)^{1/5} = 0,476m.$$

---

## ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ

### 4.1 Εισαγωγή

---

Η υπόθεση της ιδεατής ροής που υιοθετήθηκε αρκετές φορές είναι μεν βολική καθώς μας επιτρέπει να μελετήσουμε πλήθος φαινομένων, αλλά επιβάλλει συνθήκες ροής που πολλές φορές απέχουν σημαντικά από την πραγματικότητα. Ένα ιδανικό ρευστό για παράδειγμα χαρακτηρίζεται από απουσία εσωτερικών τριβών και ως εκ τούτου δεν αναπτύσσει διατμητικές δυνάμεις κατά τη ροή του. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι μεταξύ κινούμενων επιπέδων ροής ή μεταξύ αυτών και ακίνητων τοιχωμάτων δεν υπάρχουν τριβές. Το συμπέρασμα αυτό όμως αντιβαίνει δύο βασικές εμπειρικές παρατηρήσεις. Πρώτον, ότι τέτοιες ροές ολισθαίνουν ομαλά παρουσία στερεών σωμάτων και δεύτερον ότι η υπολογιζόμενη αντίσταση σε ακίνητα σώματα λόγω της ροής είναι μηδενική. Από την εμπειρία γνωρίζουμε όμως ότι η ταχύτητα ελαττώνεται όσο το ρευστό πλησιάζει τα τοιχώματα (και μηδενίζεται πάνω σε αυτά) και ότι η αντίσταση λόγω της κίνησης του ρευστού έχει υπολογιστεί με μεγάλη ακρίβεια και σίγουρα δεν ισούται με μηδέν.

Από τα προηγούμενα κεφάλαια επίσης είναι ήδη γνωστό ότι η ιδιότητα που ορίζει αν ένα ρευστό είναι ιδανικό ή αναπτύσσει εσωτερικές τριβές είναι η συνεκτικότητα, η οποία ποσοτικοποιείται από το μέγεθος του ιξώδους. Επομένως, οι συνεκτικές ροές αναπτύσσουν διατμητικές τάσεις οι οποίες οδηγούν σε βαθμιαία μεταβολή της ταχύτητας, από χαμηλές τιμές κοντά στα τοιχώματα

## 4 ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ

σε υψηλές τιμές μακριά από αυτά. Η εξάρτηση μεταξύ των διατμητικών τάσεων,  $\tau$ , και της κλίσης της ταχύτητας κάθετα στη διεύθυνση της ροής,  $dU/dy$ , εκφράζεται μαθηματικά από το νόμο ιξώδους του Newton

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy}.$$

Η σταθερά αναλογίας στην παραπάνω σχέση ονομάζεται δυναμικό ιξώδες και αποτελεί μία μοριακή ιδιότητα του ρευστού. Αυτό οδήγησε τους μηχανικούς και μαθηματικούς (με πρωτεργάτη το Γερμανό μηχανικό Prandtl<sup>1</sup>) στις αρχές του εικοστού αιώνα στη διαπίστωση ότι οι απώλειες λόγω τριβής για ένα κινούμενο ρευστό εμφανίζονται σε μία περιορισμένη περιοχή κοντά στο ακίνητο τοίχωμα και ότι εκτός της περιοχής αυτής η ροή θεωρείται κατά προσέγγιση ιδανική. Ο Prandtl επομένως κατηγοριοποίησε τη ροή στα εξής δύο μέρη

- σε εκείνο στο οποίο η κλίση της ταχύτητας ως προς την απόσταση από το τοίχωμα είναι μεγάλη, οι αναπτυσσόμενες διατμητικές τάσεις ισχυρές και το ιξώδες επιδρά σημαντικά στο ροή και
- σε εκείνο όπου η ταχύτητα είναι σχεδόν σταθερή, οι αναπτυσσόμενες διατμητικές τάσεις ασθενείς και η επίδραση της συνεκτικότητας αγνοείται.

Η περιοχή της ροής που ανήκει στην πρώτη κατηγορία είναι γνωστή ως *οριακό στρώμα* (boundary layer) και αποτελεί το αντικείμενο μελέτης του παρόντος κεφαλαίου.

### 4.2 Βασικές εξισώσεις οριακού στρώματος

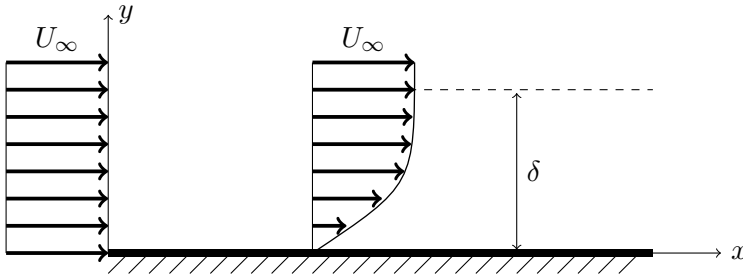
Ας υποθέσουμε την περίπτωση ροής κατά μήκος μίας επίπεδης και ακίνητης πλάκας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.<sup>2</sup> Η ροή προσεγγίζει την πλάκα με σταθερή και παράλληλη ως προς την πλάκα ταχύτητα,  $U_\infty$ . Είναι προφανές αφενός ότι το οριακό στρώμα αρχίζει να αναπτύσσεται μόλις το ρευστό έρθει σε επαφή

<sup>1</sup> Ο Ludwig Prandtl (1875-1953) ήταν Γερμανός μηχανικός που συνέβαλε καθοριστικά στη μαθηματική θεμελίωση και ανάλυση πολλών εφαρμογών στη ρευστομηχανική και ιδιαίτερα στην αεροδυναμική. Οι εργασίες του αποτέλεσαν ορόσημο για τη μελέτη του οριακού στρώματος, των αεροτομών κ.ά.

<sup>2</sup> Η μαθηματική θεμελίωση των βασικών εξισώσεων του οριακού στρώματος δεν απαιτεί την θεώρηση συγκεκριμένης γεωμετρίας. Η υιοθέτηση όμως της επίπεδης πλάκας συνιστά την πιο λογική επιλογή καθώς αποτελεί το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα στη θεωρία του οριακού στρώματος.

## 4.2 Βασικές εξισώσεις οριακού στρώματος

με την πλάκα και αφετέρου ότι η ανάπτυξη αυτή δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από το χρόνο επαφής τους. Το οριακό στρώμα επομένως μεγαλώνει καθώς το ρευστό μετακινείται πάνω στη πλάκα, καθώς όλο και περισσότερα σωματίδια δέχονται τη δύναμη της διατμητικής τάσης από την πλάκα κατά την κίνηση του ρευστού. Η κίνηση αυτή με τη σειρά της σχηματίζει μία μεταβλητή κατανομή ταχύτητας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1, ξεκινώντας από τη μηδενική τιμή στο τοίχωμα μέχρι την ταχύτητα της ελεύθερης ροής,  $U_\infty$ , σε κάποια απόσταση  $y$  από την πλάκα. Επειδή όμως η ταχύτητα στο οριακό στρώμα τείνει σε αυτήν της ελεύθερης ροής ασυμπτωτικά, έχει επικρατήσει για πρακτικούς λόγους το οριακό στρώμα να ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ της επιφάνειας της πλάκας και εκείνου του σημείου στη ροή του οποίου η ταχύτητα ισούται με το 99% αυτής της ελεύθερης ροής. Η απόσταση αυτή ονομάζεται πάχος του οριακού στρώματος και συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα  $\delta$ .

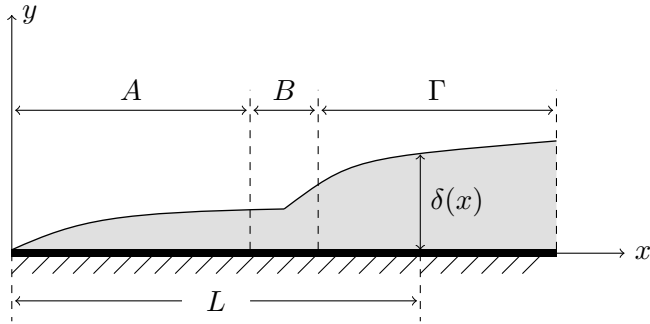


Σχήμα 4.1: Πάχος οριακού στρώματος,  $\delta$ , και κατανομή ταχύτητας σε επίπεδη πλάκα.

Επειδή το οριακό στρώμα δημιουργείται λόγω της συνθήκης μη ολίσθησης περιμένουμε να έχει πάχος ίσο με το μηδέν στην αρχή (ή ισοδύναμα στο λεγόμενο σημείο προσβολής) της πλάκας. Η διατμητική δύναμη όμως που αναπτύσσεται κατά την ολίσθηση του ρευστού πάνω σε αυτήν, επιβραδύνει όλο και περισσότερα παρακείμενα στοιχεία του ρευστού οδηγώντας το οριακό στρώμα σε συνεχή αύξηση του πάχους του. Αρχικά λοιπόν σχηματίζεται το στρωτό οριακό στρώμα, το οποίο δημιουργείται με την εναπόθεση γειτονικών επιπέδων ροής. Η ροή στην περιοχή αυτή είναι ομαλή και χωρίς αστάθειες. Καθώς όμως αυτή εξελίσσεται, αρχίζουν να δημιουργούνται αστάθειες, η στρωτή ροή διαταράσσεται και μεταβαίνουμε από το στρωτό οριακό στρώμα στο στρώμα μετάβασης. Οι αστάθειες αυτές αυξάνουν μονότονα μέχρι όλο το πάχος του στρώματος να οδηγηθεί σε τύρβη. Από το σημείο αυτό και μετά ξεκινάει το τυρβώδες οριακό στρώμα.

Η ανάπτυξη των βασικών εξισώσεων του οριακού στρώματος έχει σαν αφε-

#### 4 ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ



Σχήμα 4.2: Εξάρτηση του πάχους του οριακού στρώματος,  $\delta$ , από το μήκος προσβολής στην επίπεδη πλάκα,  $x$ . Το οριακό στρώμα χωρίζεται σε τρεις περιοχές: Α) στρωτό οριακό στρώμα, Β) στρώμα μετάβασης, Γ) τυρβώδες οριακό στρώμα. Για λόγους ευκρίνειας το πάχος του οριακού στρώματος,  $\delta$ , έχει μεγεθυνθεί.

τηρία την κατάλληλη αδιαστατοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατό να εισαγάγουμε ένα μέτρο σύγκρισης ως προς την τάξη μεγέθους των διαφόρων όρων και να συμπεράνουμε ποιοι από αυτούς έχουν μικρή συνεισφορά και μπορούν να αμεληθούν, απλοποιώντας την απαιτούμενη μαθηματική ανάλυση. Ορίζουμε τότε σαν το αδιάστατο πάχος του οριακού στρώματος,  $\delta'$ , τον λόγο  $\delta/L$  σύμφωνα με το Σχήμα 4.2. Σημειώνεται στο σημείο αυτό ότι για λόγους ευκρίνειας το πάχος του οριακού στρώματος έχει μεγεθυνθεί. Στην πραγματικότητα αυτό δεν ξεπερνάει το 1% με 2% της αντίστοιχης απόστασης κατά τη διεύθυνση της ροής από την αρχή της πλάκας δίνοντας

$$\delta' = \frac{\delta}{L} = \mathcal{O}(0,01).$$

Ακολουθώντας στη συνέχεια ανάλογη προσέγγιση με αυτήν που χρησιμοποιήθηκε για την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes στην Ενότητα 2.6, ορίζουμε τα ακόλουθα αδιάστατα μεγέθη

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad u' = \frac{u}{U_\infty}, \quad v' = \frac{v}{U_\infty}, \quad p' = \frac{p}{\rho U_\infty^2},$$

και την αντίστοιχη τάξη μεγέθους που αντιπροσωπεύουν

$$x' = \mathcal{O}(1), \quad y' = \mathcal{O}(\delta'), \quad u' = \mathcal{O}(1), \quad v' = \mathcal{O}(\delta'), \quad p' = \mathcal{O}(1). \quad (4.1)$$

Οι σχέσεις (4.1) δίνουν μία ξεκάθαρη εικόνα σχετικά με τη συνεισφορά του κάθε μεγέθους τόσο στην εξίσωση συνέχειας όσο και στις εξισώσεις Navier-Stokes.

Για διδιάστατη και μόνιμη λοιπόν ροή, η αδιάστατη έκφραση της εξίσωσης συνέχειας δίνει

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial (u'U_\infty)}{\partial (x'L)} + \frac{\partial (v'U_\infty)}{\partial (y'L)} = \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0.$$

Επειδή όμως  $u'/x' = \mathcal{O}(1)/\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)$  και  $v'/y' = \mathcal{O}(\delta')/\mathcal{O}(\delta') = \mathcal{O}(1)$ , προκύπτει ότι οι δύο αυτοί όροι είναι συγκρίσιμοι και επομένως πρέπει να συμπεριληφθούν και οι δύο στην εξίσωση συνέχειας. Από την Εξίσωση (2.8) επίσης, γνωρίζουμε ότι η αδιάστατη έκφραση των εξισώσεων Navier-Stokes για μόνιμη ροή γράφεται

$$(\mathbf{U}' \cdot \nabla') \mathbf{U}' = -\nabla' p' + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{U}',$$

όπου  $Re = U_\infty L/\nu$ , ή ισοδύναμα σε μορφή συνιστωσών

$$\begin{aligned} x : \quad u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right), \\ y : \quad u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right). \end{aligned}$$

Θεωρώντας την  $x$  συνιστώσα μόνο και εξετάζοντας κάθε όρο ξεχωριστά έχουμε ότι

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = \mathcal{O}(1) \frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(1)} + \mathcal{O}(\delta') \frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(\delta')} = \mathcal{O}(1) \quad \text{και} \quad \frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(1).$$

Ο όρος της συνεκτικότητας απαιτεί περισσότερη προσοχή αφού

$$\left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) = \frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(1)\mathcal{O}(1)} + \frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(\delta')\mathcal{O}(\delta')} \approx \frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(\delta'^2)},$$

και επομένως  $\partial^2 u'/\partial x'^2 \ll \partial^2 u'/\partial y'^2$ . Παρόλο τέλος που δεν γνωρίζουμε εξαρχής την τάξη μεγέθους του αριθμού  $Re$ , μπορούμε να κάνουμε τη λογική υπόθεση ότι ο όρος συνεκτικότητας πρέπει να είναι τουλάχιστον της ίδιας τάξης μεγέθους με τους υπόλοιπους όρους. Σε διαφορετική περίπτωση (αν δηλαδή ήταν μικρότερης τάξης), το ιξώδες θα μπορούσε να αμεληθεί δίνοντας μη συνεκτική ροή, αναιρώντας με τον τρόπο αυτό το θεμελιώδη ρόλο που διαδραματίζει η συνεκτικότητα στην ανάπτυξη του οριακού στρώματος.

Η αντίστοιχη προσέγγιση για την  $y$  συνιστώσα δίνει

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = \mathcal{O}(1) \frac{\mathcal{O}(\delta')}{\mathcal{O}(1)} + \mathcal{O}(\delta') \frac{\mathcal{O}(\delta')}{\mathcal{O}(\delta')} = \mathcal{O}(\delta')$$

και

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) &= \mathcal{O}(\delta') + \mathcal{O}(\delta'^2) \left( \frac{\mathcal{O}(\delta')}{\mathcal{O}(1)\mathcal{O}(1)} + \frac{\mathcal{O}(\delta')}{\mathcal{O}(\delta')\mathcal{O}(\delta')} \right) \\ &= \mathcal{O}(\delta') + \mathcal{O}(\delta'^3) + \mathcal{O}(\delta'). \end{aligned}$$

Μία άμεση συνέπεια των παραπάνω είναι ότι όλοι οι όροι της εξίσωσης ορμής κατά την  $y$  διεύθυνση μπορούν να αμεληθούν ως προς τους όρους κατά την  $x$  διεύθυνση, αφού οι πρώτοι έχουν τάξη μεγέθους το πολύ  $\mathcal{O}(\delta')$  ενώ οι δεύτεροι ίση με  $\mathcal{O}(1)$ . Αμελώντας λοιπόν τον όρο  $dp/dy$  προκύπτει ότι  $p = p(x)$ , δηλώνοντας ότι προσεγγιστικά η πίεση στο εσωτερικό του οριακού στρώματος ισούται με την πίεση στην διεπιφάνεια αυτού με την ελεύθερη ροή. Για την περιγραφή επομένως του διδιάστατου οριακού στρώματος αρκεί η επίλυση των εξισώσεων συνέχειας και ορμής κατά την  $x$  διεύθυνση μόνο, σε συνδυασμο με την επιλογή των κατάλληλων οριακών συνθηκών. Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζεται η ροή σε επίπεδη πλάκα απουσία κλίσης πίεσης. Η ροή αυτή αποτελεί την απλούστερη περίπτωση ανάπτυξης οριακού στρώματος, μελετήθηκε αρχικά από τον Prandtl και λύθηκε αριθμητικά από τον Blasius.<sup>3</sup>

## 4.3 Στρωτό οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα

### 4.3.1 Πάχος

Για τον υπολογισμό του πάχους του στρωτού οριακού στρώματος θα χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω παραδοχές

- η ροή είναι μόνιμη  $\rightarrow \partial/\partial t = 0$ ,
- το πάχος του οριακού στρώματος είναι μικρό, ή ισοδύναμα ο αριθμός Reynolds είναι μεγάλος  $\rightarrow \partial/\partial x \ll \partial/\partial y$  και  $u \gg v$ ,
- η ταχύτητα και η πίεση κατά μήκος του άξονα  $x$  είναι σταθερές εκτός του οριακού στρώματος  $\rightarrow \partial U_\infty/\partial x = \partial p/\partial x = 0$ .

Θεωρώντας διδιάστατη και ασυμπίεστη ροή, οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής παίρνουν τότε αντίστοιχα τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.2)$$

<sup>3</sup> Ο Paul Richard Heinrich Blasius, 1883-1970, ήταν Γερμανός φυσικός και ένας από τους πρώτους μαθητές του Prandtl. Η μεγαλύτερη συνεισφορά του στη μηχανική των ρευστών ήταν η μελέτη για το πάχος του στρωτού οριακού στρώματος και η εξάρτηση της αντίστασης σε ροή λείων αγωγών από τον αριθμό Reynolds.

### 4.3 Στρωτό οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα

και

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4.3)$$

Οι Εξισώσεις (4.2) και (4.3) ορίζουν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τις συνιστώσες της ταχύτητας  $u$  και  $v$ . Για να λυθεί το σύστημα αυτό είναι απαραίτητο να ορίσουμε τις οριακές συνθήκες, σύμφωνα με τις οποίες σε οποιοδήποτε σημείο της πλάκας η ταχύτητα του ρευστού μηδενίζεται και όσο απομακρυνόμαστε από αυτή, η ταχύτητα τείνει στην ταχύτητα της ελεύθερης ροής, δίνοντας

$$\begin{aligned} u(x,0) &= v(x,0) = 0, \\ u(x,y \rightarrow \infty) &\rightarrow U_\infty, \\ u(0,y) &= U_\infty. \end{aligned}$$

Εκφράζοντας τις παραπάνω συνθήκες συναρτήσει της ροϊκής συνάρτησης,  $\Psi$ , όπως αυτή ορίζεται από τις Εξισώσεις (??), προκύπτει ότι η μοναδική μη μηδενική συνιστώσα της ορμής γράφεται

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}, \quad (4.4)$$

με τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες να παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x,0) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x,0) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x,y \rightarrow \infty) &\rightarrow U_\infty. \end{aligned}$$

Η Εξίσωση (4.4) δεν έχει αναλυτική λύση σε κλειστή μορφή και επομένως επιβάλλεται να λυθεί αριθμητικά, μετατρέποντας τη μερική διαφορική εξίσωση σε συνήθη διαφορική. Ο μετασχηματισμός αυτός γίνεται με χρήση μεταβλητών ομοιότητας και πιο συγκεκριμένα ορίζοντας την παρακάτω αδιάστατη μεταβλητή

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \quad (4.5)$$

καθώς και την αντίστοιχη αδιάστατη ροϊκή συνάρτηση

$$f(\eta) = \frac{\Psi(x,y)}{\sqrt{\nu x U_\infty}}. \quad (4.6)$$

#### 4 ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια την (4.6) στη μερική διαφορική Εξίσωση (4.4) προκύπτει μία ισοδύναμη διατύπωση συναρτήσεως αποκλειστικά της  $f$  ως εξής (βλέπε λυμένα παραδείγματα)

$$2f''' + ff'' = 0, \quad (4.7)$$

όπου  $f' = df/d\eta$  και

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0, \\ f(0) &= 0, \\ f'(\infty) &= 1. \end{aligned}$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας τότε μπορούν να εκφραστούν ως προς την αδιάστατη ροϊκή συνάρτηση,  $f(\eta)$ , σύμφωνα με

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = f' \sqrt{\nu x U_\infty} \cdot \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} = f' U_\infty, \\ v &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} (\eta f' - f). \end{aligned}$$

Η Εξίσωση (4.7) προτάθηκε από τον Blasius το 1908 ο οποίος την έλυσε χρησιμοποιώντας σειρές. Αρκετά χρόνια αργότερα, και πιο συγκεκριμένα το 1938 ο Howarth υπολόγισε και τους τρεις όρους της (4.7) με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια και τα αποτελέσματά του παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1 για διάφορες τιμές του συντελεστή  $\eta$ .

Από τον πίνακα αυτό προκύπτει ότι η συνθήκη  $u \geq 0,99 U_\infty$  ικανοποιείται για  $\eta \geq 5$  και επομένως το πάχος του οριακού στρώματος  $\delta$  σύμφωνα με την Εξίσωση (4.5) ισούται με

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}.$$

Αν τέλος ορίσουμε τον τοπικό αριθμό Reynolds,  $Re_x$ , (τοπικό γιατί εξαρτάται από τη θέση στην πλάκα) ως εξής

$$Re_x = \frac{x U_\infty}{\nu},$$

το πάχος του οριακού στρώματος δέχεται την ακόλουθη ισοδύναμη μορφή,

$$\delta = 5 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}. \quad (4.8)$$

Το πάχος επομένως μειώνεται όσο αυξάνει ο αριθμός Reynolds και όσο πιο κοντά βρισκόμαστε στο σημείο προσβολής της πλάκας. Για παράδειγμα, το

### 4.3 Στρωτό οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα

Πίνακας 4.1: Τιμές των συναρτήσεων  $f(\eta)$ ,  $f'(\eta)$  και  $f''(\eta)$  για στρωτό οριακό στρώμα κατά Howarth. Αναπαραγωγή από Σ. Τσαγγάρη, Μηχανική των Ρευστών, εκδόσεις Συμεών.

$\eta$	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$	$\eta$	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$
0,0	0,00000	0,00000	0,33206	4,2	2,49806	0,96696	0,05052
0,2	0,00664	0,06641	0,33199	4,4	2,69238	0,97587	0,03897
0,4	0,02656	0,13277	0,33147	4,6	2,88826	0,98269	0,02948
0,6	0,05974	0,19894	0,33008	4,8	3,08534	0,98779	0,02187
0,8	0,10611	0,26471	0,32739	5,0	3,28329	0,99155	0,01591
1,0	0,16557	0,32979	0,32301	5,2	3,48189	0,99425	0,01134
1,2	0,23795	0,39378	0,31659	5,4	3,68094	0,99616	0,00793
1,4	0,32298	0,45627	0,30787	5,6	3,88031	0,99748	0,00543
1,6	0,42032	0,51676	0,29667	5,8	4,07990	0,99838	0,00365
1,8	0,52952	0,57477	0,28293	6,0	4,27964	0,99898	0,00240
2,0	0,65003	0,62977	0,26675	6,2	4,47948	0,99937	0,00155
2,2	0,78120	0,68132	0,24835	6,4	4,67938	0,99961	0,00098
2,4	0,92230	0,72899	0,22809	6,6	4,87931	0,99977	0,00061
2,6	1,07252	0,77246	0,20646	6,8	5,07928	0,99987	0,00037
2,8	1,23099	0,81152	0,18401	7,0	5,27926	0,99992	0,00022
3,0	1,39682	0,84605	0,16136	7,2	5,47925	0,99996	0,00013
3,2	1,56911	0,87609	0,13913	7,4	5,67924	0,99998	0,00007
3,4	1,74696	0,90177	0,11788	7,6	5,87924	0,99999	0,00004
3,6	1,92954	0,92333	0,09809	7,8	6,07923	1,00000	0,00002
3,8	2,11605	0,94112	0,08013	8,0	6,27923	1,00000	0,00001
4,0	2,30576	0,95552	0,06424	8,2	6,47923	1,00000	0,00001

#### 4 ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ

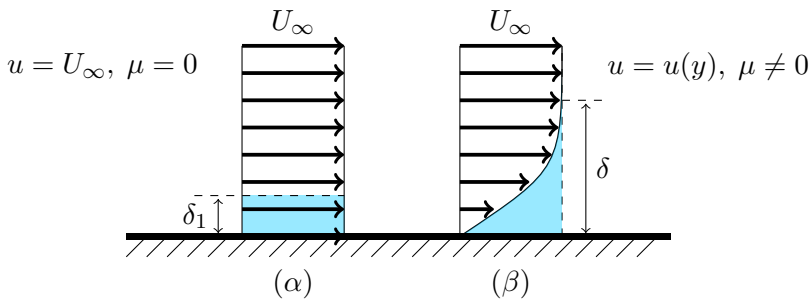
πάχος του οριακού στρώματος νερού ταχύτητας  $U_\infty = 1 \text{ m/s}$  σε απόσταση  $1 \text{ m}$  από το σημείο προσβολής ισούται με

$$\delta_{x=1\text{m}} = 5 \sqrt{\frac{10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot 1 \text{ m}}{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}} = 0,005 \text{ m} = 5 \text{ mm}.$$

Η έκταση δηλαδή του οριακού στρώματος στο παραπάνω παράδειγμα είναι μικρή και αυτό είναι ένα γενικότερο χαρακτηριστικό των οριακών στρωμάτων. Παρόλα αυτά διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο σε ροές ρευστών με μεγάλο ιξώδες ή μικρών κλιμάκων και ως εκ τούτου δεν πρέπει να αγνοούνται.

#### 4.3.2 Πάχος μετατόπισης

Ένα από τα μειονεκτήματα όσο αφορά το πάχος του οριακού στρώματος είναι ο αυθαίρετος ορισμός του ως εκείνη η απόσταση από την επίπεδη πλάκα στην οποία η ταχύτητα του ρευστού ισούται με το 99% της ταχύτητας ελεύθερης ροής. Ο ορισμός αυτός δεν απορρέει ούτε υποστηρίζεται από κάποια φυσική διαδικασία. Ως εκ τούτου, η επιλογή αυτή δεν υπερτερεί έναντι άλλων επιλογών, όπως για παράδειγμα ένας αντίστοιχος ορισμός για το πάχος του οριακού στρώματος ως προς το 98% ή το 97% της ταχύτητας ελεύθερης ροής.



Σχήμα 4.3: Πάχος μετατόπισης,  $\delta_1$ , σε επίπεδη πλάκα.

Σε μία λοιπόν προσπάθεια να οριστούν παράμετροι που περιγράφουν καλύτερα τα φυσικά χαρακτηριστικά του οριακού στρώματος, καθιερώθηκαν στη βιβλιογραφία τα πάχη μετατόπισης και ορμής. Για να ορίσουμε το πάχος μετατόπισης θεωρούμε τις δύο ροές του Σχήματος 4.3. Η ροή (α) χαρακτηρίζεται από αμελητέα συνεκτικότητα διατηρώντας σταθερή κατανομή ταχύτητας, σε

### 4.3 Στρωτό οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα

αντίθεση με τη ροή ( $\beta$ ) στην οποία η συνεκτικότητα και η συνθήκη μη ολίσθησης στην πλάκα δημιουργούν το οριακό στρώμα. Προφανώς, για τη μέση ταχύτητα,  $\bar{U}$ , ισχύει ότι  $\bar{U}_\alpha = U_\infty$  και  $\bar{U}_\beta < U_\infty$ . Αυτό με τη σειρά του οδηγεί σε ένα έλλειμα παροχής μάζας στη ροή ( $\beta$ ) ως προς τη ροή ( $\alpha$ ). Ορίζουμε τότε σαν πάχος μετατόπισης (displacement thickness) την εικονική ανύψωση της επίπεδης πλάκας κατά  $\delta_1$  έτσι ώστε οι παροχές στις δύο περιπτώσεις να είναι ίσες. Για να ισχύει κάτι τέτοιο θα πρέπει οι παροχές διαμέσω των γραμμοσκιασμένων επιφανειών να ισούται μεταξύ τους, δίνοντας

$$\delta_1 b U_\infty = \int_0^\infty (U_\infty - u) b dy,$$

όπου  $b$  το πλάτος της πλάκας. Ορίζουμε τότε σαν πάχος μετατόπισης την ποσότητα

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy,$$

η οποία σύμφωνα με την λύση του Blasius γράφεται

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \int_0^{\eta_1} [1 - f'(\eta)] d\eta = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} [\eta_1 - f(\eta_1)],$$

όπου  $\eta_1$  οποιοδήποτε σημείο εκτός του οριακού στρώματος. Παρόλο που το άνω όριο τίθεται στο άπειρο καθώς ο λόγος  $u/U_\infty$  τείνει στη μονάδα ασυμπτωτικά, στην πραγματικότητα το όριο αυτό είναι οποιοδήποτε σημείο στο οποίο η υπό ολοκλήρωση ποσότητα δεν συνεισφέρει ουσιαστικά στον υπολογισμό της παροχής μάζας. Από τον Πίνακα 4.1 όμως παρατηρούμε ότι για  $\eta > 5$  η διαφορά  $\eta - f(\eta)$  παραμένει σταθερή και ίση με 1,7208 δίνοντας τελικά για το πάχος μετατόπισης ότι

$$\delta_1 = 1,7208 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}},$$

ή ισοδύναμα ως προς τον τοπικό αριθμό  $Re$

$$\delta_1 = 1,7208 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}. \quad (4.9)$$

Συγκρίνοντας τέλος τις Εξισώσεις (4.8) και (4.9), προκύπτει ότι το πάχος μετατόπισης είναι περίπου τρεις φορές μικρότερο από το πάχος του οριακού στρώματος καθώς

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{1,7208 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}}{5 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}} \implies \delta_1 \approx 0,35 \delta.$$

### 4.3.3 Πάχος ορμής

Ένας επιπλέον δείκτης για την περιγραφή του οριακού στρώματος είναι το πάχος ορμής (momentum thickness),  $\delta_2$  ή  $\Theta$ . Όπως και το πάχος μετατόπισης, το πάχος ορμής εκφράζει το έλλειμα της ροής ορμής εξαιτίας της ύπαρξης του οριακού στρώματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.4. Το έλλειμα αυτό ισούται με τη συνολική ροή της ορμής,  $\dot{p}_{\sigma\sigma\nu}$ , αν δεν υπήρχε το οριακό στρώμα μείον την πραγματική ροή της ορμής,  $\dot{p}_{\pi\rho}$ , δίνοντας

$$d\dot{p}_{\sigma\sigma\nu} - d\dot{p}_{\pi\rho} = dm (U_\infty - u),$$

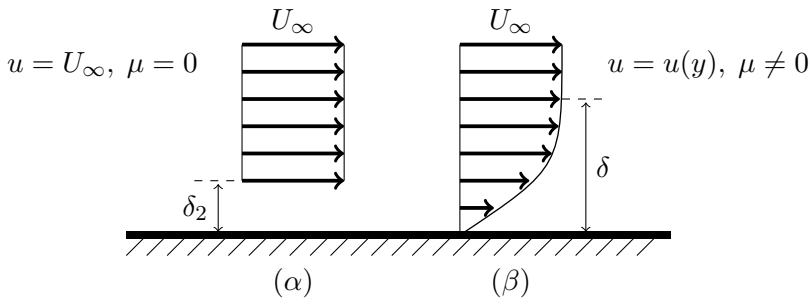
όπου  $dm = \rho u dy$ . Ολοκληρώνοντας το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει το συνολικό έλλειμα της ορμής. Το ζητούμενο επομένως πάχος,  $\delta_2$ , της μετατοπισμένης ομοιόμορφης ροής που χαρακτηρίζεται από την ίδια ποσότητα ορμής εκφράζεται από την ακόλουθη εξίσωση

$$\rho U_\infty^2 \delta_2 = \int_0^\infty \rho u U_\infty dy - \int_0^\infty \rho u^2 dy,$$

ανά μονάδα πλάτους,  $b$ , της πλάκας δίνοντας ότι

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy. \quad (4.10)$$

Σύμφωνα με τη λύση του Blasius, η έκφραση (4.10) για το πάχος ορμής γράφεται



Σχήμα 4.4: Πάχος ορμής,  $\delta_2$ , σε επίπεδη πλάκα.

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \int_0^{\eta_1} f'(\eta) [1 - f'(\eta)] d\eta.$$

### 4.3 Στρωτό οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα

Το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν λύνεται αναλυτικά και επιβάλλεται να λυθεί αριθμητικά. Παρατηρώντας ότι για  $\eta \geq 5$  η τιμή της παραμέτρου  $f'(\eta)$  παραμένει ουσιαστικά σταθερή, προκύπτει τελικά ότι

$$\delta_2 = 0,664 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} = 0,664 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}, \quad (4.11)$$

ή ισοδύναμα ως προς το πάχος,  $\delta$ ,

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{0,664 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}}{5 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}} \implies \delta_2 \approx 0,133 \delta.$$

Ο λόγος των δύο αυτών παχών (μετατόπισης και ορμής) ορίζουν το λεγόμενο παράγοντα σχήματος (shape factor),  $H$ , ως εξής

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2}, \quad (4.12)$$

που είναι εξ ορισμού πάντα μεγαλύτερος της μονάδας και μας δίνει πληροφορίες σχετικά με το φαινόμενο αποκόλλησης του οριακού στρώματος. Για παράδειγμα, μεγάλες τιμές του παράγοντα σχήματος είναι δείκτης ενός οριακού στρώματος κοντά σε αποκόλληση. Από τις Εξισώσεις (4.9) και (4.11) προκύπτει ότι ο παράγοντας σχήματος ισούται με 2,59, ενώ αποδεικνύεται ότι για τυρβώδη ροές οι τυπικές τιμές του κυμαίνονται στο διάστημα 1,25 – 1,35.

#### 4.3.4 Πάχος ενέργειας

Με εντελώς ανάλογο τρόπο ορίζουμε το πάχος ενέργειας (energy thickness),  $\delta_3$ , σαν εκείνη την απόσταση μετρούμενη κάθετα από την επίπεδη πλάκα, η οποία αντιστοιχεί στην ίδια απώλεια κινητικής ενέργειας που χαρακτηρίζει το συννεκτικό ρευστό λόγω της ανάπτυξης του οριακού στρώματος. Μαθηματικά, η συνθήκη αυτή περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση

$$\frac{1}{2} \rho U_\infty b \delta_3 U_\infty^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho u b (U_\infty^2 - u^2) dy,$$

και τότε

$$\delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left( 1 - \frac{u^2}{U_\infty^2} \right) dy.$$

#### 4 ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ

Τέλος, σύμφωνα με την λύση του Blasius, το πάχος ενέργειας γράφεται

$$\delta_3 = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \int_0^\infty f'(\eta) [1 - f'^2(\eta)] d\eta = 1,044 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}, \quad (4.13)$$

ή ισοδύναμα ως προς το πάχος του οριακού στρώματος

$$\frac{\delta_3}{\delta} = \frac{1,044 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}}{5 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}} \implies \delta_3 \approx 0,209 \delta.$$

#### 4.3.5 Διατμητική τάση

Η διατμητική τάση πάνω στην πλάκα μπορεί να υπολογιστεί από την Εξίσωση (??) δίνοντας

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \mu \left. \frac{d^2 \Psi}{dy^2} \right|_{y=0} = \mu \frac{U_\infty^2}{\sqrt{U_\infty \nu x}} \left. \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} = \mu \frac{U_\infty^2}{\sqrt{U_\infty \nu x}} f''(0).$$

Χρησιμοποιώντας ισοδύναμα την έκφραση για τον τοπικό αριθμό Reynolds σύμφωνα με την Εξίσωση (4.8) και τον Πίνακα 4.1, προκύπτει ότι

$$\tau_0 = 0,3321 \frac{\mu U_\infty}{x} \sqrt{Re_x}.$$

Η διατμητική τάση εξαρτάται επομένως από τη θέση  $x$  πάνω στην πλάκα και για το λόγο αυτό συνήθως ονομάζεται *τοπική διατμητική τάση*. Ισοδύναμα, αυτή μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του κινηματικού μέρους της ελεύθερης ροής,  $1/2\rho U_\infty^2$ , ως εξής

$$\tau_0 = 0,3321 \frac{\mu U_\infty}{x \sqrt{Re_x}} \frac{x U_\infty}{\nu} = 0,6642 \frac{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}{\sqrt{Re_x}}, \quad (4.14)$$

από όπου φαίνεται ότι μειώνεται μονότονα με την απόσταση  $x$  από το σημείο προσβολής. Η διατμητική τάση είναι επίσης δυνατό να αδιαστατοποιηθεί ορίζοντας τον *τοπικό συντελεστή διατμητικής τάσης* (friction coefficient),  $c_f$ , συναρτήσει του αριθμού Reynolds

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = \frac{0,6642}{\sqrt{Re_x}}. \quad (4.15)$$

Η αντίστοιχη διατμητική δύναμη γνωστή και ως *οπισθέλκουσα δύναμη* (drag force),  $F_D$ , υπολογίζεται ολοκληρώνοντας την Εξίσωση (4.14) κατά μήκος μίας πλάκας μήκους  $L$  και πλάτους  $b$

$$F_D = b \int_0^L \tau_0 \, dx = 0,3321 \, b\rho \int_0^L \sqrt{\frac{\nu U_\infty^3}{x}} \, dx = 0,6642 \, b\sqrt{U_\infty^3 \mu \rho L}, \quad (4.16)$$

ή ισοδύναμα ως προς τον τοπικό αριθμό Reynolds στη θέση  $x = L$

$$F_D = 0,6642 \mu b U_\infty \sqrt{Re_L}.$$

Τέλος, η παραπάνω διατμητική δύναμη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να οριστεί ο ολικός συντελεστής διατμητικής τάσης,  $C_f$ , για μία επιφάνεια εμβαδού  $A$  ως εξής

$$C_f = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A} = \frac{1,3284}{\sqrt{Re_L}}. \quad (4.17)$$

Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι η παραπάνω ανάλυση αναφέρεται στο στρωτό οριακό στρώμα πάνω σε μία επίπεδη πλάκα απουσία κλίσης πίεσης. Τα αποτελέσματα της ενότητας αυτής συμφωνούν αρκετά ικανοποιητικά με τα πειραματικά δεδομένα μέχρι το σημείο όπου το οριακό στρώμα αποκτά τυρβώδη χαρακτηριστικά. Η μετάβαση αυτή του οριακού στρώματος από στρωτό σε τυρβώδες λαμβάνει χώρα για οποιαδήποτε ροή και για όλα τα ρευστά, υποθέτοντας ότι η πλάκα είναι αρκετά μεγάλων διαστάσεων. Ο λόγος είναι ότι η τιμή του  $Re_x$  είναι ανάλογη της απόστασης  $x$  από το σημείο προσβολής της πλάκας και επομένως θα υπάρξει αναπόφευκτα ένα σημείο σε αυτήν για το οποίο η τιμή του  $Re_x$  θα υπερβεί μία κρίσιμη τιμή  $Re_{\kappa\rho}$ . Αν και η κρίσιμη αυτή τιμή δεν είναι αυστηρά καθορισμένη, στις περισσότερες εφαρμογές που αφορούν παρόμοιες γεωμετρίες λαμβάνεται ότι  $Re_{\kappa\rho} = 5 \cdot 10^5$ .

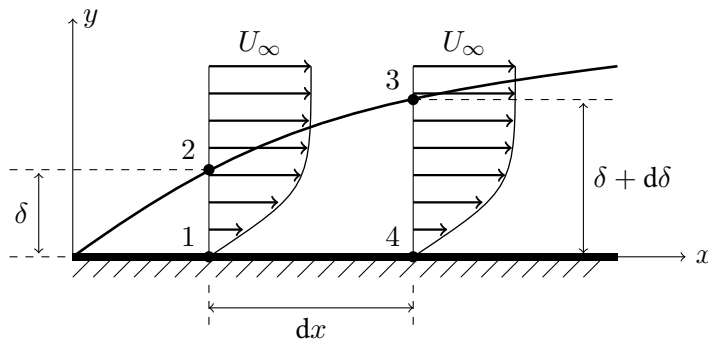
## 4.4 Εξίσωση ορμής von Kármán

Η εξίσωση ορμής von Kármán είναι μια θεμελιώδης έννοια στη μηχανική των ρευστών, ιδιαίτερα στη μελέτη των οριακών στρωμάτων. Παρέχει μια σχέση μεταξύ στην κατανομή της ταχύτητας μίας τυρβώδους ροής κοντά σε μια επιφάνεια και της διατμητικής τάσης που ασκείται από το ρευστό στην επιφάνεια. Η εξίσωση αυτή προκύπτει με την εφαρμογή των αρχών διατήρησης της ορμής σε έναν όγκο ελέγχου εντός του οριακού στρώματος. Η προσέγγιση του von Kármán απλοποιεί τη σύνθετη συμπεριφορά των οριακών στρωμάτων

#### 4 ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ

ενσωματώνοντας τις εξισώσεις που διέπουν το πάχος του οριακού στρώματος και δίνοντας μια έκφραση για την κατανομή της ταχύτητας, την κλίση πίεσης και τη διατμητική τάση. Αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμη στην πρόβλεψη της οπισθέλκουσας δύναμης σε ένα σώμα βυθισμένο σε ένα ρευστό και στην εκτίμηση της συμπεριφοράς της ροής κοντά σε στερεά τοιχώματα, με σημαντικές εφαρμογές στην αεροδυναμική και την υδροδυναμική.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε το Σχήμα 4.5 με όγκο ελέγχου ανά μονάδα πλάτους,  $b$ , της επίπεσης πλάκας (σύνορο ελέγχου) τη διαδρομή 1 – 2 – 3 – 4, όπου το μήκος μεταξύ των σημείων 1 και 4 που συμβολίζεται με  $(1,4) = dx$ . Μπο-



Σχήμα 4.5: Σύνορο ελέγχου  $AB\Gamma\Delta$  για την εξαγωγή της εξίσωσης ορμής von Kármán.

ρούμε τότε να υποθέσουμε ότι αν  $(1,2) = \delta$  τότε  $(3,4) = \delta + d\delta$  και η παροχή μάζας εισόδου,  $\dot{m}_{ελσ}$ , διαμέσω της επιφάνειας  $(1,2)b$  ισούται με

$$\dot{m}_{1,2} = \dot{m}_{ελσ} = \int_0^{\delta} \rho u b dy.$$

Επίσης, η παροχή μάζας εξόδου,  $\dot{m}_{εξ}$ , από την επιφάνεια  $(3,4)b$  δίνεται από τη σχέση

$$\dot{m}_{3,4} = \dot{m}_{εξ} = \int_0^{\delta} \rho \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) b dy.$$

Καθώς δε διέρχεται ρευστό από την πλάκα, η διαφορά  $\dot{m}_{εξ} - \dot{m}_{ελσ}$  αναφέρεται αναγκαστικά στην παροχή μάζας που διέρχεται από την επιφάνεια  $(2,3)b$  δίνοντας

$$\dot{m}_{2,3} = \dot{m}_{εξ} - \dot{m}_{ελσ} = \int_0^{\delta} \rho b \frac{\partial u}{\partial x} dx dy.$$

Οι αντίστοιχες εκφράσεις τότε της ροής της ορμής στο σύνορο ελέγχου ισούνται με

$$\int_0^\delta \rho u^2 b dy, \quad \int_0^\delta \rho \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 b dy \quad \text{και} \quad U_\infty \int_0^\delta \rho b \frac{\partial u}{\partial x} dx dy,$$

αφού στο σύνορο 2,3 το ρευστό έχει πρακτικά αποκτήσει την ταχύτητα της ελεύθερης ροής,  $U_\infty$ . Λαμβάνοντας τέλος υπόψη ότι το εσωτερικό γινόμενο της ταχύτητας με το μοναδιαίο και προς τα έξω κάθετο διάνυσμα είναι αρνητικό για τις διαδρομές 1 – 2, 2 – 3 και θετικό για τη διαδρομή 3 – 4, μπορούμε να γράψουμε το δεύτερο νόμο του Newton κατά τη διεύθυνση του άξονα  $x$  ως εξής

$$-\tau_w b dx = - \int_0^\delta \rho u^2 b dy + \int_0^\delta \rho \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 b dy - U_\infty \int_0^\delta \rho b \frac{\partial u}{\partial x} dx dy.$$

Αναπτύσσοντας τους όρους της παραπάνω έκφρασης και αμελώντας διαφορικά μεγαλύτερης τάξης προκύπτει

$$\tau_w = \int_0^\delta \left( \rho U_\infty \frac{\partial u}{\partial x} - 2\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy = \int_0^\delta \left( \rho U_\infty \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) dy. \quad (4.18)$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γραφτεί στην ισοδύναμη μορφή

$$\frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} = \frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left( 1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy. \quad (4.19)$$

Η Εξίσωση (4.19) αποτελεί τη μακροσκοπική εξίσωση της ορμής von Kármán<sup>4</sup> απουσία κλίσης πίεσης, που ισχύει τόσο για το στρωτό όσο και για το τυρβώδες οριακό στρώμα. Στην περίπτωση όπου  $dp/dx \neq 0$ , πρέπει να ληφθεί υπόψη η συνεισφορά της πίεσης στη δυναμική εξέλιξη της ροής με τη βοήθεια της Εξίσωσης (1.33) σύμφωνα με την οποία

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx}.$$

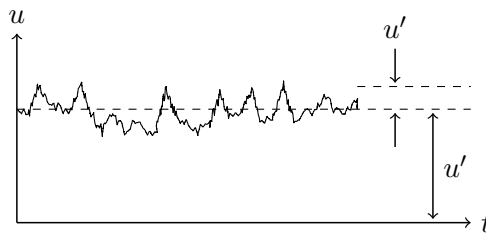
Το αποτέλεσμα (4.18) τότε γενικεύεται ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{\tau_w}{\rho} &= \int_0^\delta \left( U_\infty \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u^2}{\partial x} + U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} \right) dy \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^\delta [u (U_\infty - u)] dy + \frac{dU_\infty}{dx} \int_0^\delta (U_\infty - u) dy. \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Ο Theodore von Kármán, 1881-1963, ήταν Ούγγρος μαθηματικός και μηχανικός που ασχολήθηκε εκτεταμένα με τη ρευστομηχανική και καθιερώθηκε ως ένας από τους βασικότερους εκπροσώπους της αεροναυπηγικής στον εικοστό αιώνα.

## 4.5 Οι σταθμισμένες κατά Reynolds εξισώσεις Navier-Stokes

Η στατιστική ανομοιομορφία της τύρβης όπως αυτή λαμβάνει χώρα με τη μη ομαλή κίνηση των ροϊκών στοιχείων παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.6. Η ταχύτητα επομένως σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή ισούται με το άθροισμα της μέσης τιμής της,  $\bar{u}$ , σε κάποια περίοδο,  $T$ , και της διακυμαινόμενης συνιστώσας,  $u'$ . Για το λόγο αυτό σε μία τυρβώδη ροή δεν είναι δυνατό να μιλάμε για τη στιγμιαία (και μεταβαλλόμενη) ταχύτητα σε κάποια θέση, αλλά για τη μέση τιμή της στη θέση αυτή. Υπό αυτό το πρίσμα είναι δυνατό να ορίσουμε την *τύρβη* (turbulence) τότε ως το συνολικό εύρος της διακύμανσης αυτής. Προφανώς, η παραπάνω



Σχήμα 4.6: Στιγμιαία και μέση ταχύτητα ως προς το χρόνο στην τυρβώδη ροή.

θεώρηση για τη συνιστώσα της ταχύτητας,  $u$ , γενικεύεται για τις υπόλοιπες δύο ως εξής

$$u(x,t) = \bar{u}(x) + u'(x,t), \quad v(x,t) = \bar{v}(x) + v'(x,t) \quad \text{και} \quad w(x,t) = \bar{w}(x) + w'(x,t),$$

όπου (αμελώντας τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$  και  $t$ )

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt, \quad \bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v dt \quad \text{και} \quad \bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w dt.$$

Αποδεικνύεται τότε για τη συνιστώσα  $\bar{u}'$  (ή τις αντίστοιχες  $\bar{v}'$ ,  $\bar{w}'$ ) ότι

$$\bar{u}' = \frac{1}{T} \int_0^T (u - \bar{u}) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u dt - \bar{u} \frac{1}{T} \int_0^T dt = \bar{u} - \bar{u} = 0.$$

Ως προς την εξίσωση συνέχειας (1.7) προκύπτει επίσης

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \implies \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) = 0.$$

#### 4.5 Οι σταθμισμένες κατά Reynolds εξισώσεις Navier-Stokes

Επειδή οι ανηγμένες ως προς το χρόνο μέσες τιμές της ταχύτητας ικανοποιούν εξ ορισμού την εξίσωση συνέχειας, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το ίδιο ισχύει και για τις διακυμαινόμενες συνιστώσες δίνοντας

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \quad (4.20)$$

Ανάλογοι συλλογισμοί μπορούν να γίνουν και για την εξίσωση της ορμής στη  $x$  διεύθυνση σύμφωνα με την Ενότητα 1.3.1 και θεωρώντας ότι για τη πίεση ισχύει  $p = \bar{p} + p'$ . Προκύπτουν τότε οι σταθμισμένες κατά Reynolds εξισώσεις Navier-Stokes (Reynolds-averaged Navier-Stokes, RANS) ως εξής. Ξεκινώντας από την εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

μπορούμε να γράψουμε για το αριστερό μέλος

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} + (\bar{v} + v') \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial y} + (\bar{w} + w') \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial z} = \\ & \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right) + \\ & \left( \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u'}{\partial y} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial u'}{\partial z} + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Αντίστοιχα για το δεξιό μέλος απουσία εξωτερικών δυνάμεων έχουμε

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial z^2} \right] = \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Η διαχείριση των παραπάνω αποτελεσμάτων απαιτεί δύο οποιαδήποτε ροϊκά μεγέθη, έστω  $\phi$  και  $\psi$ , να ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες

$$\overline{\phi\psi} = \bar{\phi}\bar{\psi} + \overline{\phi'\psi'}, \quad \overline{\phi\phi'} = \overline{\psi\psi'} = \overline{\phi\psi'} = \overline{\psi\phi'} = 0, \quad \overline{\phi^2} = \bar{\phi}^2 + \overline{\phi'^2},$$

και

$$\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z}.$$

#### 4 ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ

Λαμβάνοντας τη μέση ανηγμένη ως προς το χρόνο έκφραση των δύο μελών και αναγνωρίζοντας ότι οι μεικτοί όροι  $\overline{U_i \partial u' / \partial x_i} = U'_i \overline{\partial \bar{u} / \partial x_i} = 0$  προκύπτει

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) + \left( \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} \right) \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

όπου

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} = 0.$$

Παρατηρώντας όμως ότι

$$\overline{U'_i \frac{\partial u'}{\partial x}} = \overline{\frac{\partial}{\partial x} (U'_i u')} - u' \frac{\partial U'_i}{\partial x},$$

και με τη βοήθεια της Εξίσωσης (4.20) έχουμε

$$\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = \overline{\frac{\partial (u' u')}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial (u' v')}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial (u' w')}{\partial z}}. \quad (4.22)$$

Συνδυάζοντας στη συνέχεια τις Εξισώσεις (4.21) και (4.22), η εξίσωση ορμής στη  $x$  διεύθυνση γράφεται

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) + \left[ \overline{\frac{\partial (u' u')}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial (u' v')}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial (u' w')}{\partial z}} \right] \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Οι τρεις όροι μέσα στην αγκύλη που εμφανίστηκαν κατά τον υπολογισμό των σταθμισμένων κατά Reynolds εξισώσεων Navier-Stokes αποτελούν συνιστώσες του λεγόμενου *τανυστή τάσεων Reynolds* (Reynolds stress tensor),  $\tau'_{ij}$ . Προφανώς, η εξαγωγή των άλλων δύο συνιστωσών (κατά τις διευθύνσεις  $y$  και  $z$ ) θα δώσει έξι επιπλέον όρους για τον τανυστή, επιτρέποντας μας να γράψουμε τη γενική έκφραση

$$\tau'_{ij} = -\overline{U'_i U'_j}.$$

Είναι φανερό ότι ο τανυστής είναι συμμετρικός με τα διαγώνια στοιχεία να αποτελούν τις ορθές τάσεις και τα μη διαγώνια τις αντίστοιχες διατμητικές. Διαστατικά μπορεί να εκφραστεί ως τάση δια πυκνότητα και για το λόγο αυτό

#### 4.6 Τυρβώδες οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα

εκφράζεται σε  $m^2/s^2$ . Ισοδύναμα, στη βιβλιογραφία πολύ συχνά συμπεριλαμβάνεται και η πυκνότητα δίνοντας

$$\tau'_{ij} = -\rho \overline{U'_i U'_j}, \quad (4.23)$$

ώστε να εκφραστεί ο τανυστής Reynolds σε μονάδες Pascal.

Είναι δυνατόν τότε να προκύψει η ακόλουθη εξίσωση σε μορφή συνιστωσών παρόμοια με αυτή που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 1.3.1 παρουσία εξωτερικών δυνάμεων ως εξής

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \sum_j \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \sum_j \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j^2} - \sum_j \frac{\partial \overline{U'_i U'_j}}{\partial x_j}.$$

Μία άμεση συνέπεια της Εξίσωσης (4.23) είναι ότι η εισαγωγή του τανυστή  $\tau'_{ij}$  οδηγεί στην εισαγωγή έξι νέων και άγνωστων μεγεθών, ανεβάζοντας το συνολικό αριθμό των αγνώστων μεγεθών σε δέκα (συμπεριλαμβάνοντας τα πεδία ταχύτητας και πίεσης). Το σύστημα δηλαδή των εξισώσεων μάζας και ορμής δεν είναι πλέον "κλειστό" και απαιτούνται επιπλέον εξισώσεις για να είναι δυνατή η επίλυσή του. Για το σκοπό αυτό έχουν προταθεί διάφορα μοντέλα τύρβης που αποσκοπούν στην μαθηματική περιγραφή των συνιστωσών του τανυστή τάσεων Reynolds ως ανηγμένες προς κάποιο μέγεθος μέσες τιμές ή άλλες μεταβλητές, όπως τα μοντέλα  $k - \varepsilon$ , SST,  $k - \omega$  κ.ά.

#### 4.6 Τυρβώδες οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα

Όταν η ροή ενός ρευστού μεταβαίνει από στρωτή (ομαλή και στρωματοποιημένη) σε τυρβώδη (χαοτική και ασταθής) αναφερόμαστε στο τυρβώδες οριακό στρώμα. Σε αυτή την περιοχή, το ρευστό βιώνει πολύπλοκη και απρόβλεπτη κίνηση λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ του ρευστού και της επιφάνειας. Διαδραματίζει δε κρίσιμο ρόλο σε πολλές εφαρμογές της μηχανικής, ιδιαίτερα στην αεροδυναμική και την υδροδυναμική, επηρεάζοντας την αντίσταση στις επιφάνειες, τη μεταφορά θερμότητας και τη σταθερότητα της ροής.

Η κατανόηση της συμπεριφοράς ενός τυρβώδους οριακού στρωμάτος είναι απαραίτητη για τη βελτιστοποίηση του σχεδιασμού αεροσκαφών, πλοίων και αγωγών, καθώς και για τη βελτίωση της απόδοσης των συστημάτων μεταφοράς ενέργειας όπως οι εναλλάκτες θερμότητας. Η μελέτη τους περιλαμβάνει έναν συνδυασμό θεωρητικών μοντέλων, πειραματικής έρευνας και υπολογιστικών μεθόδων για την πρόβλεψη και τον έλεγχο της ροής σε διάφορες εφαρμογές.

Η αναλυτική επίλυση των εξισώσεων για τα τυρβώδη οριακά στρώματα είναι γενικά πολύ δύσκολη (αν όχι αδύνατη) λόγω της πολύπλοκης και μη γραμμικής φύσης τους. Η απόκτηση επομένως μιας γενικής αναλυτικής λύσης στις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις δεν είναι εφικτή και επομένως είμαστε αναγκασμένοι να καταφύγουμε σε εμπειρικές ή ήμι-εμπειρικές μεθόδους για τον υπολογισμό των απαραίτητων μεγεθών που απαιτούνται για την κατανόησή τους. Στη ενότητα λοιπόν αυτή θα συνοψίσουμε τις βασικές αρχές για τη μελέτη του τυρβώδους οριακού στρώματος σε επίπεδη πλάκα ακολουθώντας ανάλογους με την προηγούμενη ενότητα συλλογισμούς.

##### 4.6.1 Δομή του τυρβώδους οριακού στρώματος

Το τυρβώδες οριακό στρώμα είναι εκείνη η περιοχή ροής κοντά σε μια στερεή επιφάνεια όπου κυριαρχεί η χαοτική και ακανόνιστη διάδοση των διαταραχών. Σε αντίθεση με το στρωτό οριακό στρώμα, όπου το ρευστό κινείται σε στρωματιποιημένη δομή, το τυρβώδες οριακό στρώμα παρουσιάζει σημαντική ορμή και μεταφορά ενέργειας λόγω δινών και στροβίλων. Στη γενική περίπτωση μπορεί να διαχωριστεί σε διάφορες περιοχές ανάλογα με την απόσταση από το τοίχωμα και τις φυσικές διεργασίες που επικρατούν σε κάθε μία από αυτές. Στις περισσότερες όμως των περιπτώσεων είναι δυνατό να αναγνωριστούν ποιοτικά τρεις διαφορετικές περιοχές: το *ιξώδες υπόστρωμα* (viscous sublayer), την *περιοχή μετάβασης* (buffer layer) και το *τυρβώδες στρώμα* (turbulent region).

Το ιξώδες υπόστρωμα αποτελεί μία λεπτή περιοχή του τυρβώδους οριακού στρώματος που βρίσκεται ακριβώς μετά το τοίχωμα. Σε αυτό οι ιξώδεις δυνάμεις κυριαρχούν και παρά τη τυρβώδη φύση της ροής, το υπόστρωμα παραμένει σχετικά στρωματοποιημένο εξαιτίας της επικράτησης της συνεκτικότητας. Ως εκ τούτου η ροή είναι σχεδόν στρωτή και το προφίλ της ταχύτητας αυξάνεται γραμμικά με την απόσταση από τον τοίχωμα. Το δε πάχος του εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds και σε υψηλούς αριθμούς Reynolds αυτό γίνεται προφανώς πολύ λεπτό. Η περιοχή μετάβασης αποτελεί το ενδιάμεσο στρώμα και ουσιαστικά είναι μια μεταβατική ζώνη μεταξύ του ιξώδους υποστρώματος και του τυρβώδους στρώματος. Η επίδραση αδρανειακών και συνεκτικών δυνάμεων γίνονται συγκρίσιμες και δε μπορούν να αγνοηθούν. Η κλίση της ταχύτητας εξακολουθεί να είναι υψηλή (όπως και στο ιξώδες υπόστρωμα) δημιουργώντας έντονο στροβιλισμό και αστάθεια. Τέλος, το τυρβώδες στρώμα καταλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος σε σχέση με τα άλλα δύο. Σε αυτό κυριαρχεί η τυρβώδης διατμητική τάση και η συνεκτικότητα δεν λαμβάνεται υπόψη. Το προφίλ της ταχύτητας αποκτάει μικρότερη κλίση και χαρακτηρίζεται από υψηλά επίπεδα ανταλλαγής ορμής λόγω τυρβώδους δίνες διαφόρων μεγεθών, που έχουν ως

αποτέλεσμα έντονη ανάμειξη και ενισχυμένη μεταφορά μάζας, ορμής και ενέργειας.

#### 4.6.2 Η κατανομή της ταχύτητας

Όσο αφορά το ιξώδες υπόστρωμα, έχει παρατηρηθεί ότι οι δίνες που δημιουργούνται σε αυτό είναι μικρής διαμέτρου με αποτέλεσμα το τοίχωμα να μετριάξει τις τυρβώδεις διακυμάνσεις. Ως εκ τούτου, θεωρούμε ότι η διατμητική τάση είναι σταθερή και ίση με την τιμή της επάνω στο τοίχωμα,  $\tau_0$ . Η μέση ταχύτητα τότε,  $\bar{u}$ , είναι ανάλογη της απόστασης από το τοίχωμα,  $y$ , δίνοντας

$$\tau_0 = \mu \frac{\bar{u}}{y}. \quad (4.24)$$

Από τη συνθήκη μη ολίσθησης όμως γνωρίζουμε ότι τόσο η μέση όσο και η διακυμαινόμενη συνιστώσα της ταχύτητας μηδενίζεται για κάθε χρονική στιγμή στο τοίχωμα, δίνοντας ως αποτέλεσμα μηδενικές συνιστώσες για τον ταυνοστή τάσεων Reynolds. Προκύπτει δηλαδή ότι στο ιξώδες υπόστρωμα η μόνη τάση που ασκείται πάνω στο τοίχωμα είναι αυτή που οφείλεται στη συνεκτικότητα του ρευστού όπως αυτή εκφράζεται από την Εξίσωση (4.24). Τα αδρανειακά φαινόμενα από την άλλη ενισχύονται όσο απομακρυνόμαστε από το στερεό τοίχωμα μέχρι ένα ύψος, έστω  $y'$ , όπου οι συνεκτική και τυρβώδης τάσεις γίνονται ίσες οδηγώντας τον αριθμό Reynolds στη μονάδα,  $Re = 1$ . Η διαπίστωση αυτή σε συνδυασμό με την Εξίσωση (4.24) οδηγεί σε απαλοιφή του  $y'$  δίνοντας

$$(u^*)^2 = \frac{\tau_0}{\rho} \implies u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}. \quad (4.25)$$

Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται *διατμητική ταχύτητα* (shear velocity) ή *ταχύτητα τριβής* (friction velocity), συμβολίζεται συνήθως με  $u^*$  ή  $u_\tau$  και αποτελεί μία κλίμακα που συνδέει τη διατμητική τάση στο τοίχωμα με τη μεταφορά της ορμής. Δεν αποτελεί "πραγματική" ταχύτητα και ποσοτικά περιγράφει τη διατμητική τάση στο οριακό στρώμα και την κλίση της ταχύτητας ροής.

Συνδυάζοντας στη συνέχεια τις Εξισώσεις (4.24) και (4.25) είναι δυνατό να εκφράσουμε τη μέση ταχύτητα,  $\bar{u}$ , ως προς την ταχύτητα τριβής ως εξής

$$\mu \frac{\bar{u}}{y} = (u^*)^2 \rho \implies \frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{u^* y}{\nu}.$$

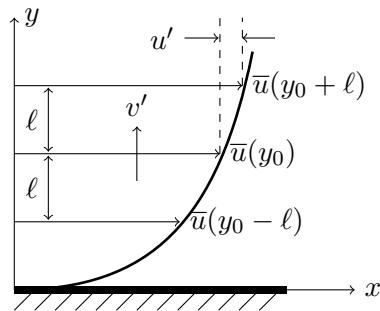
Το αριστερό μέλος περιγράφει την αδιάστατη ταχύτητα,  $u^+$ , και το δεξιό την αδιάστατη κάθετη από το τοίχωμα απόσταση,  $y^+$ , δίνοντας για το ιξώδες υπόστρωμα ότι  $u^+ = y^+$ . Η κατανομή της ταχύτητας δηλαδή είναι γραμμική και

#### 4 ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ

με χρήση κατάλληλων πειραμάτων έχει βρεθεί ότι το ιξώδες υπόστρωμα περιορίζεται στο διάστημα  $y^+ \leq 5$ . Το δε συνολικό του πάχους δεν υπερβαίνει το 1% του συνολικού πάχους του τυρβώδους οριακού στρώματος.

Εκτός του ιξώδους υποστρώματος η δράση της τύρβης διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην κίνηση ρευστού η οποία χαρακτηρίζεται από δίνες που μεταφέρουν την ορμή κατακόρυφα, ενισχύοντας την ανάμειξη. Είναι επομένως δυνατό μάζες ρευστού μικρότερης ταχύτητας να μετακινούνται σε περιοχές ροής μεγαλύτερης ταχύτητας κατά την εγκάρσια μετατόπισή τους, επιβραδύνοντας με τον τρόπο αυτό το ρευστό και αντίστροφα. Η ταχύτητα δηλαδή της μετακινούμενης μάζας,  $u$ , θα είναι μικρότερη από τη μέση ταχύτητα του ρευστού στη θέση αυτή,  $\bar{u}$ , οδηγώντας ουσιαστικά σε αρνητική διακυμαινόμενη συνιστώσα,  $u' < 0$ . Στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή  $v' < 0$ , η μάζα οδηγείται πιο κοντά στο τοίχωμα και σε περιοχή μικρότερης μέσης ταχύτητας ή ισοδύναμα σε θετική διακυμαινόμενη συνιστώσα,  $u' > 0$ . Προκύπτει επομένως ότι το γινόμενο  $u'v'$  είναι πάντα αρνητικό, λειτουργώντας δηλαδή ως ένα είδος διατμητικής τάσης που δεν είναι τίποτα άλλο από τις τάσεις Reynolds που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Ένα ερώτημα που ανακύπτει αβίαστα είναι πόσο αργά ή γρήγορα συμβαίνει η ανάμειξη αυτή κατά την εγκάρσια μετακίνηση στο τυρβώδες οριακό στρώμα. Για να απαντηθεί αυτό ο Prandtl εισήγαγε το μήκος ανάμειξης (mixing length),  $\ell$ , που αντιπροσωπεύει τη μέση απόσταση που διανύει μία μάζα ρευστού στην εγκάρσια κατεύθυνση πριν αναμιχθεί με το περιβάλλον ρευστό και ανταλλάξει ορμή. Είναι παρόμοιο με τη "μέση ελεύθερη διαδρομή" στην κινητική θεωρία, αλλά εφαρμόζεται σε δίνες αντί για μόρια και γραφικά παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.7. Η διακυμαινόμενη συνιστώσα,  $u'$ , τότε για μία μάζα που μετατοπί-



Σχήμα 4.7: Σχηματική αναπαράσταση του μήκους ανάμειξης κατά Prandtl.

#### 4.6 Τυρβώδες οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα

ζεται από το επίπεδο  $y_0 - \ell$  στο επίπεδο  $y_0$  ισούται με

$$u' = \bar{u}(y_0) - \bar{u}(y_0 - \ell) = \bar{u}(y_0) - \left[ \bar{u}(y_0) - \ell \left. \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} \right|_{y_0} \right] \approx \ell \left. \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} \right|_{y_0}.$$

Θεωρώντας στη συνέχεια ότι  $|u'| = |v'|$  μπορούμε να γράψουμε ότι  $\overline{u'v'} \approx |u'|^2 \approx |v'|^2$  και η Εξίσωση (4.23) παίρνει τη μορφή

$$\tau_0 = -\rho \overline{u'v'} = \rho \ell^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2, \quad (4.26)$$

υποθέτοντας σύμφωνα με τον Prandtl ότι η διατμητική τάση της τύρβης κατά μήκος του άξονα  $y$  είναι σταθερή και ίση με αυτή στο τοίχωμα. Η Εξίσωση (4.26) είναι δυνατό να ολοκληρωθεί αν γνωρίζουμε μία έκφραση για το μήκος ανάμειξης. Ξανά ο Prandtl υπέθεσε ότι αυτό μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση  $y$  από την πλάκα, δηλαδή

$$\ell = ky,$$

όπου  $k$  η σταθερά von Kármán. Προκύπτει επομένως για τη μέση κατανομή της ταχύτητας ότι

$$\bar{u}(y) = \frac{u^*}{k} \ln y + C. \quad (4.27)$$

Η Εξίσωση (4.27) αποτελεί τη γνωστή λογαριθμική κατανομή ταχυτήτων στο τυρβώδες οριακό στρώμα. Στη βιβλιογραφία συχνά παρουσιάζεται η ισοδύναμη αδιάστατη μορφή της ως εξής

$$\frac{\bar{u}(y)}{u^*} = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{yu^*}{\nu} \right) + \frac{C}{u^*} - \frac{1}{k} \ln \left( \frac{u^*}{\nu} \right) \implies u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B. \quad (4.28)$$

Η πειραματική επιβεβαίωση της προσέγγισης αυτής αποτέλεσε ένα θρίαμβο για την επιτυχημένη περιγραφή του τυρβώδους οριακού στρώματος για τοπικούς αριθμούς Reynolds μεγαλύτερους των μερικών εκατομμυρίων. Με τη βοήθεια στη συνέχεια αρκετών και λεπτομερών πειραμάτων προέκυψαν στατιστικές προσεγγίσεις για τις σταθερές  $k$  και  $B$  ίσες με

$$k = 0,41 \quad \text{και} \quad B = 5,56.$$

Η περιοχή εγκυρότητας της Εξίσωσης (4.28) δίνεται από το διάστημα  $30 \leq y^+ \leq 500$ .<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Συχνά στη βιβλιογραφία παρουσιάζεται ως περιοχή εγκυρότητας το διάστημα  $30 \leq y^+ \leq 1000$ .

#### 4 ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ

Στο εξωτερικό στρώμα όπου  $y^+ > 500$  η κατανομή της ταχύτητας δεν περιγράφεται με ακρίβεια από τον παραπάνω λογαριθμικό νόμο και η ροή αποκτά περισσότερο χαρακτηριστικά μη συνεκτικής ροής. Οι τάσεις Reynolds τότε δημιουργούν ένα έλλειμα μεταξύ της μέσης ταχύτητας,  $\bar{u}(y)$ , και της ταχύτητας ελεύθερης ροής,  $U_\infty$ , οδηγώντας στη διατύπωση του νόμου απόκλισης της ταχύτητας (velocity defect law). Ο γενικός αυτός νόμος περιγράφεται από την έκφραση

$$U_\infty - \bar{u}(y) = f(\tau_0, \rho, y, \delta),$$

ή σε αδιάστατη μορφή

$$\frac{U_\infty - \bar{u}(y)}{u^*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right). \quad (4.29)$$

Η Εξίσωση (4.29) δηλώνει επομένως ότι το έλλειμα της ταχύτητας στο εξωτερικό οριακό στρώμα ως προς την ταχύτητα της ελεύθερης ροής εξαρτάται μόνο από την αδιάστατη απόσταση από την επίπεδη πλάκα.

#### 4.6.3 Πάχος

Μία εναλλακτική υπόθεση για τη μελέτη του τυρβώδους οριακού στρώματος αποτελεί η θεώρηση ότι η κατανομή της ταχύτητας για επίπεδη πλάκα και για  $10^5 < Re < 10^7$  περιγράφεται προσεγγιστικά από την εξίσωση

$$\frac{u}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}, \quad (4.30)$$

με το μεταβλητό εκθέτη,  $n$ , να εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds και να κυμαίνεται εν γένει στο διάστημα  $7 < n < 9$ . Αν και η Εξίσωση (4.30) δεν είναι έγκυρη στο τοίχωμα όπου η κλίση της ταχύτητας στη διεύθυνση  $y$  απειρίζεται, οδηγώντας αντίστοιχα σε άπειρη διατμητική τάση, θεωρείται αρκετά ακριβής στο μεγαλύτερο μέρος του οριακού στρώματος. Για τον υπολογισμό τότε του πάχους του τυρβώδους οριακού στρώματος είναι αναγκαίο να χρησιμοποιηθεί η παραδοχή του Prandtl, σύμφωνα με την οποία τα οριακά στρώματα που αναπτύσσονται σε πλάκες και αγωγούς παρουσιάζουν σημαντικές ομοιότητες και ως εκ τούτου είναι δυνατό η ροή σε αγωγούς να χρησιμοποιηθεί ως υπόβαθρο για τη μελέτη της ροής σε πλάκες. Ξεκινώντας λοιπόν από την Εξίσωση (4.19) για εκθέτη  $n = 7$ , προκύπτει η παρακάτω σχέση για το πάχος του τυρβώδους οριακού στρώμα

$$\frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} = \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right] dy = \frac{d}{dx} \int_0^1 \delta Y^{1/7} (1 - Y^{1/7}) dY,$$

#### 4.6 Τυρβώδες οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα

θέτοντας  $Y = y/\delta$ . Με χρήση στοιχειωδών κανόνων ολοκλήρωσης αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα αυτό ισούται με  $7/72\delta$ , δίνοντας τελικά

$$\frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx}.$$

Το πάχος στο σημείο αυτό δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί καθώς δεν είναι γνωστή η έκφραση για την τάση,  $\tau_0$ . Με τη βοήθεια όμως της Εξίσωσης (4.15) για τον τοπικό συντελεστή διατμητικής τάσης,  $c_f$ , μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} = \frac{c_f}{2} \implies \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = \frac{c_f}{2}.$$

Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί αρκετές εκφράσεις για το συντελεστή  $c_f$ , από λογαριθμικές μέχρι εκθετικές προσεγγίσεις. Όλες αυτές δίνονται συναρτήσσει του αριθμού Reynolds για  $y = \delta$ , δηλαδή έχουν τη μορφή  $c_f = f(Re_\delta)$ , όπου  $f$  κατάλληλη συνάρτηση. Στο βιβλίο αυτό θεωρούμε την ακόλουθη εμπειρική σχέση του Blasius για τον τοπικό συντελεστή διατμητικής τάσης

$$c_f = 0,045 Re_\delta^{-1/4} = 0,045 \left( \frac{\nu}{U_\infty \delta} \right)^{1/4}, \quad (4.31)$$

και τότε

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0,0225 \left( \frac{\nu}{U_\infty \delta} \right)^{1/4} \implies \frac{d\delta}{dx} = 0,2314 \left( \frac{\nu}{U_\infty \delta} \right)^{1/4}.$$

Ολοκληρώνοντας το παραπάνω αποτέλεσμα και θέτοντας  $\delta(x=0) = 0$  προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} \int_0^\delta (\delta^{5/4})' d\delta &= 0,2314 \left( \frac{\nu}{U_\infty} \right)^{1/4} \int_0^x dx \implies \\ \delta^{5/4} &= 0,2893 \left( \frac{\nu}{U_\infty} \right)^{1/4} x \implies \delta = 0,371 \left( \frac{\nu}{U_\infty} \right)^{1/5} x^{4/5}. \end{aligned}$$

Εκφράζοντας τέλος το πάχος του οριακού στρώματος ως προς τη θέση πάνω στην πλάκα όπως έγινε στην Εξίσωση (4.8) βρίσκουμε ότι

$$\frac{\delta}{x} = 0,371 Re_x^{-1/5}, \quad (4.32)$$

ή ισοδύναμα συναρτήσσει των αριθμών Reynolds ως  $Re_\delta = 0,371 Re_x^{4/5}$ . Αξίζει να σημειωθεί βέβαια ότι η Εξίσωση (4.32) για το πάχος του οριακού στρώματος σε πλάκα ισχύει για αριθμούς Reynolds,  $Re \leq 10^7$ . Στη βιβλιογραφία

#### 4 ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ

συναντάται συχνά επίσης η ακόλουθη σχέση για τον τοπικό συντελεστή τάσης

$$c_f = 0,02 Re_\delta^{-1/6}. \quad (4.33)$$

Στην περίπτωση αυτή ολοκληρώνοντας από  $\delta = 0$  για  $x = 0$  προκύπτει

$$\frac{6}{7} \int_0^\delta (\delta^{7/6})' d\delta = 0,1029 \left( \frac{\nu}{U_\infty} \right)^{1/6} \int_0^x dx \implies \frac{\delta}{x} = 0,163 Re_x^{-1/7}. \quad (4.34)$$

Η Εξίσωση (4.34) μπορεί να εκφραστεί ξανά συναρτήσει των αριθμών Reynolds από την ακόλουθη έκφραση

$$Re_\delta = 0,163 Re_x^{6/7}.$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα είναι πλέον προφανές ότι το πάχος του τυρβώδους οριακού στρώματος αυξάνεται πολύ πιο γρήγορα ( $x^{4/5}$  ή  $x^{6/7}$ ) σε σχέση με το πάχος του στρωτού οριακού στρώματος που αυξάνεται ως  $x^{1/2}$ .

#### 4.6.4 Πάχος μετατόπισης και πάχος ορμής

Ο υπολογισμός των παχών μετατόπισης,  $\delta_1$ , και ορμής,  $\delta_2$ , γίνεται χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (4.9) και (4.10) για την κατανομή της ταχύτητας όπως αυτή περιγράφεται από το νόμο της έβδομης ρίζας (4.30) που υποθέσαμε παραπάνω. Προκύπτει τότε ότι

$$\delta_1 = \delta - \frac{7}{8} \frac{1}{\delta^{1/7}} \int_0^\delta (y^{8/7})' dy = \frac{1}{8} \delta \implies \frac{\delta_1}{x} = 0,046 Re_x^{-1/5},$$

και

$$\delta_2 = \frac{1}{\delta^{1/7}} \int_0^\delta (y^{8/7})' dy - \frac{1}{\delta^{2/7}} \int_0^\delta (y^{9/7})' dy = \frac{7}{72} \delta \implies \frac{\delta_2}{x} = 0,036 Re_x^{-1/5}.$$

Ο παράγοντας σχήματος,  $H$ , για τυρβώδη ροή τότε ισούται με

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{1}{8} \frac{72}{7} = 1,29,$$

επιβεβαιώνοντας την εκτίμηση που έγινε για τον παράγοντα σχήματος στην Ενότητα 4.3.3. Υιοθετώντας το αποτέλεσμα (4.35), οι αντίστοιχες εκφράσεις για τα πάχη γράφονται

$$\frac{\delta_1}{x} = 0,020 Re_x^{-1/7} \quad \text{και} \quad \frac{\delta_2}{x} = 0,016 Re_x^{-1/7}.$$

### 4.6.5 Διατμητική τάση

Η εξαγωγή της έκφρασης για τη διατμητική τάση στο τυρβώδες οριακό στρώμα εξαρτάται από την έκφραση για τον τοπικό συντελεστή διατμητικής τάσης που θα υιοθετηθεί στους υπολογισμούς. Στην ενότητα αυτή και για λόγους πληρότητας θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα και για τις δύο εκφράσεις του  $c_f$  σύμφωνα με τις Εξισώσεις (4.31) και (4.33). Προκύπτει τότε ότι

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 0,045 Re_\delta^{-1/4} = 0,0225\rho U_\infty^2 \left(0,371 Re_x^{4/5}\right)^{-1/4} = 0,0288 \frac{\rho U_\infty^2}{Re_x^{1/5}},$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 0,02 Re_\delta^{-1/6} = 0,01\rho U_\infty^2 \left(0,163 Re_x^{6/7}\right)^{-1/6} = 0,0135 \frac{\rho U_\infty^2}{Re_x^{1/7}}.$$

Σε διαστατή μορφή τα παραπάνω αποτελέσματα γράφονται αντίστοιχα

$$\tau_0 = 0,0288 \frac{\nu^{1/5} \rho U_\infty^{9/5}}{x^{1/5}} \quad \text{και} \quad \tau_0 = 0,0135 \frac{\nu^{1/7} \rho U_\infty^{13/7}}{x^{1/7}},$$

δίνοντας τις ακόλουθες εκφράσεις για τις διατμητικές δυνάμεις,  $F_D$ , σε πλάκα μήκους  $L$  και πλάτους  $b$

$$F_D = b \int_0^L \tau_0 \, dx = 0,0288 b \rho U_\infty^2 \left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{1/5} \int_0^L x^{-1/5} \, dx$$

$$= 0,036 b \rho (U_\infty^9 \nu)^{1/5} L^{4/5} = 0,036 b \rho U_\infty^2 L Re_L^{-1/5},$$

και

$$F_D = b \int_0^L \tau_0 \, dx = 0,0135 b \rho U_\infty^2 \left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{1/7} \int_0^L x^{-1/7} \, dx$$

$$= 0,016 b \rho (U_\infty^{13} \nu)^{1/7} L^{6/7} = 0,016 b \rho U_\infty^2 L Re_L^{-1/7}.$$

Ακολουθώντας τέλος ανάλογη προσέγγιση με το στρωτό οριακό στρώμα ορίζουμε τους ολικούς συντελεστές διατμητικής τάσης,  $C_f$ , για μία επιφάνεια εμβαδού  $A$  σύμφωνα με την Εξίσωση (4.17) ως εξής

$$C_f = \frac{0,072}{Re_L^{1/5}} \quad \text{και} \quad C_f = \frac{0,032}{Re_L^{1/7}}.$$

Στην ενότητα που ακολουθεί συνοψίζονται οι βασικές γνώσεις του κεφαλαίου με τη βοήθεια χαρακτηριστικών παραδειγμάτων.

## 4.7 Λυμένα παραδείγματα

### Παράδειγμα 7.1

Νερό ταχύτητας  $U_\infty = 1 \text{ m/s}$  και ιξώδους  $\nu = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ρέει επάνω από πλάκα μήκους  $3 \text{ m}$ . Ποιο είναι το πάχος του στρωτού οριακού στρώματος στο σημείο όπου ο τοπικός αριθμός Reynolds ισούται με  $3,6 \cdot 10^5$ ;

Στην άσκηση αυτή ζητείται το πάχος του οριακού στρώματος σε μία θέση  $x$  πάνω στην πλάκα η οποία είναι άγνωστη. Μπορεί όμως να υπολογιστεί από τον τοπικό αριθμό Reynolds (4.8). Έχουμε λοιπόν

$$x = \frac{Re_x \nu}{U_\infty} = \frac{3,6 \cdot 10^5 \cdot 1,1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,396 \text{ m}.$$

Από την Εξίσωση (4.8) προκύπτει τότε ότι

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5 \cdot 0,396 \text{ m}}{\sqrt{360000}} = 0,0033 \text{ m},$$

ή ισοδύναμα,

$$\delta = 3,3 \text{ mm}.$$

### Παράδειγμα 7.2

α) Ποια η τιμή της διατμητικής τάσης για τη θέση  $x$  που υπολογίστηκε στην προηγούμενη άσκηση; β) Σε ποια νέα θέση πάνω στην πλάκα η τιμή της διατμητικής τάσης θα διπλασιαστεί;

α) Από την Εξίσωση (4.14) έχουμε ότι

$$\tau_0 = 0,6642 \frac{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}{\sqrt{Re_x}} = 0,6642 \frac{\frac{1}{2} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\sqrt{360000}} = 0,55 \text{ Pa}.$$

β) Από το προηγούμενο ερώτημα είναι προφανές ότι η διατμητική τάση θα διπλασιαστεί όταν η τιμή του τοπικού αριθμού Reynolds γίνει τέσσερις φορές μικρότερη και τότε

$$\frac{\tau'_0}{\tau_0} = \frac{\sqrt{Re_x}}{\sqrt{Re'_x}} = \sqrt{\frac{x}{x'}} = 2,$$

δίνοντας

$$x' = \frac{x}{4} = \frac{0,396 \text{ m}}{4} \implies x' = 0,099 \text{ m}.$$

### Παράδειγμα 7.3

Έστω επίπεδη πλάκα πάνω στην οποία ρέουν διάφορα ρευστά με σταθερή ταχύτητα  $U_\infty = 5 \text{ m/s}$ . Υπολογίστε σε ποιο σημείο της πλάκας το οριακό στρώμα θα γίνει τυρβώδες και το πάχος του στο σημείο αυτό για νερό και μέλι.

Το οριακό στρώμα παραμένει στρωτό μέχρι εκείνο το σημείο της πλάκας,  $x_{\kappa\rho}$ , για το οποίο ισχύει ότι

$$x_{\kappa\rho} = Re_{\kappa\rho} \frac{\nu}{U_\infty} = 5 \cdot 10^5 \frac{\nu}{U_\infty}.$$

Στο σημείο αυτό επίσης γνωρίζουμε από την Εξίσωση (4.5) ότι το πάχος του στρώματος ισούται με

$$\delta_{\kappa\rho} = 5 \sqrt{\frac{\nu x_{\kappa\rho}}{U_\infty}},$$

Περίπτωση 1 - νερό: για  $\nu_\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  προκύπτει:

$$x_{\kappa\rho,\nu} = 5 \cdot 10^5 \frac{1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,1 \text{ m}$$

και

$$\delta_{\kappa\rho,\nu} = 5 \sqrt{\frac{1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot 0,1 \text{ m}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}} = 0,00071 \text{ m}.$$

Περίπτωση 2 - μέλι: για  $\nu_\mu = 7,36 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  προκύπτει:

$$x_{\kappa\rho,\mu} = 5 \cdot 10^5 \frac{7,36 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 7,36 \text{ m}$$

#### 4 ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ

και

$$\delta_{\kappa,\mu} = 5 \sqrt{\frac{7,36 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s} \cdot 7,36 m}{5 \frac{m}{s}}} = 0,052 m.$$

Η επίδραση επομένως της συνεκτικότητας όπως αυτή εκφράζεται από το ιξώδες, αποτελεί καθοριστικό παράγοντα στη διαμόρφωση των χαρακτηριστικών του οριακού στρώματος.

#### Παράδειγμα 7.4

Νερό ρέει σε επίπεδη πλάκα πλάτους  $10 \text{ cm}$  και μήκους  $1 \text{ m}$ . Αν  $U_\infty = 1 \text{ m/s}$  και η ροή είναι στρωτή, υπολογίστε τη διατμητική δύναμη,  $D$ , που αναπτύσσεται πάνω στην πλάκα.

Θεωρώντας ότι  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  και  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  για το νερό, βρίσκουμε την παρακάτω τιμή για το δυναμικό του ιξώδες,

$$\mu = \nu \cdot \rho = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0,001 \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2} = 0,001 \text{ Pa} \cdot \text{s}.$$

Η διατμητική τότε δύναμη ισούται με

$$\begin{aligned} F_\sigma &= 0,6642 \cdot 0,1 \text{ m} \sqrt{\left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^3 \cdot 0,001 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{ s} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1 \text{ m}} \\ &= 0,06642 \text{ m} \sqrt{1 \frac{\text{Nkg}}{\text{m s}^2}} = 0,06642 \text{ m} \sqrt{1 \frac{\text{N}^2}{\text{m}^2}} = 0,06642 \text{ N}. \end{aligned}$$

#### Παράδειγμα 7.5

Αποδείξτε ότι η Εξίσωση (4.4) γράφεται στην ισοδύναμη έκφρασή της (4.7) χρησιμοποιώντας την αδιάστατη παράμετρο

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}.$$

Ξεκινώντας από την Εξίσωση (4.4) για τη ροϊκή συνάρτηση

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}$$

και παρατηρώντας ότι

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2}y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} \frac{1}{x^{3/2}} = -\frac{\eta}{2x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} = \frac{\eta}{y},$$

υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους ως εξής:

- $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \sqrt{\nu x U_\infty} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \eta} = \sqrt{\nu x U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \frac{\partial f}{\partial \eta} = U_\infty \frac{\partial f}{\partial \eta} = U_\infty f',$
- $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (U_\infty f') = U_\infty \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial f'}{\partial \eta} = U_\infty \frac{\eta}{y} f'',$
- $\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left( U_\infty \frac{\eta}{y} f'' \right) = U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial f''}{\partial \eta} = U_\infty \frac{\eta^2}{y^2} f''',$
- $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty \nu}{x}} f + \sqrt{U_\infty \nu x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty \nu}{x}} (f - \eta f') = \frac{1}{2} \frac{\nu \eta}{y} (f - \eta f'),$
- $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (U_\infty f') = U_\infty \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial f'}{\partial \eta} = -\frac{U_\infty}{2x} \eta f''.$

Αντικαθιστώντας τέλος όλα τα παραπάνω αποτελέσματα στην εξίσωση της ροϊκής συνάρτησης προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} U_\infty f' \left( -\frac{U_\infty}{2x} \eta f'' \right) - \frac{1}{2} \frac{\nu \eta}{y} (f - \eta f') U_\infty \frac{\eta}{y} f'' &= \nu U_\infty \frac{\eta^2}{y^2} f''' \implies \\ -\frac{1}{2} \nu U_\infty \frac{\eta^2}{y^2} \eta f' f'' - \frac{1}{2} \nu U_\infty \frac{\eta^2}{y^2} (f - \eta f') f'' &= \nu U_\infty \frac{\eta^2}{y^2} f''' \implies \\ -\frac{1}{2} \eta f' f'' - \frac{1}{2} (f - \eta f') f'' &= f''', \end{aligned}$$

δίνοντας  $2f''' + f f'' = 0$  που αποτελεί και τη ζητούμενη εξίσωση.

### Παράδειγμα 7.6

Σε πλάκα μήκους  $L = 1 \text{ m}$  ρέει νερό ταχύτητας  $U_\infty = 0,1 \text{ m/s}$  και κινηματικού ιξώδους  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Τι είδους ροή εκτελεί το ρευστό και με τι ισούται το μέγιστο πάχος του οριακού στρώματος;

#### 4 ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ

Το μέγιστο πάχος του οριακού στρώματος αναπτύσσεται στο τέλος της πλάκας για  $x = L$  και ισούται με

$$\delta_L = \frac{5L}{\sqrt{Re_L}},$$

όπου

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{0,1 \frac{m}{s} \cdot 1 m}{10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 100000,$$

δίνοντας στρωτή ροή. Το δε μέγιστο πάχος του οριακού στρώματος είναι τότε

$$\delta_L = \frac{5 \cdot 1 m}{\sqrt{100000}} = 0,0158 m = 15,8 mm.$$

#### Παράδειγμα 7.7

Ξεκινώντας από την Εξίσωση (4.17) εκφράστε το μέσο συντελεστή διατμητικής τάσης συναρτήσει του αριθμού Reynolds.

Έστω ορθογώνια πλάκα διαστάσεων  $b \times L$ . Η διατμητική δύναμη γράφεται τότε

$$\begin{aligned} D &= 0,6642 b \sqrt{U_\infty^3 \mu \rho L} = 0,6642 b L U_\infty^2 \sqrt{\frac{\mu \rho}{U_\infty L}} \\ &= 0,6642 A \rho U_\infty^2 \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty L}} = \frac{0,6642 A \rho U_\infty^2}{Re_L^{1/2}}, \end{aligned}$$

αφού

$$Re_L = \frac{\rho U_\infty L}{\mu}.$$

Ο μέσος συντελεστής διατμητικής τάσης,  $C_f$ , τελικά δέχεται την κάτωθι ισοδύναμη έκφραση,

$$C_f = \frac{F_\sigma}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A} = \frac{0,6642 A \rho U_\infty^2}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A} = \frac{1,3284}{Re_L^{1/2}}.$$

**Παράδειγμα 7.8**

Μία πλάκα μήκους  $0,8 \text{ m}$  διαρρέεται από νερό ταχύτητας  $U_\infty = 13 \text{ m/s}$  και κινηματικού ιξώδους  $\nu = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Υπολογίστε το μέγιστο πάχος του οριακού στρώματος.

Από τη σχέση (??) για  $x = L$  καθώς εκεί εμφανίζεται το μέγιστο πάχος προκύπτει

$$\delta_L = 0,371 \frac{L}{Re_L^{1/5}},$$

όπου

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{13 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,8 \text{ m}}{1,1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 9,455 \cdot 10^6 < 10^7.$$

Αντικαθιστώντας,

$$\delta_L = 0,371 \frac{0,8 \text{ m}}{(9,455 \cdot 10^6)^{1/5}} = 0,0119 \text{ m} = 11,9 \text{ mm}.$$

**Παράδειγμα 7.9**

Υπολογίστε το μέσο συντελεστή διατμητικής τάσης αν αέρας κινηματικού ιξώδους  $1,55 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  και πυκνότητας  $1,225 \text{ kg/m}^3$  ρέει με ταχύτητα  $11 \text{ m/s}$  σε πλάκα μήκους  $3 \text{ m}$ . Υποθέστε ότι  $Re_{\kappa\rho} = 5 \cdot 10^5$ .

Το πρώτο ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι αν το μήκος του στρωτού οριακού στρώματος πρέπει να ληφθεί υπόψη στον υπολογισμό του μέσου συντελεστή διατμητικής τάσης. Έχουμε λοιπόν ότι

$$x_{\kappa\rho} = \frac{\nu R_{\kappa\rho}}{U_\infty} = \frac{1,55 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot 5 \cdot 10^5}{11 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,705 \text{ m}.$$

Είναι επομένως προφανές ότι δεν μπορεί να αγνοηθεί το στρωτό οριακό στρώμα

#### 4 ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ

και επομένως η Εξίσωση (??) γράφεται

$$\begin{aligned} C_f &= 0,072 \left( \frac{\nu}{U_\infty L} \right)^{1/5} - 1700 \left( \frac{\nu}{U_\infty L} \right) \\ &= 0,072 \left( \frac{1,55 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}}{11 \frac{m}{s} \cdot 3 m} \right)^{1/5} - 1700 \left( \frac{1,55 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}}{11 \frac{m}{s} \cdot 3 m} \right) \\ &= 0,072 \cdot 0,0542 - 1700 \cdot 4,697 \cdot 10^{-7} = 0,0031. \end{aligned}$$

#### Παράδειγμα 7.10

Έστω επίπεδη πλάκα  $2m$  σε μήκος. Αν διαρρέεται από νερό κινηματικού ιξώδους  $\nu = 10^{-6} m^2/s$ , πυκνότητας  $\rho = 1000 kg/m^3$  και ταχύτητας  $U_\infty = 0,15 m/s$  μόνο από την πάνω επιφάνειά του, υπολογίστε τα πάχη  $\delta$ ,  $\delta_1$  και  $\delta_2$ . Αν το πλάτος της πλάκας ισούται με  $1,5m$  υπολογίστε την οπισθέλκουσα δύναμη,  $D$ .

Η μέγιστη τιμή του αριθμού  $Re$  εμφανίζεται για  $x = L$  και ισούται με

$$Re_{x=L} = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{0,15 \frac{m}{s} \cdot 2m}{10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 3 \cdot 10^5 < Re_{\kappa\rho} = 5 \cdot 10^5$$

δίνοντας στρωτό οριακό στρώμα σε όλη την έκταση της πλάκας. Χρησιμοποιώντας τότε τις Εξισώσεις (4.8), (4.9) και (4.13) αντίστοιχα προκύπτει

$$\delta(x=L) = 5 \frac{L}{\sqrt{Re_L}} = 5 \frac{2m}{\sqrt{3 \cdot 10^5}} = 0,0183m,$$

$$\delta_1(x=L) = 1,7208 \frac{L}{\sqrt{Re_L}} = 1,7208 \frac{2m}{\sqrt{3 \cdot 10^5}} = 0,0063m,$$

$$\delta_2(x=L) = 0,664 \frac{L}{\sqrt{Re_L}} = 0,664 \frac{2m}{\sqrt{3 \cdot 10^5}} = 0,0024m.$$

Βλέπουμε επομένως ότι το πάχος του οριακού στρώματος δεν ξεπερνά το 1% του μήκους της πλάκας. Η οπισθέλκουσα δύναμη επίσης υπολογίζεται με χρήση της

Εξίσωσης (4.16) δίνοντας

$$\mathbf{D} = 0,6642 \frac{\rho U_{\infty}^2 b L}{\sqrt{Re_L}} = 0,6642 \frac{1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 0,15^2 \frac{m}{s} \cdot 1,5m \cdot 2m}{\sqrt{3 \cdot 10^5}} = 0,082N.$$



---

## ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

### 5.1 Εισαγωγή

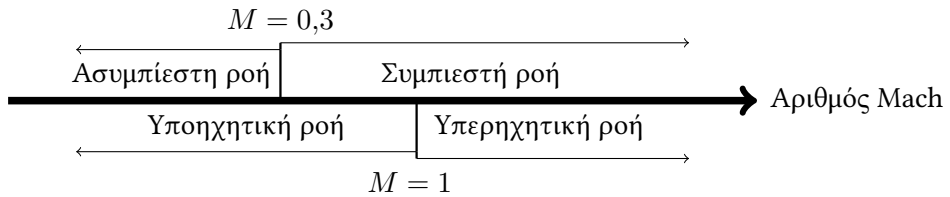
---

Στα προηγούμενα κεφάλαια του βιβλίου αναπτύχθηκαν οι βασικές έννοιες της μηχανικής των ρευστών για ασυμπίεστες ροές. Από το πρώτο όμως κεφάλαιο γνωρίζουμε ότι κανένα ρευστό (και κατ' επέκταση υλικό σώμα) δεν γίνεται να είναι απόλυτα ασυμπίεστο καθώς κάτι τέτοιο θα σήμαινε άπειρη ταχύτητα διάδοσης των διαταραχών στο εσωτερικό του. Επειδή όμως δεν είναι δυνατό μία διαταραχή να διαδίδεται ακαριαία σε ένα σώμα ανεξαρτήτως σύστασης και μεγέθους, είναι σημαντικό να μελετήσουμε και να κατανοήσουμε τις σχέσεις που περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο διαδίδεται μία διαταραχή σε ένα ρευστό. Στο κεφάλαιο λοιπόν αυτό εγκαταλείπουμε τη θεώρηση της ασυμπίεστότητας και εισάγουμε την έννοια της συμπίεστης ροής.

Ο όρος αυτός έχει μεγαλύτερη εφαρμογή στα αέρια αφού αυτά περιγράφονται από μικρότερες τιμές του μέτρου ελαστικότητάς τους, μπορεί όμως εξίσου να εφαρμοστεί και στα υγρά. Αξίζει βέβαια να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι στα υγρά, η ταχύτητα διάδοσης μίας διαταραχής είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ταχύτητα της ροής, σε αντίθεση με τα αέρια στα οποία η ταχύτητα μίας διαταραχής μπορεί να είναι συγκρίσιμη αν όχι μικρότερη αυτής της ροής οδηγώντας σε υπερηχητικές ροές. Η διάκριση μίας ροής σε ασυμπίεση ή συμπίεστη και σε υποηχητική (subsonic) ή υπερηχητική (supersonic) ορίζεται

## 5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

σύμφωνα με την τιμή του αριθμού Mach,<sup>1</sup>  $M$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Μία



Σχήμα 5.1: Διάκριση ροής σύμφωνα με την τιμή του αριθμού Mach.

περισσότερο λεπτομερής διάκριση των ροών με βάση τον αριθμό Mach είναι η ακόλουθη:

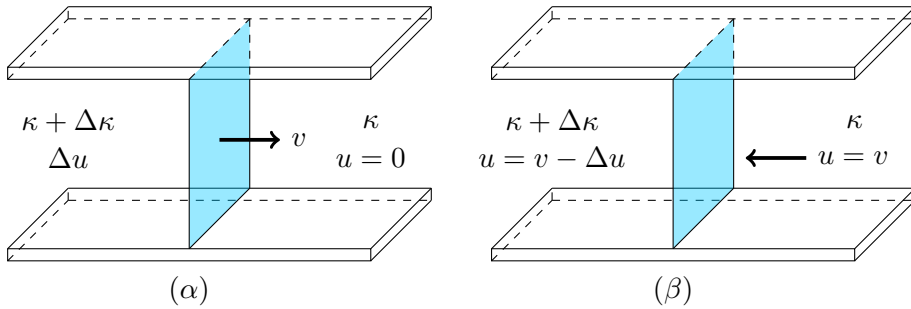
- $M < 0,8 \implies$  υποηχητική ροή (subsonic flow),
- $0,8 \leq M < 1,2 \implies$  διηχητική ροή (transonic flow),
- $1,2 < M \leq 5 \implies$  υπερηχητική ροή (supersonic flow),
- $M > 5 \implies$  υπερυπερηχητική ροή (hypersonic flow).

Σημειώνεται ότι ροές που χαρακτηρίζονται από  $M > 0,3$  θεωρούνται συμπίεστες αναδεικνύοντας την ανάγκη μελέτης και κατανόησης τέτοιων ροών στη μηχανική των ρευστών.

## 5.2 Ταχύτητα του ήχου

Έστω αγωγός ο οποίος περιέχει αέριο πίεσης,  $p$ , θερμοκρασίας,  $T$ , και πυκνότητας,  $\rho$ , σε ηρεμία. Κάποια χρονική στιγμή παράγεται στο εσωτερικό του αγωγού μία ασθενής διαταραχή μέσω μιας διάταξης (όπως ένα έμβολο) η οποία μεταδίδεται από αριστερά προς τα δεξιά με ταχύτητα,  $v$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2 (α). Η διάδοση της διαταραχής προκαλεί μεταβολή στην ταχύτητα του ρευστού κατά  $\Delta u$  αριστερά της διαταραχής, παραμένοντας όμως το ρευστό σε ηρεμία δεξιά αυτής. Αν συμβολίσουμε με  $\kappa$  τα ρευστομηχανικά μεγέθη που περιγράφουν τη ροή (πίεση, θερμοκρασία, πυκνότητα, ταχύτητα), η διάδοση της διαταραχής στο ρευστό οδηγεί σε μεταβολή των μεγεθών αυτών σε  $\kappa + \Delta\kappa$ . Για να είμαστε όμως σε θέση να μελετήσουμε το φαινόμενο αυτό θα

<sup>1</sup> Ο Ernst Mach, 1836-1916, ήταν Αυστριακός φυσικός και φιλόσοφος με πολύ σημαντική συνεισφορά στην κατανόηση των κρουστικών κυμάτων και του φαινομένου Doppler μεταξύ άλλων.



Σχήμα 5.2: Διάδοση διαταραχής σε συμπιεστό ρευστό. Σύστημα αναφοράς ως προς το ακίνητο ρευστό (αριστερά) και κινούμενο με τη διαταραχή (δεξιά).

πρέπει να μετατρέψουμε την παραπάνω μη μόνιμη ροή σε μόνιμη. Κάτι τέτοιο είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί μεταβαίνοντας από το σύστημα αναφοράς του ακίνητου ρευστού όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2 (α) σε εκείνο της ακίνητης διαταραχής του Σχήματος 5.2 (β), μέσω των γνωστών μετασχηματισμών του Γαλιλαίου. Ένας παρατηρητής τότε που "ταξιδεύει" με τη διαταραχή, καταγράφει το ρευστό να κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση με την ίδια ταχύτητα  $v$ . Ορίζοντας στη συνέχεια τον όγκο ελέγχου ως προς το ακίνητο επίπεδο της διαταραχής στο Σχήμα 5.2 (β) και εφαρμόζοντας την διατήρηση της μάζας διαμέσω αυτού προκύπτει ότι

$$(\rho + \Delta\rho) (v - \Delta u) A = \rho v A,$$

όπου  $A$  το εμβαδό της διατομής του αγωγού. Βλέπουμε δηλαδή ότι η διάδοση της διαταραχής μεταβάλλει την ταχύτητα του ρευστού κατά

$$\Delta u = v \frac{\Delta\rho}{\rho + \Delta\rho}. \quad (5.1)$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα είναι φανερό ότι για ασυμπίεστα ρευστά, η διάδοση της διαταραχής οδηγεί το ρευστό να συμπεριφερθεί ως στερεό σώμα μετατοπίζοντας όλα τα ροϊκά στοιχεία του την ίδια χρονική στιγμή.

Θεωρώντας επιπλέον ότι η συνισταμένη δύναμη κάθετα στη διεύθυνση της διαταραχής ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ορμής εισόδου και εξόδου από αυτήν προκύπτει

$$(p + \Delta p) A - p A = \rho v^2 A - (\rho + \Delta\rho) (v - \Delta u)^2 A$$

και αμελώντας μεταβολές δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης

$$\Delta p = 2\rho v \Delta u - v^2 \Delta\rho. \quad (5.2)$$

## 5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια την Εξίσωση (5.1) στην Εξίσωση (5.2) προκύπτει ότι η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής,  $v$ , ισούται με

$$v^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \left( 1 + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right).$$

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία η διαταραχή δημιουργεί απειροστές μεταβολές στα ρευστομηχανικά μεγέθη,  $\Delta \rho / \rho \rightarrow d\rho / \rho \rightarrow 0$ , δημιουργώντας ένα ηχητικό κύμα ταχύτητας

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}},$$

γνωστή ως *ταχύτητα του ήχου*. Επειδή οι μεταβολές αυτές είναι πολύ μικρές, υποθέτουμε ότι το αέριο υπόκειται σε αντιστρεπτή μεταβολή καθώς αλληλεπιδρά με τη διαταραχή. Θεωρώντας επιπλέον ότι η μεταφορά θερμότητας είναι αμελητέα, μπορούμε με ασφάλεια να υποθέσουμε ότι η συνολική διαδικασία αντιστοιχεί σε ισεντροπική μεταβολή, δίνοντας τον ακόλουθο ισοδύναμο ορισμό για την ταχύτητα του ήχου

$$c = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s}. \quad (5.3)$$

Για ιδανικά αέρια όμως που υπόκεινται σε ισεντροπικές μεταβολές γνωρίζουμε ότι

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{σταθερό} \implies \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma RT, \quad (5.4)$$

χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση των αερίων. Το μέγεθος  $R$  εκφράζει την παγκόσμια σταθερά των αερίων και ο συντελεστής  $\gamma$  τον λόγο της ειδικής θερμοχωρητικότητας υπό σταθερή πίεση,  $c_p$ , προς την ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο,  $c_v$ , δηλαδή

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα (5.4) στην Εξίσωση (5.3) προκύπτει ότι η ταχύτητα του ήχου για την περίπτωση των ιδανικών αερίων γράφεται

$$c = \sqrt{\gamma RT}. \quad (5.5)$$

Μία ενδιαφέρουσα παρατήρηση τέλος προκύπτει αν εκφράσουμε την ταχύτητα του ήχου συναρτήσει του μέτρου ελαστικότητας,  $E$ . Χρησιμοποιώντας

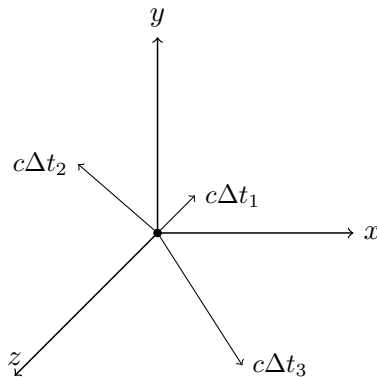
τις Εξισώσεις (5.3) και (5.3) προκύπτει ότι

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Ένα ρευστό επομένως που χαρακτηρίζεται από απόλυτη ασυμπίεστοτητα αντιστοιχεί σε άπειρη ταχύτητα διάδοσης μίας διαταραχής στο εσωτερικό του. Κάτι τέτοιο όμως είναι αδύνατο, καθώς καμία φυσική διεργασία δεν μπορεί να μεταδίδεται με ταχύτητα μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός στο κενό. Όλα επομένως τα υλικά είναι εν μέρει συμπίεστα και είναι αδύνατο να δημιουργήσουμε ένα υλικό του οποίου ο όγκος δεν θα μεταβάλλεται καθόλου για οποιαδήποτε μεταβολή πίεσης που ασκείται σε αυτό.

### 5.3 Γραμμές Mach και κώνος Mach

Έστω διαταραχή από ακίνητη πηγή όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3. Αν η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής ισούται με  $c$ , τα μέτωπα της θα σχηματίζουν ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας  $c\Delta t_i$  για κάθε χρονική στιγμή,  $t_i$ . Η σφαιρική συμμετρία που αναπτύσσεται στην περίπτωση αυτή ισχύει μόνο για διάδοση σε ισοθερμοκρασιακό πεδίο, καθώς σύμφωνα με την Εξίσωση (5.5) μεταβολή στη θερμοκρασία οδηγεί σε μεταβολή της ταχύτητας διάδοσης της διαταραχής.



Σχήμα 5.3: Μετάδοση μετώπου διαταραχής ταχύτητας  $c$  ακίνητης πηγής σε διάφορες χρονικές στιγμές  $\Delta t_1 < \Delta t_2 < \Delta t_3$ .

Τί γίνεται όμως στην περίπτωση που η σημειακή πηγή κινείται σε ακίνητο αέριο ή ισοδύναμα όταν ένα αέριο ρέει καθώς διέρχεται από μία ακίνητη ση-

μειακή πηγή; στην περίπτωση που η πηγή κινείται με ταχύτητα μικρότερη της ταχύτητας του ήχου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4 (α), παρατηρείται συμπύκνωση των κυματικών μετώπων κατά τη κατεύθυνση μετάδοσης της πηγής και αραιώση κατά την αντίθετη κατεύθυνση. Ανεξαρτήτως όμως του μέτρου της ταχύτητας αυτής, οι σφαιρικές επιφάνειες παραμένουν πάντα η μία μέσα στην άλλη ορίζοντας την υποηχητική ροή. Στο όριο όπου  $U = c$ , τα κύματα πίεσης<sup>2</sup> εφάπτονται σε ένα επίπεδο κάθετο στη ροή που διέρχεται από την κινούμενη πηγή. Τα μέτωπα του κύματος δηλαδή δεν προηγούνται της κινούμενης πηγής, η ροή γίνεται ηχητική και ένας παρατηρητής που βρέσκεται ακριβώς μπροστά από την πηγή δεν θα την ανιχνεύσει μέχρι να φτάσει σε αυτόν. Όταν η ταχύτητα της πηγής υπερβεί την ταχύτητα του ήχου (Σχήμα 5.4 (β)), η ροή γίνεται υπερηχητική και τα μέτωπα του κύματος σχηματίζουν τις λεγόμενες γραμμές Mach (Mach lines) όπως φαίνεται από τις αξονικές ευθείες μονής τελείας του σχήματος. Οι γραμμές αυτές με τη σειρά τους σχηματίζουν με τον άξονα  $x$  την γωνία Mach (Mach angle),  $\alpha$ , σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση

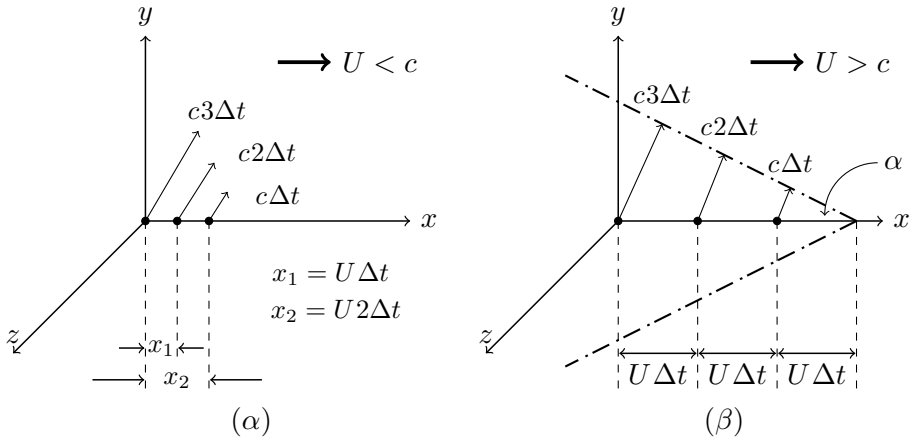
$$\eta\mu\alpha = \frac{3\Delta tc}{3\Delta tU} = \frac{c}{U} = \frac{1}{M}, \quad (5.6)$$

δίνοντας ότι αυτή ισούται με το αντίστροφο ημίτονο του αντίστροφου αριθμού Mach

$$\alpha = \eta\mu^{-1} \left( \frac{1}{M} \right).$$

Άπειρες τέλος γραμμές Mach στις τρεις διαστάσεις σχηματίζουν ένα κώνο με την στιγμιαία θέση της πηγής να ορίζει την κορυφή του γνωστός ως κώνος Mach (Mach cone). Μία άμεση συνέπεια των υπερηχητικών ροών είναι ότι η σημειακή πηγή δεν μπορεί να ακουστεί εξωτερικά του κώνου Mach, καθώς τα κύματα πίεσης δεν προλαβαίνουν να διαδοθούν εκτός των γραμμών Mach. Η περιοχή αυτή ονομάζεται ζώνη σιωπής (zone of silence). Αντιθέτως, εσωτερικά του κώνου η διαταραχή έχει προφανώς διαδοθεί, γίνεται αντιληπτή από έναν παρατηρητή μέσα σε αυτόν και ονομάζεται ζώνη δράσης (zone of action). Ένα αεροπλάνο δηλαδή που κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη της ταχύτητας του ήχου δεν θα γίνει ηχητικά αντιληπτό από έναν παρατηρητή στην επιφάνεια, μέχρι το αεροπλάνο να τον έχει προσπεράσει και ο κώνος Mach να επεκταθεί στην περιοχή του παρατηρητή δημιουργώντας το "ηχητικό μπαμ" (sonic boom).

<sup>2</sup> Οι έννοιες μέτωπο κύματος και κύμα πίεσης είναι ισοδύναμες και χρησιμοποιούνται εναλλακτικά.



Σχήμα 5.4: Ηχητικό πεδίο από κινούμενη σημειακή πηγή: (α) ταχύτητα πηγής μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου και (β) ταχύτητα πηγής μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ήχου, σχηματίζοντας έναν κώνο Mach από άπειρες γραμμές Mach (αξονικές γραμμές μονής τελείας).

## 5.4 Φαινόμενο Doppler

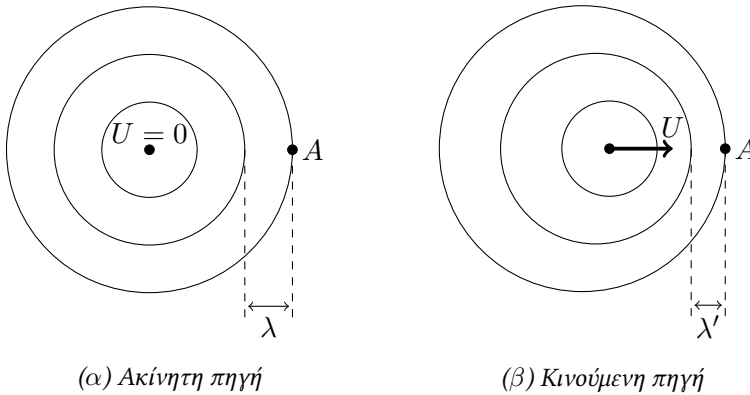
Η συμπύκνωση των κυματικών μετώπων κατά τη κατεύθυνση μετάδοσης της πηγής που αναφέρθηκε παραπάνω οδηγεί σε μεταβολή της συχνότητας τους όπως την αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής σε σχετική κίνηση με αυτήν. Από την κυματική θεωρία γνωρίζουμε ότι το μήκος,  $\lambda$ , και η συχνότητα,  $f$ , ενός κύματος συνδέονται με την απλή σχέση<sup>3</sup>

$$c = \lambda f,$$

όπου  $c$  η ταχύτητα διάδοσης του εκπεμπόμενου κύματος. Στην περίπτωση όμως που η πηγή κινείται ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή  $A$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.5, τα εκπεμπόμενα κύματα χαρακτηρίζονται από μικρότερο μήκος κύματος από αυτό που θα παρατηρούσε ο παρατηρητής αν η πηγή ήταν ακίνητη. Η μεταβολή αυτή μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά αν ορίσουμε ως χρόνο  $\tau$  τον

<sup>3</sup> Ορίζουμε σαν μήκος κύματος την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μέγιστων (κορυφών) ή ελάχιστων (κοιλιάδων) ενός κύματος. Ο δε ρυθμός της επαναληψιμότητας ενός κύματος στη μονάδα του χρόνου αποτελεί τη συχνότητα του κύματος. Προφανώς τα δύο αυτά μεγέθη είναι αντιστρόφως ανάλογα, καθώς μικρό μήκος κύματος σημαίνει μεγαλύτερη επαναληψιμότητα της διαταραχής στη μονάδα του χρόνου και επομένως υψηλότερη συχνότητα.

5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ



Σχήμα 5.5: Μέτωπα κύματος από ακίνητη (α) και κινούμενη σημειακή πηγή (β) ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή A.

χρόνο που απαιτείται για την εκπομπή δύο διαδοχικών κυμάτων. Δύο διαφορετικά φαινόμενα λαμβάνουν τότε χώρα ταυτόχρονα στο χρονικό αυτό διάστημα. Αφενός το αμέσως προηγούμενο μέτωπο κύματος θα έχει κινηθεί προς τα δεξιά απόσταση ίση με  $\lambda$  και αφετέρου η πηγή θα έχει επίσης μετατοπιστεί προς την ίδια κατεύθυνση κατά ένα διάστημα ίσο με  $U\tau$ . Η πραγματική δηλαδή απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μετώπων κύματος  $\lambda'$  θα ισούται με

$$\lambda' = \lambda - U\tau.$$

Η συχνότητα επομένως που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής,  $f'$ , περιγράφεται από τη σχέση

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda - U\tau}.$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους της παραπάνω εξίσωσης προκύπτει

$$f' = \left(\frac{c}{\lambda}\right) \frac{1}{1 - U \frac{1}{\lambda f}} \implies f' = f \left(\frac{c}{c - U}\right). \quad (5.7)$$

Στην οριακή περίπτωση που  $U \rightarrow c$  έχουμε ότι  $f' \rightarrow \infty$  περιγράφοντας ουσιαστικά εφραπτόμενα μέτωπα κύματος όπως ακριβώς συμβαίνει στην περίπτωση του κύματος Mach που αναφέρθηκε προηγουμένως. Κατά εντελώς ανάλογο τρόπο, όταν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή,  $\lambda' = \lambda + U\tau$ , δίνοντας

$$f' = f \left(\frac{c}{c + U}\right). \quad (5.8)$$

Η παρατηρούμενη αυτή μεταβολή στη συχνότητα του ήχου που εκπέμπεται από μία κινούμενη πηγή ως προς έναν παρατηρητή ονομάζεται *φαινόμενο Doppler* (Doppler effect). Συνδυάζοντας στη συνέχεια τις Εξισώσεις (5.6), (5.7) και (5.8) προκύπτει η ακόλουθη ισοδύναμη σχέση

$$f' = f \left( \frac{c}{c \pm U} \right) = f \left( \frac{1}{1 \pm \frac{U}{c}} \right) = f \left( \frac{1}{1 \pm M} \right), \quad (5.9)$$

αναγάγοντας τον αριθμό Mach σε μία πολύ σημαντική ποσότητα για την περιγραφή της κυματικής διάδοσης στα ρευστά. Προκύπτει επομένως ότι η συχνότητα αυξάνεται όταν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή και αντίστοιχα μειώνεται όταν απομακρύνεται από αυτόν. Στην περίπτωση τέλος που εκτός από την πηγή κινείται και ο παρατηρητής με σταθερή ταχύτητα,  $U'$ , η Εξίσωση (5.9) παίρνει τη μορφή

$$f' = f \left( \frac{c \mp U'}{c \pm U} \right), \quad (5.10)$$

όπου η ποσότητα  $U'$  προστίθεται στον αριθμητή όταν ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή και αφαιρείται όταν απομακρύνεται από αυτή.

## 5.5 Ισεντροπική ροή ιδανικού αερίου

### 5.5.1 Επίδραση διατομής αγωγού

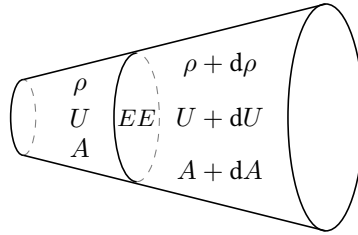
Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την αδιαβατική και αντιστρεπτή (δηλαδή ισεντροπική) ροή ενός ιδανικού αερίου διαμέσω αγωγού μεταβλητής διατομής. Παρόλο που τα πραγματικά αέρια αναπτύσσουν απώλειες κατά τη ροή τους και ως εκ τούτου υπόκεινται σε μη αντιστρεπτές μεταβολές, είναι δυνατό να προσεγγιστούν ως σχεδόν ισεντροπικές υπό κατάλληλες συνθήκες. Έστω λοιπόν μόνιμη και μονοδιάστατη<sup>4</sup> ροή αερίου που ρέει σε αγωγό μεταβλητής διατομής. Από την Εξίσωση (1.2) γνωρίζουμε ότι η παροχή μάζας

$$\dot{m} = \rho U A,$$

είναι σταθερή κατά μήκος του αγωγού. Σύμφωνα με το Σχήμα 5.6 μπορούμε τότε

<sup>4</sup> Στην πραγματικότητα μία τέτοια ροή θεωρείται "ημί-μονοδιάστατη" καθώς τα ρευστομηχανικά μεγέθη που περιγράφουν τη ροή είναι ομοιόμορφα σε κάθε σημείο του πεδίου αλλά η διατομή του αγωγού μεταβάλλεται.

## 5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ



Σχήμα 5.6: Ισεντροπική ροή αερίου σε αγωγό μεταβλητής διατομής και ισοζύγιο μάζας διαμέσω της επιφάνειας ελέγχου,  $EE$ .

να γράψουμε ότι

$$\rho U A = (\rho + d\rho) (U + dU) (A + dA).$$

Αμελώντας διαφορικά μεγαλύτερης τάξης, το παραπάνω αποτέλεσμα δέχεται την ισοδύναμη έκφραση

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dU}{U} + \frac{dA}{A} = 0. \quad (5.11)$$

Η επίδραση της πυκνότητας γίνεται πλέον προφανής καθώς σε μία συμπίεστη ροή συνεισφέρει ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως η ταχύτητα και η διατομή. Η συνεισφορά αυτή μπορεί να εκφραστεί με έναν ισοδύναμο τρόπο θεωρώντας τη μη συνεκτική και μόνιμη ροή ενός ροϊκού στοιχείου σύμφωνα με την Ενότητα 1.4.2. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Newton κατά μήκος μίας γραμμής ροής αποδείχτηκε ότι

$$\frac{1}{2} \rho dU^2 + dp + \rho g dz = 0.$$

Θεωρώντας στη συνέχεια ότι η μεταβολή στη δυναμική ενέργεια είναι αμελητέα σε σχέση με τους υπόλοιπους όρους

$$\frac{dU}{U} = -\frac{dp}{\rho U^2} = -\frac{c^2}{U^2} \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{M^2} \frac{d\rho}{\rho}, \quad (5.12)$$

χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (5.3) για την ταχύτητα του ήχου σε ισεντροπική μεταβολή αερίου. Συνδυάζοντας στη συνέχεια τις Εξισώσεις (5.11) και (5.12) προκύπτει ότι

$$\frac{dU}{dA} = \frac{U}{A} \left( \frac{1}{M^2} - 1 \right). \quad (5.13)$$

Ανάλογα με το είδος της ροής διακρίνουμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

1) *Υποηχητική ροή*: στην περίπτωση αυτή το δεξιό μέλος της Εξίσωσης (5.13) είναι αρνητικό δίνοντας  $dU/dA < 0$ . Συγκλίνοντες αγωγοί επομένως οδηγούν τη ροή σε επιτάχυνση ενώ αποκλίνοντες αγωγοί σε επιβράδυνση, δίνοντας τη γνωστή συσχέτιση μεταξύ ταχύτητας όπως αυτή διατυπώθηκε για ασυμπίεστα ρευστά.

2) *Υπερηχητική ροή*: στην περίπτωση αυτή  $M > 1$  και από την Εξίσωση (5.13) έχουμε ότι  $dU/dA > 0$ . Το αποτέλεσμα αυτό οδηγεί στο φαινομενικά παράδοξο συμπέρασμα ότι η ταχύτητα μίας υπερηχητικής ροής στην μικρότερη διατομή του αγωγού θα είναι η ελάχιστη δυνατή. Επίσης, ένας αποκλίνον αγωγός θα επιταχύνει τη ροή προκαλώντας την αντίθετη ροϊκή συμπεριφορά από αυτήν που παρατηρείται για ασυμπίεστη και υποηχητική ροή.

3) *Ηχητική ροή*: στην περίπτωση όπου  $M = 1$  σε κάποια θέση  $x_0$  στον αγωγό, το δεξιό μέλος της Εξίσωσης (5.13) απειρίζεται δίνοντας

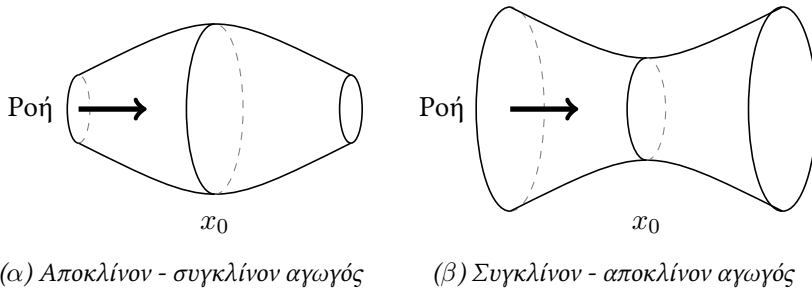
$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_0} \rightarrow \infty.$$

Επειδή προφανώς το παραπάνω αποτέλεσμα δεν έχει φυσική σημασία θα πρέπει αναγκαστικά να ισχύει επίσης ότι

$$\left. \frac{dA}{dx} \right|_{x_0} = 0.$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι ηχητική ροή λαμβάνει χώρα σε περιοχές του αγωγού που παρουσιάζουν ακρότατο στο εμβαδό διατομής. Στο Σχήμα 5.7 παρουσιάζονται οι δύο πιθανές περιπτώσεις αγωγών μεταβλητής διατομής. Σε ένα αποκλίνοντα - συγκλίνοντα αγωγό όπως στο Σχήμα 5.7α, αν η ροή στην είσοδο ήταν υποηχητική θα οδηγούσε σε ελάττωση της ταχύτητας καθιστώντας το ηχητικό όριο μη πραγματοποιησιμο. Αν επίσης η ροή στην είσοδο ήταν υπερηχητική, ο αποκλίνον αγωγός θα επιτάχυνε τη ροή καθιστώντας ξανά το ηχητικό όριο αδύνατο. Βλέπουμε δηλαδή ότι δεν είναι δυνατό ο αριθμός Mach να γίνει ίσος με τη μονάδα σε ένα τοπικό μέγιστο μίας επιφάνειας. Στην περίπτωση που το αέριο διέρχεται από ένα συγκλίνοντα - αποκλίνοντα αγωγό όπως στο Σχήμα 5.7β, το όριο  $M = 1$  είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί και για τα δύο είδη ροών εισόδου. Πιο συγκεκριμένα, για υποηχητική ροή στην είσοδο το συγκλίνον τμήμα του αγωγού θα επιταχύνει τη ροή, ενώ για υπερηχητική ροή στην είσοδο το συγκλίνον τμήμα θα την επιβραδύνει. Είναι επομένως προφανές ότι το ηχητικό

## 5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ



Σχήμα 5.7: Επίτευξη ηχητικής ροής σε δύο διαφορετικούς τύπους αγωγών.

όριο είναι δυνατό να λάβει χώρα μόνο στο τοπικό ελάχιστο της διατομής ενός συγκλίνοντα - αποκλίνοντα αγωγού. Η διατομή αυτή ονομάζεται *κρίσιμη διατομή* και η ροή στην κρίσιμη διατομή είναι *στραγγαλισμένη* (choked flow). Τα δε αντίστοιχα μεγέθη που την περιγράφουν ονομάζονται *κρίσιμα ρευστομηχανικά μεγέθη* και συμβολίζονται με έναν αστερίσκο σαν άνω δείκτης, δηλαδή  $p^*$ ,  $\rho^*$ ,  $T^*$  και  $A^*$  όταν  $M = 1$ .

### 5.5.2 Μεγέθη ανακοπής και ο αριθμός Mach

Για την περιγραφή δυναμικών συστημάτων είναι πολλές φορές απαραίτητη η μελέτη καταστάσεων ή σημείων ισορροπίας. Οι καταστάσεις αυτές ορίζονται ως εκείνα τα σημεία για τα οποία  $u = v = w = 0$  και στη ρευστομηχανική ονομάζονται *σημεία ανακοπής* (stagnation points). Κατά εντελώς ανάλογο τρόπο με προηγούμενως, τα ρευστομηχανικά μεγέθη στα σημεία ανακοπής ονομάζονται *μεγέθη ανακοπής* (ή *ολικά μεγέθη*) και η τιμή τους ισούται με εκείνη την τιμή που αποκτάει το εκάστοτε μέγεθος καθώς το ρευστό φέρεται σε ηρεμία μέσω μίας ισεντροπικής διεργασίας στο αντίστοιχο σημείο ανακοπής. Στις επόμενες ενότητες θα μελετηθούν μερικά από τα βασικότερα ρευστομηχανικά και θερμοδυναμικά μεγέθη ανακοπής.

#### 5.5.2.1 Ενθαλπία ανακοπής

Στην Ενότητα 1.5.2.1 όπου αναλύθηκε η μόνιμη ροή σε ένα σταθερό όγκο ελέγχου, αποδείχτηκε ότι όταν ένα ρευστό υπόκειται σε μία μεταβολή από μία θερμοδυναμική κατάσταση 1 σε μία κατάσταση 2 ικανοποιείται η Εξίσωση (1.94), δηλαδή

$$\dot{Q}_κ - \dot{W}_α = \dot{m} \left[ \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + (h_2 - h_1) \right].$$

Αν η μεταβολή αυτή λάβει χώρα αδιαβατικά (απουσία δηλαδή συναλλαγής θερμότητας) και χωρίς παραγωγή ή κατανάλωση έργου το παραπάνω αποτέλεσμα γράφεται

$$\frac{U_1^2}{2} + h_1 = \frac{U_2^2}{2} + h_2,$$

αγνοώντας τους όρους της δυναμικής ενέργειας. Μία άμεση συνέπεια του αποτελέσματος αυτού είναι ότι κατά μήκος μίας γραμμής ροής στην οποία ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις, η ποσότητα  $U^2/2 + h$  παραμένει σταθερή και ίση με την ενθαλπία που αντιστοιχεί στο σημείο ανακοπής της ροής,  $h_0$ , δίνοντας

$$h_0 = h + \frac{U^2}{2}.$$

Επειδή η ενθαλπία  $h_0$  αντιστοιχεί στο σημείο ανακοπής, ονομάζεται *ενθαλπία ανακοπής* (stagnation enthalpy) ή *ολική ενθαλπία* (total enthalpy).

### 5.5.2.2 Θερμοκρασία ανακοπής

Κατά εντελώς αναλόγο τρόπο στην περίπτωση ιδανικού αερίου με σταθερή ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση,  $c_p$ , ισχύει

$$h = c_p T,$$

δίνοντας

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{U^2}{2} \implies T_0 = T + \frac{U^2}{2c_p}. \quad (5.14)$$

Η θερμοκρασία  $T_0$  ονομάζεται *θερμοκρασία ανακοπής* (stagnation temperature) ή *ολική θερμοκρασία* (total temperature) και μπορεί να εκφραστεί ως προς τον αριθμό Mach με τη βοήθεια των γνωστών σχέσεων

$$c_p - c_v = R \quad \text{και} \quad c_p = \gamma c_v,$$

από όπου προκύπτει ότι

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R. \quad (5.15)$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα (5.15) στην Εξίσωση (5.14)

$$T_0 = T \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma R} U^2 \right) \implies \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2, \quad (5.16)$$

όπου  $c$  η ταχύτητα του ήχου σύμφωνα με τη σχέση (5.5). Είναι προφανές επομένως ότι η θερμοκρασία ανακοπής,  $T_0$ , είναι μεγαλύτερη της στατικής θερμοκρασίας,  $T$ , και εξαρτάται από τον αριθμό Mach του ρέοντος ρευστού.

## 5.5.2.3 Πίεση ανακοπής

Σε περίπτωση που η ροή είναι ισεντροπική αποδεικνύεται (βλέπε λυμένα παραδείγματα) ότι η πίεση και η θερμοκρασία του ρευστού ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση

$$\frac{p^{\gamma-1}}{T^\gamma} = \text{σταθερό.}$$

Για την *πίεση ανακοπής* (stagnation pressure) ή *ολική πίεση* (total pressure),  $p_0$ , τότε θα ισχύει ότι

$$\frac{p_0^{\gamma-1}}{T_0^\gamma} = \frac{p^{\gamma-1}}{T^\gamma} \implies p_0 = p \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\gamma/(\gamma-1)},$$

η οποία με τη βοήθεια της Εξίσωσης (5.16) δέχεται την τελική μορφή

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (5.17)$$

## 5.5.2.4 Πυκνότητα ανακοπής

Ακολουθώντας παρόμοιο συλλογισμό με αυτόν που ακολουθήθηκε προηγουμένως και λαμβάνοντας υπόψη ότι για ισεντροπική μεταβολή η πίεση και η πυκνότητα εξαρτώνται από τη σχέση

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{σταθερό,}$$

προκύπτει ότι για την *πυκνότητα ανακοπής* (stagnation density) ή *ολική πυκνότητα* (total density),  $\rho_0$ ,

$$\rho_0 = \rho \left( \frac{p_0}{p} \right)^{1/\gamma} \implies \frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (5.18)$$

Από τις Εξισώσεις (5.17) και (5.18) παρατηρούμε ότι τόσο η πίεση ανακοπής όσο και η πυκνότητα ανακοπής λαμβάνουν μεγαλύτερες τιμές από τα αντίστοιχα στατικά τους μεγέθη. Επίσης, τόσο η θερμοκρασία όσο και η πίεση ελαττώνονται με αύξηση του αριθμού Mach σε μία ισεντροπική ροή. Είναι επομένως δυνατόν να δημιουργηθεί ροή στον αγωγό του Σχήματος 5.7β με εφαρμογή διαφοράς πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου αυτού. Αν η διαφορά πίεσης είναι μικρή, η ροή θα επιταχυνθεί στο συγκλίνον τμήμα του χωρίς να διέλθει από το ηχητικό όριο στο "λαιμό" και στη συνέχεια θα επιβραδυνθεί στο

αποκλίνουν τμήμα. Μεταβάλλοντας όμως κατάλληλα τις αρχικές συνθήκες της ροής, είναι δυνατό το ρευστό να επιταχυνθεί στο συγκλινόν τμήμα αρκετά, έτσι ώστε αφού αναπτυχθεί διηχητική ροή στο "λαιμό" να συνεχίσει να επιταχύνεται στο αποκλινόν τμήμα δίνοντας υπερηχητική ροή σε αυτό. Η πιο γνωστή εφαρμογή μίας τέτοιας ροής αποτελεί το *ακροφύσιο de Laval* που εξετάζεται παρακάτω.

### 5.5.3 Μεγέθη ανακοπής και κρίσιμα μεγέθη

Μία σύγκυση που συχνά δημιουργείται λαμβάνει χώρα στη διάκριση μεταξύ των μεγεθών ανακοπής και των κρίσιμων μεγεθών. Με απλή επισκόπηση όμως των Εξισώσεων (5.16), (5.17) και (5.18) προκύπτει ότι για  $M = 1$  οι δύο αυτές κατηγορίες συνδέονται σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2}, \quad \frac{p_0}{p^*} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (5.19)$$

Στην ειδική επίσης περίπτωση που το ρευστό είναι αέρας ( $\gamma = 1,4$ ) έχουμε ότι

$$\frac{T_0}{T^*} = 1,2, \quad \frac{p_0}{p^*} = 1,893, \quad \frac{\rho_0}{\rho^*} = 1,577.$$

Είναι επομένως ξεκάθαρο από τις Εξισώσεις (5.19) ότι οι δύο αυτές κατηγορίες μεγεθών θα ήταν ίσες μόνο αν  $\gamma = 1$ , το οποίο προφανώς δε μπορεί να ισχύει καθώς τότε  $c_p = c_v \rightarrow R = 0$ , δίνοντας μηδενική τιμή για την παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων. Επιπλέον, οι εκθέτες θα απειρίζονταν αφού θα μηδενίζονταν ο παρανομαστής τους, καθιστώντας τις εξισώσεις αυτές μη εφαρμόσιμες.

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τη γνωστή έκφραση για την παροχή μάζας

$$\dot{m} = \rho U A,$$

είναι δυνατό να γράψουμε το κρίσιμο εμβαδό διατομής,  $A^*$ , συναρτήσει του εμβαδού σε μία τυχαία διατομή,  $A$ , ως εξής. Θεωρώντας το αέριο ως ιδανικό και χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (5.5) έχουμε

$$\dot{m} = \frac{p}{RT} M \sqrt{\gamma RT} A = \frac{p}{\sqrt{T}} M A \sqrt{\frac{\gamma}{R}}.$$

## 5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

Αντικαθιστώντας τις αντίστοιχες εκφράσεις για την πίεση και τη θερμοκρασία,

$$\begin{aligned}\dot{m} &= MA\sqrt{\frac{\gamma}{R}}\frac{p}{\sqrt{T}} = MA\sqrt{\frac{\gamma}{R}}\frac{p_0\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}}{\sqrt{T_0}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1/2}} \\ &= MAp_0\sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{(\gamma+1)/[2(1-\gamma)]}.\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για κάθε σημείο της ροής, επομένως και για την περιοχή της κρίσιμης διατομής που αντιστοιχεί στην κρίσιμη παροχή μάζας. Θέτοντας λοιπόν  $A = A^*$  και  $M = 1$  προκύπτει

$$\dot{m}^* = A^*p_0\sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(\gamma+1)/[2(1-\gamma)]}.\quad (5.20)$$

Επειδή όμως η παροχή μάζας είναι σταθερή σε όλες τις διατομές, ισχύει ότι  $\dot{m} = \dot{m}^*$  και εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των παραπάνω δύο εξισώσεων βρίσκουμε

$$MA\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{(\gamma+1)/[2(1-\gamma)]} = A^*\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(\gamma+1)/[2(1-\gamma)]}$$

ή ισοδύναμα

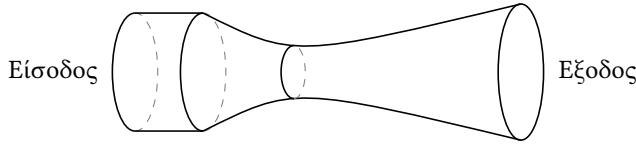
$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2 + (\gamma-1)M^2}{\gamma+1}\right]^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]}.\quad (5.21)$$

### 5.5.4 Ακροφύσιο de Laval

Το ακροφύσιο de Laval (de Laval nozzle) είναι ένας αγωγός μεταβλητής διατομής (συγκλίνον - αποκλίνον) που σκοπό έχει τη δημιουργία υπερηχητικής ροής κατά την εκτόνωση ενός αερίου στο αποκλίνον τμήμα του όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.8. Η ροή αναπτύσσεται λόγω της κλίσης πίεσης που δημιουργείται στο ακροφύσιο και η κατασκευή του γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να έχει μόνο ένα ελάχιστο διατομής σε ολόκληρη την έκτασή του που αποτελεί και τον "λαιμό" του ακροφυσίου. Ένα ακροφύσιο de Laval επομένως αποτελείται από τρία τμήματα, την είσοδο (συγκλίνον τμήμα - υποηχητική ροή), το "λαιμό" (ελάχιστη διατομή - ηχητική ροή) και την έξοδο (αποκλίνον τμήμα - υπερηχητική ροή).

Στο υπόλοιπο της ενότητας αυτής θα υπολογίσουμε την ταχύτητα εξόδου των καυσαερίων συναρτήσει των τιμών των ρευστομηχανικών μεγεθών στο

## 5.5 Ισεντροπική ροή ιδανικού αερίου



Σχήμα 5.8: Υπερηχητική ροή μέσω ακροφυσίου de Laval.

”λαιμό” και στην έξοδο του ακροφυσίου. Θεωρώντας σταθερή παροχή μάζας

$$\dot{m}^* = \dot{m}_\epsilon \implies \rho^* c A^* = \rho_\epsilon U_\epsilon A_\epsilon \implies \frac{U_\epsilon}{c} = \frac{A^* \rho^*}{A_\epsilon \rho_\epsilon},$$

όπου ο δείκτης  $\epsilon$  δηλώνει την έξοδο του ακροφυσίου και  $U^* = c$ . Αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις (5.18) και (5.21) στο παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει

$$\frac{U_\epsilon}{c} = M_\epsilon \left[ \frac{2 + (\gamma - 1) M_\epsilon^2}{\gamma + 1} \right]^{-(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1) M_\epsilon^2}{\gamma + 1} \right]^{1/(\gamma-1)},$$

καθώς ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\rho^*}{\rho_\epsilon} &= \frac{\rho^* \rho_0}{\rho_0 \rho_\epsilon} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/(\gamma-1)} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\epsilon^2 \right)^{1/(\gamma-1)} \\ &= \left[ \frac{2 + (\gamma - 1) M_\epsilon^2}{\gamma + 1} \right]^{1/(\gamma-1)}. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τους εκθέτες τότε βρίσκουμε

$$\frac{U_\epsilon}{c} = M_\epsilon \left[ \frac{2 + (\gamma - 1) M_\epsilon^2}{\gamma + 1} \right]^{-1/2}. \quad (5.22)$$

Η Εξίσωση (5.22) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των πιέσεων ανακοπής,  $p_0$ , και εξόδου,  $p_\epsilon$ , ως εξής

$$\frac{p_0}{p_\epsilon} = \frac{p^* p_0}{p_\epsilon p^*} = \left( \frac{\rho^*}{\rho_\epsilon} \right)^\gamma \frac{p_0}{p^*} = \left[ \frac{2 + (\gamma - 1) M_\epsilon^2}{\gamma + 1} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{-\gamma/(\gamma-1)},$$

δίνοντας

$$\frac{2 + (\gamma - 1) M_\epsilon^2}{\gamma + 1} = \frac{2}{\gamma + 1} \left( \frac{p_0}{p_\epsilon} \right)^{(\gamma-1)/\gamma},$$

## 5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

ή ισοδύναμα

$$M_\epsilon = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \left[ \left( \frac{p_0}{p_\epsilon} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]. \quad (5.23)$$

Με παρόμοιους συλλογισμούς αποδεικνύεται επίσης ότι

$$\frac{T_\epsilon}{T_0} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\epsilon^2 \right)^{-1}. \quad (5.24)$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια την Εξίσωση (5.17) για  $p = p_\epsilon$  και  $M = M_\epsilon$  και το γεγονός ότι

$$c = \sqrt{\gamma RT^*} = \sqrt{\gamma RT_0 \frac{T^*}{T_0}} = \sqrt{RT_0 \frac{2\gamma}{\gamma+1}},$$

η Εξίσωση (5.22) λαμβάνει την ακόλουθη τελική μορφή

$$U_\epsilon = \sqrt{RT_0 \frac{2\gamma}{\gamma+1}} \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[ \left( \frac{p_0}{p_\epsilon} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \left( \frac{p_\epsilon}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}},$$

ή μετά από απλές πράξεις

$$U_\epsilon = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_0 \left[ 1 - \left( \frac{p_\epsilon}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η πίεση στην έξοδο,  $p_\epsilon$ , μπορεί ανάλογα με τις συνθήκες να είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη της ατμοσφαιρικής πίεσης οδηγώντας σε διαφορετικές ροϊκές συμπεριφορές.

Μία επιπλέον παρατήρηση του ακροφυσίου de Laval μπορεί να προκύψει από την Εξίσωση (5.21) για την περίπτωση του αέρα όπου  $\gamma = 1,4$  δίνοντας

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left( \frac{5 + M^2}{6} \right)^3.$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς τον αριθμό Mach βρίσκουμε

$$\frac{d}{dM} \left( \frac{A}{A^*} \right) = \left( \frac{5 + M^2}{6} \right) \left( \frac{M^2 - 1}{M^2} \right), \quad (5.25)$$

και

$$\frac{d^2}{dM^2} \left( \frac{A}{A^*} \right) = \frac{M^2 - 1}{3M} + \left( \frac{5 + M^2}{6} \right) (2M^3 - 2M^2 + 2).$$

Από την Εξίσωση (5.25) προκύπτει ότι η ποσότητα  $A/A^*$  έχει ένα μόνο ακρότατο το οποίο λαμβάνει χώρα για  $M = 1$  και το οποίο είναι ολικό ελάχιστο καθώς η δεύτερη παράγωγός της είναι θετική, επιβεβαιώνοντας το γεγονός ότι η ροή σε ένα ακροφύσιο de Laval γίνεται ηχητική στο "λαιμό" του ακροφυσίου.

## 5.6 Κρουστικά κύματα

Τα *κρουστικά κύματα* (shock waves) είναι επιφάνειες ασυνέχειας της ροής αρκετά περιορισμένης έκτασης και κατά μήκος της οποίας τα ρευστομηχανικά μεγέθη αναπτύσσουν πολύ μεγάλες κλίσεις. Άμεση συνέπεια είναι η μετατροπή μίας υπερηχητικής ροής σε υποηχητική με ταυτόχρονη σημαντική μεταβολή των ρευστομηχανικών μεγεθών της ροής όπως η ταχύτητα, η πίεση, η πυκνότητα και η θερμοκρασία. Αυτή η απότομη ασυνέχεια της ροής οδηγεί σε αύξηση της εντροπίας κατάντη του κρουστικού κύματος με ταυτόχρονη διατήρηση όμως της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Τα κρουστικά κύματα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες, τα λεγόμενα *κάθετα* όπου η ταχύτητα της ροής δε μεταβάλλει τη διεύθυνση της και τα *πλάγια* όπου μεταβάλλεται τόσο η διεύθυνση όσο και το μέτρο της ταχύτητας της ροής εξαιτίας του κρουστικού κύματος.

### 5.6.1 Κάθετα κρουστικά κύματα

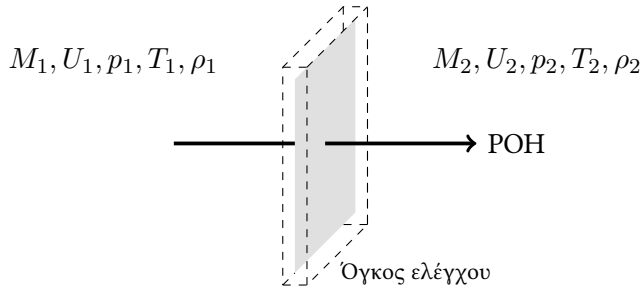
Για να μελετηθούν οι μεταβολές των ιδιοτήτων ενός ρευστού σε ένα κάθετο κρουστικό κύμα (normal shock wave) θεωρούμε τον όγκο ελέγχου του Σχήματος 5.9. Η ροή θεωρείται μόνιμη και αδιαβατική καθώς δεν συναλλάσσεται θερμότητα με το περιβάλλον, αλλά είναι μη ισεντροπική καθώς το ενεργειακό περιεχόμενο της ροής υποβαθμίζεται όταν λαμβάνει χώρα το κρουστικό κύμα. Συμβολίζοντας τα μεγέθη ανάντη του κύματος με το δείκτη 1 και τα αντίστοιχα κατάντη με το δείκτη 2, η εξίσωση της ορμής απουσία εξωτερικών δυνάμεων παίρνει τη μορφή

$$-\dot{m}_1 U_1 + \dot{m}_2 U_2 = p_1 A_1 - p_2 A_2,$$

όπου τα διαφορετικά πρόσημα στο αριστερό μέλος οφείλονται στο γεγονός ότι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα εκατέρωθεν του όγκου ελέγχου έχουν αντίθετες κατευθύνσεις. Θεωρώντας σταθερό εμβαδό διατομής ( $A_1 = A_2$ ) και σταθερή παροχή μάζας ( $\dot{m}_1 = \rho_1 U_1 A = \dot{m}_2 = \rho_2 U_2 A$ ), το παραπάνω αποτέλεσμα γράφεται

$$-\rho_1 U_1^2 A + \rho_1 U_1 U_2 A = (p_1 - p_2) A \implies p_1 + \rho_1 U_1^2 = p_2 + \rho_2 U_2^2. \quad (5.26)$$

## 5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ



Σχήμα 5.9: Κάθετο κρουστικό κύμα και θερμοδυναμικά μεγέθη εκατέρωθεν αυτού σε ακίνητο όγκο ελέγχου.

Μία ισοδύναμη έκφραση είναι δυνατό να προκύψει με τη βοήθεια της Εξίσωσης (5.5) και της καταστατικής εξίσωσης των ιδανικών αερίων ως εξής

$$p_1 + \frac{p_1}{RT_1} \gamma RT_1 M_1^2 = p_2 + \frac{p_2}{RT_2} \gamma RT_2 M_2^2 \implies \frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}. \quad (5.27)$$

Χρησιμοποιώντας επίσης το γεγονός ότι δεν παράγεται έργο και δε συναλλάσσεται θερμότητα με το ρευστό, η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας γράφεται

$$h_1 + \frac{1}{2} U_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} U_2^2 \implies c_p T_1 + \frac{1}{2} U_1^2 = c_p T_2 + \frac{1}{2} U_2^2, \quad (5.28)$$

δίνοντας με τη βοήθεια της Εξίσωσης (5.15) ότι

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}. \quad (5.29)$$

Επειδή σε ένα κρουστικό κύμα  $M_1 > 1$  και  $M_2 < 1$ , από τις Εξισώσεις (5.27) και (5.29) προκύπτει ότι

$$p_1 < p_2, \quad T_1 < T_2,$$

και κατά συνέπεια η στατική πίεση και η θερμοκρασία αυξάνει σε ένα κρουστικό κύμα. Τέλος, καθώς  $\rho_1/\rho_2 = U_2/U_1$ , ο λόγος των πυκνοτήτων εκφράζεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left( \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \right)^{1/2}. \quad (5.30)$$

Οι τιμές των αριθμών Mach εκατέρωθεν του κύματος εξαρτώνται από το λόγο των ειδικών θερμοτήτων όπως αυτοί εκφράζονται από το μέγεθος  $\gamma$  ως εξής: ξεκινώντας από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{U_1 T_2}{U_2 T_1} = \frac{M_1 \sqrt{\gamma R T_1} T_2}{M_2 \sqrt{\gamma R T_2} T_1} = \frac{M_1}{M_2} \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{1/2}, \quad (5.31)$$

και με τη βοήθεια των Εξισώσεων (5.27) και (5.31)

$$\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} = \frac{M_2}{M_1} \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{1/2} \implies M_2^2 = \frac{(\gamma-1) M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}. \quad (5.32)$$

Το αποτέλεσμα (5.32) καθορίζει ότι αν ο αριθμός Mach ανάντη του κύματος είναι μεγαλύτερος της μονάδας, τότε η αντίστοιχη τιμή κατάντη αυτού θα είναι αναγκαστικά μικρότερη της μονάδας. Είναι τότε δυνατόν να εκφραστούν οι Εξισώσεις (5.27), (5.29) και (5.31) συναρτήσει ενός μόνο αριθμού Mach σύμφωνα με τις ακόλουθες εκφράσεις

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1), \\ \frac{T_2}{T_1} &= \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)] [(\gamma-1) M_1^2 + 2]}{(\gamma+1)^2 M_1^2}, \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{(\gamma+1) M_1^2}{(\gamma-1) M_1^2 + 2}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Οι εκφράσεις αυτές μπορούν να διατυπωθούν μεταξύ των στατικών μεγεθών και μεγεθών ανακοπής χρησιμοποιώντας τις γνωστές σχέσεις για ισηντροπική μεταβολή ανάντη ή κατάντη του κρουστικού κύματος (όχι προφανώς διαμέσω αυτού) σύμφωνα με τις ακόλουθες εκφράσεις

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2, \quad \frac{p_0}{p} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \text{και} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Μία ενδιαφέρουσα προσέγγιση αποτελεί η αντίστροφη υπόθεση, αν δηλαδή είναι δυνατόν η ροή να μετατραπεί από υποηχητική ανάντη του κύματος σε υπερηχητική κατάντη αυτού. Για να απαντηθεί το ερώτημα αυτό, θεωρούμε τη

## 5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

μεταβολή της εντροπίας,  $s_2 - s_1$ , ενός ιδανικού αερίου από μία αρχική κατάσταση 1 σε μία τελική κατάσταση 2 όπως αυτή εκφράζεται από τη σχέση

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) = R \ln \left[ \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \right],$$

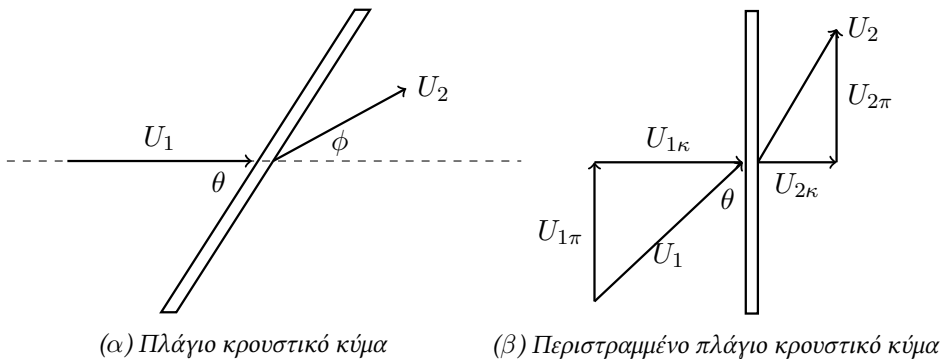
όπου  $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$ . Αποδεικνύεται ότι η ταυτόχρονη υπόθεση  $M_1 < 1$  και  $M_2 > 1$  οδηγεί σε ελάττωση της εντροπίας διαμέσω του κρουστικού κύματος

$$\Delta s < 0,$$

παραβιάζοντας το δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο. Δεν είναι επομένως δυνατό να εμφανιστούν κρουστικά κύματα σε υποηχητικές ροές παρά μόνο σε υπερηχητικές.

### 5.6.2 Πλάγια κρουστικά κύματα

Όταν το κρουστικό κύμα δεν είναι κάθετο στη διεύθυνση της ροής αλλά σχηματίζει γωνία,  $\theta$ , με αυτή έχουμε το λεγόμενο *πλάγιο κρουστικό κύμα* (oblique shock wave). Διαφέρει από το κάθετο κρουστικό κύμα καθώς μεταβάλλει όχι μόνο το μέτρο της ταχύτητας ροής αλλά και τη διεύθυνσή της όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.10α, δημιουργώντας μία *γωνία εκτροπής (ή απόκλισης)*,  $\phi$ . Η μελέτη ενός τέτοιου κρουστικού κύματος είναι δυνατό να λάβει χώρα αναλύοντας τις ταχύτητες ανάντη και κατάντη σε μία κάθετη ( $\kappa$ ) και μία παράλληλη ( $\pi$ ) ως προς αυτό συνιστώσα σύμφωνα με το Σχήμα 5.10β.



Σχήμα 5.10: Πλάγιο κρουστικό κύμα σε δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις.

Μία διαπίστωση που προκύπτει άμεσα για την περίπτωση πλάγιων κρουστικών κυμάτων είναι ότι οι παράλληλες συνιστώσες των ταχυτήτων είναι μεταξύ

τους ίσες, καθώς στην παράλληλη διεύθυνση δεν ασκούνται δυνάμεις και με απλή εφαρμογή της Εξίσωσης (5.26) βρίσκουμε

$$-m_1 U_{1\pi} + m_2 U_{2\pi} = 0 \implies \rho_1 U_1 A (U_{1\pi} - U_{2\pi}) = 0 \implies U_{1\pi} = U_{2\pi}.$$

Ένα πλάγιο κρουστικό κύμα επομένως συμπεριφέρεται σαν ένα κάθετο κρουστικό κύμα στο οποίο εφαρμόζονται οι κάθετες συνιστώσες της ταχύτητας. Η διαπίστωση αυτή οδηγεί με τη σειρά της στον επαναορισμό του αριθμού Mach (κάθετος αριθμός Mach,  $M_{\kappa}$ ) ως εξής

$$M_{1\kappa} = \frac{U_{1\kappa}}{c_1} \quad \text{και} \quad M_{2\kappa} = \frac{U_{2\kappa}}{c_2},$$

όπου με χρήση απλής τριγωνομετρίας

$$M_{1\kappa} = M_1 \eta \mu \theta \quad \text{και} \quad M_{2\kappa} = M_2 \eta \mu (\theta - \phi).$$

Δύο οριακές συνθήκες προκύπτουν για τη γωνία  $\theta$ . Η πρώτη επιβάλλοντας τη συνθήκη  $M_{1\kappa} \geq 1$  για την ύπαρξη πλάγιου κρουστικού κύματος (ελάχιστη γωνία,  $\theta_{\epsilon\lambda}$ ) και η δεύτερη όταν  $M_{1\kappa} = M_1$  (μέγιστη γωνία,  $\theta_{\mu\epsilon\gamma}$ )

- $\eta \mu (\theta_{\epsilon\lambda}) = \frac{1}{M_1} \rightarrow \theta_{\epsilon\lambda} = \eta \mu^{-1} \left( \frac{1}{M_1} \right),$
- $\theta_{\mu\epsilon\gamma} = 90^\circ \rightarrow \eta \mu (\theta_{\mu\epsilon\gamma}) = 1 \rightarrow M_{1\kappa} = M_1.$

Τα πλάγια κρουστικά κύματα επομένως είναι δυνατόν να μελετηθούν ως κάθετα αν αντικατασταθούν οι αριθμοί Mach με τις αντίστοιχες κάθετες συνιστώσες τους. Οι Εξισώσεις (5.32) και (5.33) τότε για παράδειγμα δέχονται την ακόλουθη μορφή

$$M_2^2 \eta \mu^2 (\theta - \phi) = \frac{(\gamma - 1) M_1^2 \eta \mu^2 \theta + 2}{2\gamma M_1^2 \eta \mu^2 \theta - (\gamma - 1)},$$

και

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \eta \mu^2 \theta - 1), \\ \frac{T_2}{T_1} &= \frac{[2\gamma M_1^2 \eta \mu^2 \theta - (\gamma - 1)] [(\gamma - 1) M_1^2 \eta \mu^2 \theta + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2 \eta \mu^2 \theta}, \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \eta \mu^2 \theta}{(\gamma - 1) M_1^2 \eta \mu^2 \theta + 2}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

## 5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

Μία χρήσιμη τέλος έκφραση είναι δυνατόν να προκύψει συναρτήσει των γωνιών  $\theta$  και  $\phi$  αφού η παροχή μάζας εκατέρωθεν του κύματος διατηρείται

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{U_{1\kappa}}{U_{2\kappa}} = \frac{U_{1\pi} \epsilon \phi \theta}{U_{2\pi} \epsilon \phi (\theta - \phi)} = \frac{\epsilon \phi \theta}{\epsilon \phi (\theta - \phi)},$$

όπου για τις γωνίες αυτές ισχύει ότι

$$\epsilon \phi \theta = 2 \sigma \phi \theta \left[ \frac{M_1^2 \eta \mu^2 \theta - 1}{M_1^2 (\gamma + \sigma \nu 2\theta) + 2} \right].$$

Αποδεικνύεται ότι και στις δύο οριακές τιμές της γωνίας  $\theta$  που αναφέρθηκαν παραπάνω, η γωνία εκτροπής  $\phi$  μηδενίζεται διότι

- $\eta \mu (\theta_{\epsilon\lambda}) = \frac{1}{M_1} \rightarrow M_1^2 \eta \mu^2 (\theta_{\epsilon\lambda}) - 1 = 0 \rightarrow \phi = 0,$
- $\theta_{\mu\epsilon\gamma} = 90^\circ \rightarrow \sigma \phi (\theta_{\mu\epsilon\gamma}) = 0 \rightarrow \phi = 0,$

δίνοντας όπως ήταν αναλενόμενο άλλωστε μηδενική απόκλιση της ροής διαμέσω του κρουστικού κύματος. Σε αντίθεση με τα κάθετα κρουστικά κύματα που η ροή κατάντη αυτού είναι πάντα υποηχητική, σε ένα πλάγιο κρουστικό κύμα η ροή κατάντη μπορεί να λάβει όλες τις πιθανές καταστάσεις (υποηχητική, ηχητική, ή υπερηχητική).

### 5.7 Μονοδιάστατη συμπίεστη ροή με μεταφορά θερμότητας ή με απώλειες

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήθηκε η συμπεριφορά ενός ρευστού μεταξύ δύο σημείων εξαιτίας ενός κρουστικού κύματος. Η ύπαρξη του κύματος οδήγησε στη μεταβολή των ρευστομηχανικών και θερμοδυναμικών μεγεθών κατά τη διεύθυνση της ροής. Παρόμοιες όμως μεταβολές μπορούν να λάβουν χώρα εξαιτίας κάποιου άλλου αιτίου όπως για παράδειγμα η μεταφορά θερμότητας ή η παρουσία σημαντικών απωλειών σε έναν υπό εξέταση όγκο ελέγχου. Η μελέτη μονοδιάστατων ροών σε αυτές τις περιπτώσεις παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού συναντώνται συχνά σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές (αεροσύραγγες, στροβιλομηχανές κ.ά.) και αποτελεί το αντικείμενο της παρούσας ενότητας.

### 5.7.1 Ροή Rayleigh

Η ροή Rayleigh αναφέρεται σε ιδανική και μόνιμη ροή με συναλλαγή θερμότητας διαμέσω ενός αγωγού σταθερής διατομής. Οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας είναι ίδιες με αυτές που παρουσιάστηκαν στην ενότητα των κρουστικών κυμάτων με την επιπλέον προσθήκη ενός όρου,  $q$ , που περιγράφει τη μεταφερόμενη ανά μονάδα μάζας του ρευστού θερμότητα στο σύστημα

$$\begin{aligned}\rho_1 U_1 &= \rho_2 U_2, \\ p_1 + \rho_1 U_1^2 &= p_2 + \rho_2 U_2^2, \\ h_1 + \frac{1}{2} U_1^2 + q &= h_2 + \frac{1}{2} U_2^2.\end{aligned}$$

Ο λόγος των πιέσεων  $p_2/p_1$  τότε ταυτίζεται με την Εξίσωση (5.28), δηλαδή

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}. \quad (5.35)$$

Όσο αφορά τον λόγο των θερμοκρασιών,  $T_2/T_1$ , δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Εξίσωση (5.28) αφού στην προκειμένη περίπτωση συναλλάσσεται ποσό θερμότητας,  $q$ . Είναι όμως δυνατόν να υπολογιστεί ξεκινώντας από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2},$$

δίνοντας

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 U_2}{p_1 U_1} = \frac{p_2 M_2 c_2}{p_1 M_1 c_1} = \frac{p_2 M_2}{p_1 M_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2. \quad (5.36)$$

Τέλος, ο αντίστοιχος λόγος των πυκνοτήτων,  $\rho_2/\rho_1$ , ισούται με

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}. \quad (5.37)$$

Αρκετές φορές για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς εκφράζουμε τα μεγέθη της πίεσης, της θερμοκρασίας και της πυκνότητας συναρτήσει των αντίστοιχων κρίσιμων μεγεθών. Οι Εξισώσεις (5.35), (5.36) και (5.37) τότε παίρνουν

τη μορφή

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2}, \quad \frac{T}{T^*} = M^2 \left( \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^2, \quad \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M^2} \frac{1 + \gamma M^2}{1 + \gamma}.$$

Ισοδύναμα μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια των μεγεθών ανακοπής σύμφωνα με τις ακόλουθες εκφράσεις (βλέπε ενότητα λυμένων παραδειγμάτων)

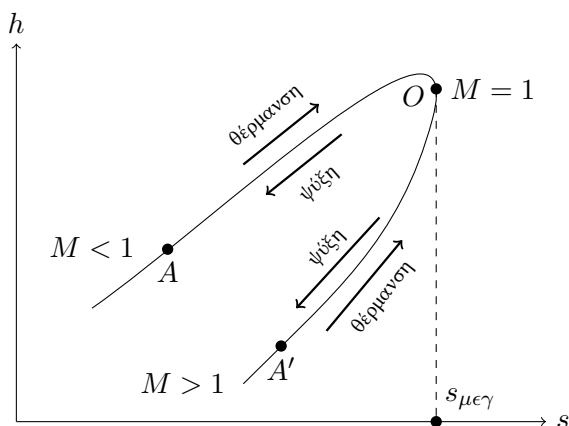
$$\begin{aligned} \frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} &= \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \left( \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \\ \frac{T_{0,2}}{T_{0,1}} &= \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left( \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \right), \\ \frac{\rho_{0,2}}{\rho_{0,1}} &= \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \left( \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \right)^{1/(\gamma-1)}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Ο υπολογισμός της μεταβολής της εντροπίας ως προς την ενθαλπία σε μία ροή Rayleigh μπορεί να γίνει με χρήση της Εξίσωσης (1.117) μεταξύ δύο καταστάσεων 1 και 2 ως εξής

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right),$$

όπου οι λόγοι της πίεσης και της θερμοκρασίας υπολογίζονται από τις Εξισώσεις (5.35) και (5.36) αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί ότι τέτοιες ροές είναι πολύ δύσκολο να μελετηθούν αναλυτικά και τις περισσότερες φορές επιλέγονται επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης. Στο Σχήμα 5.11 παρουσιάζεται η γραφική απεικόνιση μίας ροής Rayleigh για ένα δεδομένο σύνολο αρχικών συνθηκών σε διάγραμμα ( $h - s$ ), γνωστή και ως καμπύλη Rayleigh. Κάθε σημείο στην καμπύλη αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη τιμή του ποσού θερμότητας  $q$  που προσδίδεται στο σύστημα ή αφαιρείται από αυτό. Η καμπύλη δηλαδή αυτή αποτελεί το γεωμετρικό τόπο των τελικών καταστάσεων μίας ροής Rayleigh που αντιστοιχεί σε μία δεδομένη αρχική κατάσταση. Ανεξαρτήτως των αρχικών συνθηκών όμως, υπάρχει πάντα ένα σημείο ( $O$  στο διάγραμμα) που αντιστοιχεί στην μέγιστη εντροπία,  $s_{μεγ}$ , όπου η ροή γίνεται ηχητική. Αν για παράδειγμα η ροή βρίσκεται αρχικά στην υπερηχητική περιοχή (σημείο  $A'$ ), επιπλέον

## 5.7 Μονοδιάστατη συμπιεστή ροή με μεταφορά θερμότητας ή με απώλειες



Σχήμα 5.11: Μεταβολή της εντροπίας,  $s$ , ως προς την ενθαλπία,  $h$ , σε μία τυπική ροή Rayleigh.

πρόσδωση θερμότητας θα οδηγήσει το ρευστό στο ηχητικό όριο, όπου η ροή λαμβάνει το λεγόμενο "όριο πνιγμού" ή "όριο φραγμού". Στο σημείο αυτό δεν είναι δυνατή η επιπλέον προσφορά θερμότητας χωρίς σημαντική μεταβολή των συνθηκών ροής. Ισοδύναμα, αν η ροή βρίσκεται στο υποηχητικό όριο (σημείο  $A$ ), πρόσδωση θερμότητας θα οδηγήσει τη ροή ξανά προς το ηχητικό όριο. Είναι επομένως δυνατό μία υποηχητική (υπερηχητική) ροή να μετατραπεί σε υπερηχητική (υποηχητική) θερμαίνοντάς την μέχρι το ηχητικό όριο και μετά ψύχοντάς την. Ανεξάρτητα βέβαια με το είδος της ροής, αυτή θα κινηθεί αριστερά με θέρμανση και δεξιά με ψύξη της, οδηγώντας σε αύξηση του αριθμού Mach σε υποηχητικές ροές και αντίστοιχη μείωση σε υπερηχητικές.

Πώς μεταβάλλονται όμως τα ρευστομηχανικά μεγέθη σε μία ροή Rayleigh που θερμαίνεται; Για να απαντηθεί αυτό το ερώτημα θα θέσουμε τις σταθερές ποσότητες  $\rho U = K$  και  $p + \rho U^2 = p + KU = \Pi$ , προκαλώντας τις εξής μεταβολές

- ταχύτητα: σε μία υποηχητική ροή η ταχύτητα αυξάνεται ενώ σε μία υπερηχητική η ταχύτητα μειώνεται,
- αριθμός Mach: ο αριθμός Mach μεταβάλλεται όπως η ταχύτητα αυξάνοντας σε μία υποηχητική ροή και μειώνοντας σε μία υπερηχητική,
- πυκνότητα: επειδή  $K = \text{σταθερό}$ , η πυκνότητα μεταβάλλεται αντίστροφα της ταχύτητας οδηγώντας σε μείωση σε μία υποηχητική ροή και αύξηση

σε μία υπερηχητική,

- πίεση: επειδή  $\Pi$  και  $K$  είναι σταθερά, προκύπτει ότι η πίεση και η ταχύτητα μεταβάλλονται αντιστρόφως ανάλογα, προκαλώντας μείωση σε μία υποηχητική ροή και αύξηση σε μία υπερηχητική,
- εντροπία: από το Σχήμα 5.11 είναι προφανές ότι η εντροπία αυξάνεται τόσο σε μία υποηχητική ροή όσο και σε μία υπερηχητική,
- θερμοκρασία: αποδεικνύεται ότι για υποηχητική ροή η θερμοκρασία αυξάνεται για  $M_1 < \gamma^{-1/2}$  και μειώνεται για  $M_1 > \gamma^{-1/2}$  ενώ σε μία υπερηχητική ροή πάντα αυξάνεται.

Στην περίπτωση που αφαιρείται θερμότητα (όταν δηλαδή ψύχεται η ροή) όλα τα παραπάνω συμπεράσματα αντιστρέφονται. Για παράδειγμα, η ταχύτητα μειώνεται σε μία υποηχητική ροή και αυξάνεται σε μία υπερηχητική ροή. Ανάλογα συμπεράσματα μπορούν να διατυπωθούν και για τα υπόλοιπα μεγέθη.

### 5.7.2 Ροή Fanno

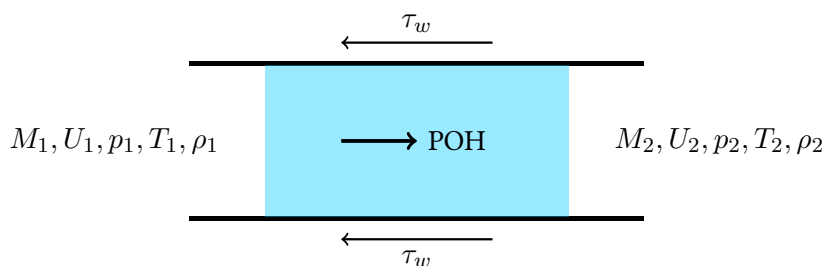
Ας υποθέσουμε τη μονοδιάστατη και μόνιμη ροή ενός ρευστού σταθερών φυσικών ιδιοτήτων σε ένα ευθύγραμμο αγωγό σταθερής διατομής, που είναι πλήρως ανεπτυγμένη χωρίς συναλλαγή θερμότητας από και προς το ρευστό (αδιαβατική ροή). Καθώς  $q = 0$ , η ροή θεωρείται ισεντροπική απουσία μαζικών δυνάμεων και κάθετων κρουστικών κυμάτων, με τη μοναδική δύναμη τριβής να εμφανίζεται στα τοιχώματα του αγωγού κατά τη ροή του ρευστού. Μία γραφική απεικόνιση της ροής Fanno παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.12 με τις εξισώσεις διατήρησης μάζας και ενέργειας να ταυτίζονται με αυτές που παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 5.6.1 δίνοντας

$$\begin{aligned} \rho_1 U_1 &= \rho_2 U_2, \\ c_p T_1 + \frac{1}{2} U_1^2 &= c_p T_2 + \frac{1}{2} U_2^2. \end{aligned}$$

Από την εξίσωση ενέργειας προκύπτει ότι η ολική θερμοκρασία,  $T_0$ , παραμένει σταθερή αφού όση ενέργεια χάνεται λόγω τριβής δεν εξαφανίζεται αλλά μετασχηματίζεται σε θερμική ενέργεια στο σύστημα

$$T_{0,1} = T_{0,2} \implies \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2},$$

### 5.7 Μονοδιάστατη συμπιεστή ροή με μεταφορά θερμότητας ή με απώλειες



Σχήμα 5.12: Ροή Fanno.

και από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτουν τα γνωστά από τα κάθετα κρουστικά κύματα αποτελέσματα

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left( \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2} \right)^{1/2}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left( \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \right)^{1/2}.$$

Συναρτήσει των κρίσιμων μεγεθών μπορούμε τότε να γράψουμε

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\frac{\gamma + 1}{2}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2},$$

και

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \left( \frac{\frac{\gamma + 1}{2}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right)^{1/2}, \quad \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M} \left( \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}{\frac{\gamma + 1}{2}} \right)^{1/2},$$

ή των αντίστοιχων μεγεθών ανακοπής

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{\rho_0}{\rho_0^*} = \frac{1}{M} \left( \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}{\frac{\gamma + 1}{2}} \right)^{(\gamma + 1)/[2(\gamma - 1)]}.$$

Όσο αφορά την εξίσωση της ορμής πρέπει να ληφθεί υπόψη η επίδραση της τριβής στη ροή μέσω της δύναμης τριβής,  $F_T$ , που αναπτύσσεται μεταξύ του ρευστού και των τοιχωμάτων του αγωγού. Για χάριν ευκολίας, θα θεωρήσουμε

## 5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

κυλινδρικό αγωγό σταθερής διαμέτρου,  $D$ , και μεταβλητού μήκους,  $L$ , στην ανάλυση που ακολουθεί. Η εξίσωση ορμής τότε θα πάρει παρόμοια μορφή με την Εξίσωση (5.26) δηλαδή

$$p_1 A + \rho_1 U_1^2 A = p_2 A + \rho_2 U_2^2 A + F_T, \quad (5.39)$$

όπου

$$F_T = \tau_w dA = \tau_w \pi D dx \implies F_T = \pi D \int_0^L \tau_w dx. \quad (5.40)$$

Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (5.39) και (5.40) έχουμε

$$p_1 + \rho_1 U_1^2 = p_2 + \rho_2 U_2^2 + \frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx.$$

Η θεώρηση κυλινδρικού αγωγού δεν είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την επίλυση ροών αυτής της κατηγορίας. Στη γενική περίπτωση η διάμετρος,  $D$ , του αγωγού θα αντικατασταθεί από την *υδραυλική διάμετρο*,  $D_h$ , που ορίζεται ως

$$D_h = \frac{4A}{P},$$

όπου  $A$  το εμβαδό διατομής του αγωγού μέσα από τον οποίο διέρχεται η ροή και  $P$  η βρεχόμενη περιμετρος.

Μία ισοδύναμη έκφραση μπορεί να προκύψει σε καθαρά διαφορική μορφή αν χρησιμοποιήσουμε ότι το γινόμενο  $\rho U = K$  είναι σταθερό και ότι η διαμητική τάση ισούται με το γινόμενο ενός σταθερού συντελεστή τριβής,  $f$ , με το κινηματικό μέρος της ενέργειας του ρευστού  $1/2\rho U^2$  δίνοντας

$$dP + d(\rho U^2) = -\frac{4}{D} \left( \frac{1}{2} \rho U^2 f \right) dx \implies dP + K dU = -\frac{2\rho U^2}{D} f dx. \quad (5.41)$$

Ο συντελεστής τριβής εξαρτάται από αρκετούς παράγοντες όπως το είδος της ροής (στρωτή ή τυρβώδη), τον αριθμό Reynolds, τον αριθμό Mach και την σχετική τραχύτητα,  $\epsilon/D$ , όπως παρουσιάστηκε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3. Η Εξίσωση (5.41) δεν συνδέει ρητά τη σχέση του μήκους του αγωγού με τον αριθμό Mach. Είναι όμως δυνατό να προκύψει η ακόλουθη έκφραση<sup>5</sup> σύμφωνα με την οποία

$$\frac{1 - M^2}{\gamma M^3} \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{-1} dM = \frac{2}{D} f dx,$$

<sup>5</sup> Η απόδειξη είναι ιδιαίτερα εκτεταμένη και δεν παρουσιάζεται στο βιβλίο. Ο αναγνώστης όμως μπορεί να τη συναντήσει σε αρκετά βιβλία που μελετούν συμπιεστές ροές.

### 5.7 Μονοδιάστατη συμπιεστή ροή με μεταφορά θερμότητας ή με απώλειες

και λύνοντάς την δίνει

$$\frac{f}{D} (x_2 - x_1) = \mathcal{F}(M_2) - \mathcal{F}(M_1),$$

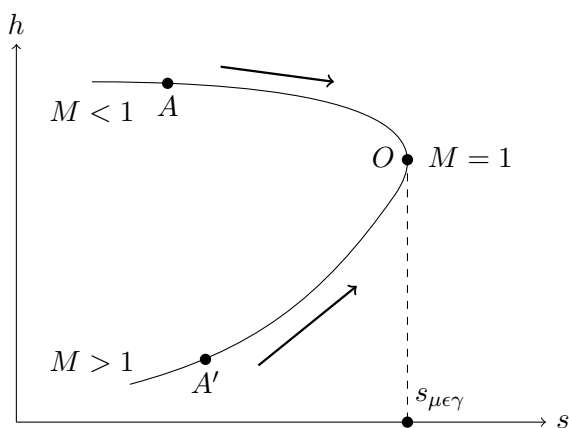
όπου

$$\mathcal{F}(M) = -\frac{1}{\gamma M^2} - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left( \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right).$$

Είναι τότε δυνατό να υπολογιστεί το κρίσιμο μήκος του αγωγού,  $L^*$ , στο οποίο η ταχύτητα του ρευστού γίνεται ηχητική για ένα δεδομένο σύνολο αρχικών συνθηκών, έστω  $x_1 = 0$  και  $M_1 = M$  ως εξής

$$\frac{f}{D} L^* = \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left( \frac{\frac{\gamma + 1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right). \quad (5.42)$$

Μία τυπική καμπύλη Fanno παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.13 για ένα δεδομένο σύνολο αρχικών συνθηκών σε διάγραμμα  $(h - s)$ , κατ' αντιστοιχία με την καμπύλη Rayleigh της προηγούμενης ενότητας. Η καμπύλη Fanno δηλαδή δεν εί-



Σχήμα 5.13: Μεταβολή της εντροπίας,  $s$ , ως προς την ενθαλπία,  $h$ , σε μία τυπική ροή Fanno.

ναι τίποτα άλλο από το γεωμετρικό τόπο των τελικών καταστάσεων μίας ροής Fanno που αντιστοιχεί σε μία δεδομένη αρχική κατάσταση. Μία διαπίστωση που εξάγεται σχεδόν αμέσως από το διάγραμμα είναι ότι λόγω της τριβής που

εμφανίζεται, η μεταβολή είναι μη αντιστρεπτή και κατά συνέπεια η εντροπία δεν μπορεί ποτέ να μειώνεται. Η ροή επομένως στο διάγραμμα κατευθύνεται μόνο προς τα δεξιά (αυξάνοντας την εντροπία) καθώς το ανάποδο θα παραβίαζε το δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο. Κατά συνέπεια, μία ροή που ξεκινάει υποηχητική δε μπορεί να μετατραπεί σε υπερηχητική για δεδομένο σύνολο αρχικών συνθηκών. Το σημείο μέγιστης εντροπίας αντιστοιχεί στο ηχητικό όριο και όλα τα σημεία πάνω από αυτό περιγράφουν υποηχητικές ροές, ενώ όλα τα σημεία κάτω από αυτό περιγράφουν υπερηχητικές ροές.

Χρήσιμα επίσης συμπεράσματα είναι δυνατό να προκύψουν αναφορικά με το μήκος του αγωγού και τη βοήθεια της καμπύλης Fanno. Λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε σημείο στην καμπύλη αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο μήκος αγωγού, παρατηρούμε ότι η τριβή οδηγεί μία υπερηχητική ροή,  $A'$ , προς το σημείο  $O$  ελαττώνοντας την ταχύτητα και κατά συνέπεια τον αριθμό Mach. Αύξηση του μήκους οδηγεί με τη σειρά του τη ροή πιο κοντά στο κρίσιμο σημείο κατά την έξοδο, μέχρι το μήκος  $L^*$  όπου η ροή γίνεται ηχητική και φτάνει το "όριο φραγμού". Παραπέρα αύξηση του μήκους (δηλαδή για  $L > L^*$ ) προκαλεί μεταβολή των συνθηκών εισόδου της ροής, όπως μείωση της ταχύτητας και της παροχής, οδηγώντας τη ροή να περιγράφεται από μία διαφορετική καμπύλη Fanno. Παρομοίως, για μία υποηχητική ροή,  $A$ , αύξηση του μήκους του αγωγού οδηγεί τη ροή προς το σημείο  $O$  το οποίο και θα καταλάμβανε για  $L = L^*$ . Η ροή θα έφτανε ξανά το "όριο φραγμού" και παραπέρα αύξηση του μήκους θα οδηγούσε σε σημαντικές αλλαγές των συνθηκών εισόδου.

Ως προς τα ρευστομηχανικά μεγέθη θέτοντας τις σταθερές ποσότητες  $\rho U = K$  και  $p + \rho U^2 = p + KU = \Pi$  μπορούμε να διατυπώσουμε τα παρακάτω συμπεράσματα

- ταχύτητα: σε μία υποηχητική ροή η ταχύτητα αυξάνεται ενώ σε μία υπερηχητική η ταχύτητα μειώνεται,
- αριθμός Mach: ο αριθμός Mach μεταβάλλεται όπως η ταχύτητα αυξάνοντας σε μία υποηχητική ροή και μειώνοντας σε μία υπερηχητική,
- πυκνότητα: η πυκνότητα μεταβάλλεται αντίστροφα της ταχύτητας οδηγώντας σε μείωση σε μία υποηχητική ροή και αύξηση σε μία υπερηχητική,
- πίεση: η πίεση μειώνεται σε μία υποηχητική ροή και αυξάνεται σε μία υπερηχητική,
- εντροπία: από το Σχήμα 5.13 είναι προφανές ότι η εντροπία αυξάνεται τόσο σε μία υποηχητική ροή όσο και σε μία υπερηχητική,

- θερμοκρασία: η θερμοκρασία επίσης μεταβάλλεται αντίστροφα της ταχύτητας οδηγώντας σε μείωση σε μία υποηχητική ροή και αύξηση σε μία υπερηχητική.

## 5.8 Λυμένα παραδείγματα

### Παράδειγμα 8.1

Έστω ότι η θερμοκρασιακή κατανομή στην ατμόσφαιρα περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση

$$\frac{dT}{dz} = -\beta,$$

όπου  $\beta = 6\text{ K/km}$  ο ρυθμός μείωσης της θερμοκρασίας ως προς το ύψος. Αν ένα αεροπλάνο πετάει σε υψόμετρο  $10\text{ km}$  από την επιφάνεια της θάλασσας με ταχύτητα  $500\text{ m/s}$ , υπολογίστε τον αριθμό Mach του αεροπλάνου.

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση ως προς ένα σημείο αναφοράς,  $(z_{\alpha\nu}, T_{\alpha\nu})$ , έχουμε

$$T - T_{\alpha\nu} = -\beta(z - z_{\alpha\nu}).$$

Θέτοντας στη συνέχεια σαν σημείο αναφοράς την επιφάνεια της θάλασσας,  $z_{\alpha\nu} = 0$ , και θεωρώντας ότι  $T_{\alpha\nu} = 298\text{ K}$  προκύπτει

$$T = 298\text{ K} - 6 \frac{\text{K}}{\text{km}} \cdot 10\text{ km} = 238\text{ K}.$$

Η ταχύτητα του ήχου τότε στο υψόμετρο αυτό ισούται με

$$c = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 238\text{ K}} = 309 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

δίνοντας αριθμός Mach ίσο με

$$M = \frac{U}{c} = \frac{500 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{309 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,62.$$

**Παράδειγμα 8.2**

Υπολογίστε την ταχύτητα του ήχου σε αέρα θερμοκρασίας (i)  $\theta = 30^\circ C$  και (ii)  $\theta = 0^\circ C$ . Θεωρήστε τον αέρα ιδανικό αέριο με  $\gamma = 1,4$  και  $R = 287 J/(kg K)$ .

Με απλή εφαρμογή της Εξίσωσης (5.5) βρίσκουμε

$$(i) \quad c_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{J}{kg K} \cdot 303K} = 348,9 \frac{m}{s},$$

$$(ii) \quad c_2 = \sqrt{\gamma RT_1} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{J}{kg K} \cdot 273K} = 331,2 \frac{m}{s}.$$

**Παράδειγμα 8.3**

Ένα αυτοκίνητο απομακρύνεται από μία ακίνητη σειρήνα που εκπέμπει με συχνότητα  $f = 500Hz$ . Αν η ταχύτητα του ήχου στις συνθήκες αυτές είναι  $340m/s$  και το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα  $100km/hr$ , υπολογίστε τη συχνότητα με την οποία θα γίνεται αντιληπτή η σειρήνα στο αυτοκίνητο.

Επειδή το αυτοκίνητο απομακρύνεται από την πηγή, το μήκος κύματος που γίνεται αντιληπτό από αυτό θα αυξηθεί και επομένως η συχνότητα,  $f'$ , θα ελαττωθεί. Ο υπολογισμός της γίνεται με χρήση της Εξίσωσης (5.8) όπου προκύπτει

$$f' = f \left( \frac{c}{c + U} \right) = 500Hz \left( \frac{340 \frac{m}{s}}{340 \frac{m}{s} + 27,78 \frac{m}{s}} \right) \implies f' = 462Hz.$$

**Παράδειγμα 8.4**

Ένα ασθενοφόρο κινείται με  $60km/hr$  και έχει "ανάψει" τη σειρήνα του που έχει συχνότητα  $f = 400Hz$ . Ποιά είναι η συχνότητα που θα αντιληφθεί ένας δρομέας που τρέχει στο δρόμο προς την κατεύθυνση του ασθενοφόρου με ταχύτητα  $10km/hr$ ;

Επειδή στο παράδειγμα αυτό κινούνται τόσο η πηγή όσο και ο παρατηρητής πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη γενικευμένη Εξίσωση (5.10) για τον υπολογισμό της ζητούμενης συχνότητας

$$f' = f \left( \frac{c + U'}{c - U} \right),$$

όπου

$$U' = 10 \frac{km}{hr} = 2,78 \frac{m}{s} \quad \text{και} \quad U = 60 \frac{km}{hr} = 16,67 \frac{m}{s}.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν βρίσκουμε

$$f' = 500Hz \left( \frac{340 \frac{m}{s} + 2,78 \frac{m}{s}}{340 \frac{m}{s} - 16,67 \frac{m}{s}} \right) \implies f' = 530Hz.$$

### Παράδειγμα 8.5

Αν οι συνθήκες αέρα πριν ένα κάθετο κρουστικό κύμα είναι  $p_1 = 150KPa$  και  $T_1 = 300K$  υπολογίστε τις αντίστοιχες συνθήκες μετά. Δίνεται ότι  $M_1 = 2$  και  $M_2 = 0.577$ .

Από την Εξίσωση (5.27) για  $\gamma = 1,4$  έχουμε

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} = \frac{1 + 1,4 \cdot 2^2}{1 + 1,4 \cdot 0.577^2} = 4,5 \implies p_2 = 4,5 p_1 = 675KPa.$$

Η αντίστοιχη τιμή της θερμοκρασίας υπολογίζεται από την Εξίσωση (5.29) δίνοντας

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{1,4 - 1}{2} \cdot 2^2}{1 + \frac{1,4 - 1}{2} \cdot 0.577^2} = 1,69 \implies T_2 = 1,69 T_1 = 507K.$$

Γνωρίζοντας τις πιέσεις και τις θερμοκρασίες είναι δυνατό να υπολογίσουμε τις πυκνότητες χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων πριν και μετά το κρουστικό κύμα

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{150KPa}{287 \frac{J}{kgK} \cdot 300K} \implies \rho_1 = 1,74 \frac{kg}{m^3},$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{675KPa}{287 \frac{J}{kgK} \cdot 507K} \implies \rho_2 = 4,64 \frac{kg}{m^3}.$$

## 5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν θεωρούσαμε την Εξίσωση (5.30) σύμφωνα με την οποία

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left( \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \right)^{1/2} = \frac{2}{0,577} \sqrt{0,59} = 2,67 \implies \rho_2 = 4,64 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Οι ταχύτητες τέλος ισούνται με

$$U_1 = M_1 \sqrt{\gamma R T_1} = 2 \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 300\text{K}} = 694,38 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$U_2 = M_2 \sqrt{\gamma R T_2} = 0,577 \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 507\text{K}} = 260,43 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή του μεγέθους  $M_2$  μπορούσε να υπολογιστεί απευθείας από την Εξίσωση (5.32) σύμφωνα με την οποία

$$M_2 = \sqrt{\frac{(\gamma - 1) M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}} = \sqrt{\frac{(1,4 - 1)2^2 + 2}{2 \cdot 1,4 \cdot 2^2 - (1,4 - 1)}} = 0,577.$$

### Παράδειγμα 8.6

Με χρήση της Εξίσωσης (5.32) αποδείξτε ότι αν  $M_1 > 1$  τότε  $M_2 < 1$ .

Για να αποδειχθεί ότι  $M_2 < 1$  αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{(\gamma - 1) M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} < 1.$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι  $\gamma > -1 \rightarrow 2\gamma > \gamma - 1 \rightarrow 2\gamma M_1^2 > \gamma - 1$  αποδεικνύοντας ότι ο παρανομαστής είναι πάντα θετικός. Η υπόθεση  $M_2 < 1$  τότε ικανοποιείται όταν ισχύει η ακόλουθη ισοδύναμη συνθήκη

$$\begin{aligned} 2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1) > (\gamma - 1) M_1^2 + 2 &\implies \gamma M_1^2 - \gamma + 1 > -M_1^2 + 2 \\ \implies (\gamma + 1) M_1^2 > (\gamma + 1) &\implies M_1^2 > 1 \implies M_1 > 1, \end{aligned}$$

καθώς ο αριθμός Mach είναι εξ' ορισμού θετικός. Επειδή η παραπάνω απόδειξη ισχύει και προς την αντίθετη κατεύθυνση, προκύπτει η ζητούμενη πρόταση.

**Παράδειγμα 8.7**

Υπολογίστε τη σχέση μεταξύ της στατικής θερμοκρασίας και της θερμοκρασίας ανακοπής ενός ρευστού σε μία ισεντροπική μεταβολή. Ποιό είναι το αντίστοιχο αποτέλεσμα για την πίεση και την πυκνότητα;

Ξεκινώντας από τη γνωστή σχέση μεταξύ της στατικής θερμοκρασίας και της θερμοκρασίας ανακοπής έχουμε

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{1}{2} U^2,$$

και τότε

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{\gamma R T} U^2 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{U^2}{c^2} \implies \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2.$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια το γεγονός ότι σε μία ισεντροπική μεταβολή ισχύει ότι

$$\frac{p_0}{p} = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^\gamma = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\gamma/(\gamma-1)},$$

προκύπτει τελικά

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad \text{και} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma-1)}.$$

**Παράδειγμα 8.8**

Οι συνθήκες εισόδου στο συγκλίνον - αποκλίνον αγωγό του Σχήματος 5.7β είναι:  $T_{0,1} = 500K$ ,  $U_1 = 200m/s$ ,  $p_{0,1} = 570kPa$  και  $A_1 = 0,045m^2$ . Υπολογίστε τα μεγέθη  $T_1$ ,  $M_1$ ,  $A^*$  και  $\dot{m}$  αν  $\gamma = 1,4$  και  $R = 287 J/(kgK)$ .

Τα τέσσερα ζητούμενα μεγέθη μπορούν να υπολογιστούν το ένα μετά το άλλο. Ξεκινώντας από τη θερμοκρασία ανακοπής έχουμε

$$T_1 = T_{0,1} - \frac{(\gamma - 1) U_1^2}{2\gamma R} = 500K - \frac{(1,4 - 1) 200^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 1,4 \cdot 287 \frac{J}{kgK}} \implies T_1 = 480,09K.$$

## 5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

Γνωρίζοντας τη θερμοκρασία στην είσοδο προκύπτει η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής

$$c_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{J}{kgK} \cdot 480,09K} \implies c_1 = 439,20 \frac{m}{s},$$

και τότε

$$M_1 = \frac{U_1}{c_1} = \frac{200 \frac{m}{s}}{439,20 \frac{m}{s}} \implies M_1 = 0,455.$$

Η διατομή στραγγαλισμού,  $A^*$ , μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (5.21) για τις δοσμένες συνθήκες εισόδου

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{1}{M_1} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{\gamma + 1} \right]^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]}.$$

Αντικαθιστώντας

$$\frac{0,045m^2}{A^*} = \frac{1}{0,455} \left[ \frac{2 + (1,4 - 1) 0,455^2}{1,4 + 1} \right]^{(1,4+1)/[2(1,4-1)]} = 1,44,$$

δίνοντας

$$A^* = 0,0313m^2.$$

Τέλος, η παροχή μάζας υπολογίζεται από την Εξίσωση (5.20) όπου

$$\dot{m}^* = 0,0313m^2 \cdot 570kPa \sqrt{\frac{1,4}{287 \frac{J}{kgK} \cdot 500K} \left( \frac{2,4}{2} \right)^{-3}} = 32,25 \frac{kg}{s}.$$

### Παράδειγμα 8.9

Αποδείξτε τις Εξισώσεις (5.38).

Ξεκινώντας από τις γνωστές εκφράσεις για τη θερμοκρασία ανακοπής μεταξύ δύο σημείων 1 και 2 μπορούμε να γράψουμε

$$c_p T_{0,1} = c_p T_1 + \frac{1}{2} U_1^2,$$

$$c_p T_{0,2} = c_p T_2 + \frac{1}{2} U_2^2,$$

όπου διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{T_{0,2}}{T_{0,1}} &= \frac{c_p T_2 + \frac{1}{2} U_2^2}{c_p T_1 + \frac{1}{2} U_1^2} = \frac{c_p T_2 \left(1 + \frac{U_2^2}{2c_p T_2}\right)}{c_p T_1 \left(1 + \frac{U_1^2}{2c_p T_1}\right)} = \frac{T_2}{T_1} \frac{1 + \frac{U_2^2 (\gamma - 1)}{2c^2}}{1 + \frac{U_1^2 (\gamma - 1)}{2c^2}} \\ &= \frac{T_2}{T_1} \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} = \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}\right)^2 \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}\right), \end{aligned}$$

με τη βοήθεια της Εξίσωσης (5.36). Ο λόγος των πιέσεων υπολογίζεται ως εξής

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = \frac{p_{0,2}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{0,1}},$$

δίνοντας

$$\begin{aligned} \frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \\ &= \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τέλος την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

$$\frac{\rho_{0,2}}{\rho_{0,1}} = \frac{T_{0,1}}{T_{0,2}} \frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

### Παράδειγμα 8.10

Αέρας ρέει ισεντροπικά σε ένα συγκλινον-αποκλινον ακροφύσιο διατομής έξοδου ίσο με  $8\text{ cm}^2$ . Η θερμοκρασία και η πίεση ανακοπής ισούται με  $360\text{ K}$  και  $1,1\text{ MPa}$  αντίστοιχα. Αν η πίεση στην έξοδο ισούται με  $100\text{ kPa}$ , υπολογίστε τον αριθμό Mach στην έξοδο και τη σταθερή παροχή μάζας. Θεωρήστε ότι  $\gamma = 1,4$  και  $R = 287\text{ J/(kg K)}$ .

## 5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

Από την Εξίσωση (5.23) μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό Mach εξόδου

$$M_\epsilon = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_\epsilon}{p_0} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} - 1 \right]} = \sqrt{\frac{2}{1,4 - 1} \left[ \left( \frac{100}{1100} \right)^{(1-1,4)/1,4} - 1 \right]},$$

δίνοντας

$$M_\epsilon = 2,22.$$

Για να υπολογιστεί η παροχή μάζας πρέπει να γνωρίσουμε την τιμή της πυκνότητας και της θερμοκρασίας,  $\rho_\epsilon$  και  $T_\epsilon$ , αντίστοιχα στην έξοδο. Με τη βοήθεια της Εξίσωσης (5.24) έχουμε λοιπόν

$$T_\epsilon = T_0 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\epsilon^2 \right)^{-1} = 360K \left( 1 + \frac{1,4 - 1}{2} \cdot 2,22^2 \right)^{-1} = 181,3K.$$

Η παροχή μάζας τότε μπορεί να βρεθεί από τη γνωστή σχέση

$$\dot{m}_\epsilon = \rho_\epsilon U_\epsilon A_\epsilon,$$

όπου όλα τα μεγέθη υπολογίζονται στην έξοδο του ακροφυσίου

$$\rho_\epsilon = \frac{p_\epsilon}{RT_\epsilon} = \frac{10^5 Pa}{287 \frac{J}{kg K} \cdot 181,3K} = 1,92 \frac{kg}{m^3},$$

$$U_\epsilon = M_\epsilon \sqrt{\gamma RT_\epsilon} = 2,22 \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{J}{kg K} \cdot 181,3K} = 599,2 \frac{m}{s},$$

$$A_\epsilon = 8cm^2 = 0,0008m^2.$$

Αντικαθιστώντας τελικά βρίσκουμε

$$\dot{m}_\epsilon = 1,92 \frac{kg}{m^3} \cdot 599,2 \frac{m}{s} \cdot 0,0008m^2 \implies \dot{m}_\epsilon = 0,92 \frac{kg}{s}.$$

### Παράδειγμα 8.11

Ένα πλάγιο κρουστικό κύμα δημιουργείται στην προπορευόμενη ακμή ενός αεροπλάνου με  $M_1 = 1,5$ . Οι συνθήκες του αέρα μπορούν να θεωρηθούν σταθερές και ίσες με  $P_1 = 60 KPa$  και  $T_1 = 300K$ . Υπολογίστε τον αριθμό Mach μετά το κρουστικό κύμα και τη γωνία εκτροπής αν αυτό σχηματίζει αρχικά γωνία  $\theta = 55^\circ$ .

Το παράδειγμα αυτό θα λυθεί με τη βοήθεια του Σχήματος 5.10. Αρχικά θα υπολογιστεί η ταχύτητα  $U_1$  και οι κάθετες συνιστώσες της. Έχουμε λοιπόν ότι

$$U_1 = M_1 \sqrt{\gamma R T_1} = 1,5 \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{J}{kg K} \cdot 300 K} = 520,78 \frac{m}{s},$$

με συνιστώσες

$$U_{1\kappa} = U_1 \eta \mu \theta = 520,78 \frac{m}{s} \cdot 0,819 = 426,60 \frac{m}{s},$$

$$U_{1\pi} = U_1 \sigma \nu \nu \theta = 520,78 \frac{m}{s} \cdot 0,574 = 298,71 \frac{m}{s}.$$

Προκύπτει τότε ότι

$$M_{1\kappa} = M_1 \eta \mu \theta = 1,5 \cdot 0,819 = 1,23,$$

και

$$M_{2\kappa}^2 = \frac{(\gamma - 1) M_1^2 \eta \mu^2 \theta + 2}{2\gamma M_1^2 \eta \mu^2 \theta - (\gamma - 1)} = \frac{(1,4 - 1) 1,5^2 \cdot \eta \mu^2 55^\circ + 2}{2 \cdot 1,4 \cdot 1,5^2 \cdot \eta \mu^2 55^\circ - (1,4 - 1)} = 0,68,$$

ή ισοδύναμα

$$M_{2\kappa} = 0,82.$$

Όσο αφορά τη θερμοκρασία  $T_2$  αυτή μπορεί να υπολογιστεί από την Εξίσωση (5.34) ως εξής

$$T_2 = \frac{[2\gamma M_1^2 \eta \mu^2 \theta - (\gamma - 1)] [(\gamma - 1) M_1^2 \eta \mu^2 \theta + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2 \eta \mu^2 \theta} T_1 \implies$$

$$T_2 = \frac{[2 \cdot 1,4 \cdot 1,51 - (1,4 - 1)] [(1,4 - 1) 1,51 + 2]}{(1,4 + 1)^2 1,51} 300 K \implies$$

$$T_2 = \frac{3,83 \cdot 2,60}{8,70} 300 K \implies T_2 = 343,38 K.$$

Μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε την ταχύτητα  $U_2$  αφού

$$U_{2\kappa} = M_{2\kappa} \sqrt{\gamma R T_2} = 0,82 \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{J}{kg K} \cdot 343,38 K} = 304,58 \frac{m}{s},$$

δίνοντας

$$U_2 = \sqrt{U_{2\kappa}^2 + U_{2\pi}^2} = \sqrt{U_{2\kappa}^2 + U_{1\pi}^2} = 426,61 \frac{m}{s}.$$

## 5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

Τελικά προκύπτει ότι

$$M_2 = \frac{U_2}{c_2} = \frac{U_2}{\sqrt{\gamma RT_2}} = \frac{426,61 \frac{m}{s}}{\sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{J}{kg K} 304,58 K}} \implies M_2 = 1,22,$$

και

$$\epsilon\phi(\theta - \phi) = \frac{U_{2\kappa}}{U_{2\pi}} \implies \phi = \theta - \epsilon\phi^{-1} \left( \frac{U_{2\kappa}}{U_{2\pi}} \right) \implies \phi = 9,44^\circ.$$

### Παράδειγμα 8.12

Αέρας αριθμού Mach  $M_1 = 2,5$  πίεσης ανακοπής  $p_{0,1} = 3 \text{ MPa}$  και πυκνότητας  $\rho_1 = 1,5 \text{ kg/m}^3$  διέρχεται μέσω ενός κάθετου κρουστικού κύματος. Υπολογίστε τον αριθμό Mach και τη θερμοκρασία κατάντη του κρουστικού κύματος. Θεωρήστε ότι  $\gamma = 1,4$  και  $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ .

Ο αριθμός Mach κατάντη του κάθετου κρουστικού κύματος,  $M_2$ , υπολογίζεται από την Εξίσωση (5.32) όπου αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$M_2 = \sqrt{\frac{(\gamma - 1) M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}} = \sqrt{\frac{(1,4 - 1)1,5^2 + 2}{2 \cdot 1,4 \cdot 1,5^2 - (1,4 - 1)}} \implies M_2 = 0,49.$$

Ο υπολογισμός της θερμοκρασίας  $T_2$  θα γίνει με τη βοήθεια των Εξισώσεων (5.34) δηλαδή

$$T_2 = T_{0,2} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right)^{-1},$$

όπου  $T_{0,2} = T_{0,1}$ ,  $T_{0,1} = p_{0,1} / (\rho_{0,1} R)$  και

$$\rho_{0,1} = \rho_1 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{1/(\gamma - 1)}.$$

Αντικαθιστώντας

$$\rho_{0,1} = 11,39 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \text{και} \quad T_{0,1} = 917,7 \text{ K} = T_{0,2},$$

δίνοντας

$$T_2 = 917,7 \text{ K} \left( 1 + \frac{1,4 - 1}{2} 0,49^2 \right)^{-1} \implies T_2 = 875,7 \text{ K}.$$

**Παράδειγμα 8.13**

Αέρα που εισέρχεται σε αεραγωγό θερμαίνεται με παροχή θερμότητας  $q = 100 \text{ KJ/kg}$ . Ο αέρας φτάνει το "όριο φραγμού" στο οποίο η ταχύτητα και η στατική του πίεση ισούται με  $600 \text{ m/s}$  και  $280 \text{ KPa}$  αντίστοιχα. Θεωρώντας ότι  $\gamma = 1,4$ ,  $R = 287 \text{ J/(kgK)}$  και  $c_p = 1,004 \text{ KJ/(kgK)}$ , υπολογίστε τη θερμοκρασία ανακοπής στην είσοδο του αεραγωγού αμελώντας τυχόν απώλειες τριβής.

Ο υπολογισμός της θερμοκρασίας ανακοπής στην είσοδο,  $T_{0,1}$ , θα γίνει με χρήση της σχέσης  $q = c_p(T_{0,2} - T_{0,1})$ , όπου  $q = 100 \text{ KJ/kg}$ . Παρατηρούμε δηλαδή ότι το μόνο που απαιτείται για τη λύση είναι η τιμή του μεγέθους  $T_{0,2}$ . Επειδή ο αέρας φτάνει στο "όριο φραγμού" έχουμε ότι

$$M_2 = 1 \implies c_2 = U_2 \implies c_2 = 600 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η θερμοκρασία τότε του αέρα στην έξοδο,  $T_2$ , ισούται με

$$c_2 = \sqrt{\gamma R T_2} \implies T_2 = \frac{c_2^2}{\gamma R} \implies T_2 = 895,97 \text{ K},$$

δίνοντας

$$T_{0,2} = T_2 + \frac{U_2^2}{2c_p} = 895,97 \text{ K} + \frac{600^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 1004 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}} \implies T_{0,2} = 1075,25 \text{ K}.$$

Επομένως,

$$T_{0,1} = T_{0,2} - \frac{q}{c_p} = 1075,25 \text{ K} - \frac{100 \frac{\text{KJ}}{\text{kg}}}{1,004 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}} = 975,65 \text{ K}.$$

**Παράδειγμα 8.14**

Αέρας θερμοκρασίας  $300 \text{ K}$  ρέει σε αεραγωγό με ταχύτητα  $87 \text{ m/s}$ . Στον αεραγωγό οι τριβές είναι αμελητέες και ο αέρας φτάνει το ηχητικό όριο στην έξοδο. Υπολογίστε το ποσό θερμότητας  $q$  που προσδίδεται και τις τιμές της πίεσης και θερμοκρασίας στην έξοδο. Θεωρείστε ότι  $\gamma = 1,4$  και  $R = 287 \text{ J/(kgK)}$ .

## 5 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

Για να υπολογίσουμε το ποσό θερμότητας θα πρέπει να γνωρίζουμε τις θερμοκρασίες ανακοπής  $T_{0,1}$  και  $T_{0,2}$  αφού

$$q = c_p (T_{0,2} - T_{0,1}) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_{0,2} - T_{0,1}).$$

Η θερμοκρασία ανακοπής στην είσοδο ισούται με

$$T_{0,1} = T_1 + \frac{(\gamma - 1) U_1^2}{2\gamma R} = 300K + \frac{(1,4 - 1) \left(87 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 1,4 \cdot 287 \frac{J}{kg K}} \implies T_{0,1} = 303,77K.$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια ότι

$$c_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{J}{kg K} \cdot 300K} = 347,19 \frac{m}{s} \implies M_1 = 0,25,$$

και ότι  $M_2 = 1$  διότι η ροή γίνεται ηχητική στην έξοδο έχουμε από την Εξίσωση (5.38) ότι

$$\frac{T_{0,2}}{T_{0,1}} = \frac{1}{M_1^2 (1 + \gamma) [2 + (\gamma - 1) M_1^2]} \implies T_{0,2} = 1182,73K.$$

Συλλέγοντας τα αποτελέσματα και αντικαθιστώντας στην δοσμένη σχέση για τη θερμότητα βρίσκουμε

$$q = \frac{1,4 \cdot 287 \frac{J}{kg K}}{1,4 - 1} (1182,73K - 303,77K) \implies q = 882,92 KJ.$$

### Παράδειγμα 8.15

Δείξτε ότι σε μία ροή Rayleigh, πρόσδοση θερμότητας οδηγεί σε αύξηση της ταχύτητας αν η ροή είναι υποηχητική και μείωση της ταχύτητας αν η ροή είναι υπερηχητική.

Από την εξίσωση ενέργειας όπως αυτή διατυπώθηκε στη Ενότητα 5.7.1 μπορούμε να γράψουμε για μία απειροστή πρόσδοση θερμότητας,  $\delta q$ , την σχέση

$$\delta q = dh + d\left(\frac{U^2}{2}\right) = dh + U dU = c_p dT + U dU,$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\delta q}{U^2} = \frac{\gamma R dT}{(\gamma - 1) U dU} \frac{dU}{U} + \frac{dU}{U} = \left[ \frac{\gamma R dT}{(\gamma - 1) U dU} + 1 \right] \frac{dU}{U}.$$

Οι δύο όροι στην αγκύλη απλοποιούνται ως εξής

$$\frac{\gamma R dT}{(\gamma - 1) U dU} + 1 = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1) U} \left( \frac{T}{U} - \frac{U}{R} \right) + 1 = \frac{1 - M^2}{(\gamma - 1) M^2}.$$

Προκύπτει τότε ότι

$$\frac{\delta q}{U^2} = \left[ \frac{1 - M^2}{(\gamma - 1) M^2} \right] \frac{dU}{U} \implies dU = \left[ \frac{(\gamma - 1) M^2}{1 - M^2} \right] \frac{\delta q}{U}.$$

Όταν λοιπόν  $\delta q > 0$ , συμπεραίνουμε ότι  $dU > 0$  για υποηχητική ροή και  $dU < 0$  για υπερηχητική ροή. Πράγματι επομένως κατά την πρόσδοση θερμότητας σε μία ροή Rayleigh, η ταχύτητα αυξάνεται για υποηχητική ροή και μειώνεται για υπερηχητική ροή.

### Παράδειγμα 8.16

Αέρας εισέρχεται σε αγωγό διαμέτρου  $D = 0,24m$  με ταχύτητα  $U = 100m/s$  και θερμοκρασία  $T = 398K$ . Υπολογίστε το μήκος του αγωγού για το οποίο η ροή γίνεται ηχητική, αν  $f = 0,02$ ,  $\gamma = 1,4$  και  $R = 287J/(kgK)$ .

Από τα δοσμένα μεγέθη έχουμε

$$c_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{J}{kgK} \cdot 398K} = 400 \frac{m}{s},$$

δίνοντας αριθμό Mach στην είσοδο ίσο με

$$M_1 = \frac{U_1}{c_1} = \frac{100 \frac{m}{s}}{400 \frac{m}{s}} = 0,25.$$

Με απλή αντικατάσταση τότε στην Εξίσωση (5.42) για  $M = M_1$  βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{f}{D} L^* &= \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left( \frac{\frac{\gamma + 1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right) \implies \\ \frac{0,02}{0,24m} L^* &= \frac{1 - 0,25^2}{1,4 \cdot 0,25^2} + \frac{1,4 + 1}{2 \cdot 1,4} \ln \left( \frac{\frac{1,4 + 1}{2} 0,25^2}{1 + \frac{1,4 - 1}{2} 0,25^2} \right) \implies \\ 0,0833 L^* &= 8,48m \implies L^* = 101,80m. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 8.17**

Να υπολογιστεί το κρίσιμο μήκος αγωγού διαμέτρου  $D = 15cm$  στον οποίο ρέει αέρας με  $\gamma = 1,4$  και  $M = 0,5$  στην είσοδό του αν ο συντελεστής τριβής ισούται με  $0,002$ .

Από την Εξίσωση (5.42) προκύπτει με αντικατάσταση ότι

$$\begin{aligned} L^* &= \frac{D}{f} \left[ \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left( \frac{\frac{\gamma + 1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right) \right] \\ &= \frac{0,15m}{0,002} \left[ \frac{1 - 0,5^2}{1,4 \cdot 0,5^2} + \frac{1,4 + 1}{2 \cdot 1,4} \ln \left( \frac{\frac{1,4 + 1}{2} 0,5^2}{1 + \frac{1,4 - 1}{2} 0,5^2} \right) \right] \\ &= 75m \left[ 2,14 + 0,86 \ln \left( \frac{0,3}{1,05} \right) \right] \implies L^* = 79,70m. \end{aligned}$$

---

## Βιβλιογραφία

- Batchelor, G.K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge Mathematical Library, 2000.
- Cengel, Y. & J. Cimbala. *Fluid mechanics*. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 2024.
- Chanson, H. *Hydraulics of open channel flow: an introduction*. Butterworth Heinemann; 2nd edition, 2004.
- Currie, I.G. *Fundamental mechanics of fluids*. Marcel-Dekker, 2003.
- Elger, D.F., B.C. Williams, C.T. Crowe & Roberson J.A. *Μηχανική ρευστών για μηχανικούς*. Εκδόσεις Τζιόλα, 2016.
- Evvett, J. & C. Liu. *2,500 solved problems in fluid mechanics and hydraulics*. McGraw-Hill, 1989.
- Giles, R.V., J.B. Evett & Liu C. *Fluid mechanics and hydraulics*. Schaum's outlines, 1994.
- Granger, R. *Fluid mechanics*. Dover, 1995.
- Hanif Chaudhry, M. *Open-channel flow*. Springer; 2nd edition, 2008.
- Hughes, W. & J. Brighton. *Fluid dynamics*. Schaum's outlines, 1999.
- Mott, R.L. & J.A. Untener. *Εφαρμοσμένη μηχανική ρευστών*. Εκδόσεις Τζιόλα, 2016.
- Pozrikidis, C. *Fluid dynamics - theory, computation, and numerical simulation*. Springer, 2017.
- Schlichting, H. & K. Gersten. *Boundary-layer theory*. Springer, 2017.
- Siginer, D.A., D. De Kee & R.P. Chhabra. *Advances in the flow and rheology of non-newtonian fluids, volume 8*. Elsevier Science, 1999.
- Versteeg, H.K. & W. Malalasekera. *Εισαγωγή στην υπολογιστική ρευστομηχανική - η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων*. Εκδόσεις Τζιόλα, 2016.
- Αυλωνίτης, Σ.Α. & Δ.Α. Αυλωνίτης. *Μηχανική των ρευστών*. Εκδόσεις Ίων, 2006.
- Κορωνάκης, Π. *Μηχανική ρευστών*. Εκδόσεις Ίων, 2001.
- Παπανίκας, Δ. *Εφαρμοσμένη ρευστομηχανική*. Εκδόσεις Παπανίκα & Σία, 2010.
- Τσαγκάρης, Σ. *Μηχανική των ρευστών*. Εκδόσεις Συμεών, 1995.



---

## Ευρετήριο

### Α

Αδιάστατη ροϊκή συνάρτηση, 153  
Ακροφύσιο de Laval, 200  
Αποκλίνουσες ροές, 129  
Αριθμός Cauchy, 94  
Αριθμός Froude, 93  
Αριθμός Mach, 93  
Αριθμός Strouhal, 94  
Αριθμός Weber, 94

### Β

Βαλβίδες, 128  
Βαρόμετρο, 21  
Βαροτροπικό ρευστό, 58

### Γ

Γενικευμένα Νευτώνεια ρευστά, 16  
Γεωμετρική ομοιότητα, 95  
Γραμμές Mach, 190  
Γωνία Mach, 190

### Δ

Δευτερεύουσες, 129  
Δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος, 62  
Δεύτερος συντελεστής ιξώδους, 15  
Διάγραμμα Moody, 126  
διάγραμμα Moody, 126  
Διασταλτικά, 17  
Διαστατική ανάλυση, 86

Διατμητική τάση, 10

Διατμητική ταχύτητα, 169

Διηχητική ροή, 186

Δίκτυα σωληνώσεων, 132

Διορθωτικός συντελεστής, 55

Δυναμική ενέργεια, 49

Δυναμική ομοιότητα, 95

Δυναμικό ιξώδες, 99

### Ε

Εκκένωση δεξαμενής, 47

Ελαστικές δυνάμεις, 94

Ενέργεια, 49

Ενθαλπία, 53, 64

Ενθαλπία ανακοπής, 197

Εντροπία, 63

Εξίσωση Swamee-Jain, 124

Εξίσωση ενέργειας, 49

Εξίσωση συνέχειας, 1

Επιφάνεια ελέγχου, 1

Έργο, 64

Έργο αρνητικό, 51

Έργο θετικό, 51

Ερπυσες ροές, 105

Έρπυσες ροές, 92

### Ζ

Ζώνη δράσης, 190

Ζώνη σιωπής, 190

## Η

Ηλεκτρική ενέργεια, 49

## Θ

Θερμική ενέργεια, 49  
Θερμοκρασία ανακοπής, 197  
Θερμότητα αρνητική, 51  
Θερμότητα θετική, 51  
Θεώρημα του Kelvin, 58  
Θεώρημα του Stokes, 59

## Ι

Ιξώδες υπόστρωμα, 168  
Ιξωδόμετρα, 34  
Ιξωδοπλαστικά, 17

## Κ

Κάθετο κρουστικό κύμα, 203  
Κανονικοποίηση Navier-Stokes, 103  
Κατευθύνοντα συνημίτονα, 18  
Κινηματική ομοιότητα, 95  
Κινητική ενέργεια, 49  
Κλίμακα, 96  
Κόμβος, 130  
Κρίσιμα ρευστομηχανικά μεγέθη, 196  
Κρίσιμη διατομή, 196  
Κυλινδρικές συντεταγμένες, 32  
Κώνος Mach, 190

## Λ

Λογαριθμική κατανομή ταχυτήτων,  
171

## Μ

Μαγνητική ενέργεια, 49  
Μαζικές δυνάμεις, 10  
Μεγέθη ανακοπής, 196  
Μετάγγιση, 43  
Μεταφορική επιτάχυνση, 13  
Μέτρο ελαστικότητας, 188

Μηδενικός θερμοδυναμικός νόμος, 62

Μήκος ανάμειξης, 170

Μήκος κύματος, 191

Μοντέλο, 97

Μοντέλο τύρβης  $k - \epsilon$ , 167

Μοντέλο τύρβης SST, 167

## Ν

Νευτώνεια ρευστά, 14

Νόμος απόκλισης της ταχύτητας, 172

## Ο

Όγκος ελέγχου, 1

Ολικά μεγέθη, 196

Ολική ενθαλπία, 197

Ολική θερμοκρασία, 197

Ολική πίεση, 198

Ολική πυκνότητα, 198

Ολικός συντελεστής διατμητικής τάσης,  
161, 175

Ομοιότητα, 94

Ομόλογα σημεία, 96

Οπισθέλκουσα δύναμη, 161

Οριακό στρώμα, 148

## Π

Παράγοντας σχήματος, 159, 174

Πάχος ενέργειας, 159

Πάχος μετατόπισης, 157, 174

Πάχος οριακού στρώματος, 149

Πάχος ορμής, 158, 174

Περιοχή μετάβασης, 168

Πίεση ανακοπής, 198

Πλάγιο κρουστικό κύμα, 206

Πρώτος θερμοδυναμικός νόμος, 62

Πρωτότυπο, 97

Πυκνότητα ανακοπής, 198

## Ρ

Ροή Rayleigh, 209

Ροή Stokes, 105

Ροϊκή συνάρτηση, 153

Ροόμετρο Ventouri, 45

ροόμετρο Ventouri, 45

Ρυθμός διάτμησης, 16

## Σ

Σημεία ανακοπής, 196

Σημείο διακλάδωσης, 130

Στραγγαλισμένη ροή, 196

Στρωτή ροή, 98

Συγκλίνουσες ροές, 129

Συνδυασμένο ύψος απωλειών, 130

Συνεχείς απώλειες, 120

Συνημίτονα κατεύθυνσης, 18

Συνθήκη μη ολίσθησης, 8, 24

Συντελεστής τοπικών απωλειών, 129

Συχνότητα κύματος, 191

Σχετική τραχύτητα, 123

## T

Τανυστής τάσεων, 10

Τανυστής τάσεων Reynolds, 166

Τάση ατμών, 22

Ταχύτητα ελεύθερης ροής, 149

Ταχύτητα του ήχου, 188

Ταχύτητα τριβής, 169

Τοπικές απώλειες, 128, 129

Τοπική επιτάχυνση, 13

Τοπικός συντελεστής διατμητικής τάσης,  
160

Τραχύτητα, 123

Τρίτος θερμοδυναμικός νόμος, 63

Τύρβη, 99, 164

Τυρβώδες στρώμα, 168

Τυρβώδης ροή, 98

## Υ

Υδραυλική διάμετρος, 214

Υπερηχητική ροή, 93, 185, 186

Υπερυπερηχητική ροή, 186

Υποχηχητική ροή, 93, 185, 186

## Φ

Φαινόμενο Doppler, 193

## Ψ

Ψευδοπλαστικά, 17

## A

Advection, 13

## B

Barotropic, 58

Bernoulli, 36

Bingham, 17

Blasius, 124, 154

Boundary layer, 148

Buckingham, 89

Buffer layer, 168

## C

Choked flow, 196

Clausius, 63

Colebrook, 124

Couette, 26

Creeping flow, 105

Crocco, 65

## D

de Laval nozzle, 200

Diffusion, 13

Displacement thickness, 157

Doppler effect, 193

Drag force, 161

## E

Energy thickness, 159

Enthalpy, 64

Entropy, 63

## F

Friction coefficient, 160

Friction velocity, 169

## H

Haaland, 125

Hazen-Williams, 122

Hypersonic flow, 186

## J

Joule, 50

Junction, 130

## K

Kelvin, 58, 63

Κρουστικά κύματα, 203

## M

Mach, 41

Mach angle, 190

Mach cone, 190

Mach line, 190

Mach number, 93

Minor losses, 129

Mixing length, 170

Momentum thickness, 158

Moody diagram, 126

## N

Navier, 9, 14, 28, 36

Navier-Stokes, 150

Newton, 39, 148, 194

Normal shock wave, 203

## O

Oblique shock wave, 206

## P

Pitot, 42

Planck, 63

Poiseuille, 28

Prandtl, 125

## R

RANS εξισώσεις, 165

Rayleigh, 87

Relative roughness, 123

Reynolds, 13, 92

Reynolds stress tensor, 166

Roughness, 123

## S

Shape factor, 159

Shear velocity, 169

Shock waves, 203

Stagnation density, 198

Stagnation enthalpy, 197

Stagnation points, 196

Stagnation pressure, 198

Stagnation temperature, 197

Stokes, 9, 13, 14, 28, 36, 59

Stokes flow, 105

Subsonic flow, 185, 186

Supersonic flow, 185, 186

## T

Torricelli, 21

Total density, 198

Total enthalpy, 197

Total pressure, 198

Total temperature, 197

Transonic flow, 186

Turbulence, 164

Turbulent region, 168

Τοπική διατμητική τάση, 160

## V

Velocity defect law, 172

Viscous sublayer, 168  
von Kármán, 163

**Z**

Zone of action, 190  
Zone of silence, 190





