Εξίσωση Bernoulli

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\,\mathbf{U} = \frac{\mathbf{f}}{\rho} - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu\nabla^2\mathbf{U}$$

- Για μόνιμη & αστρόβιλη ροή

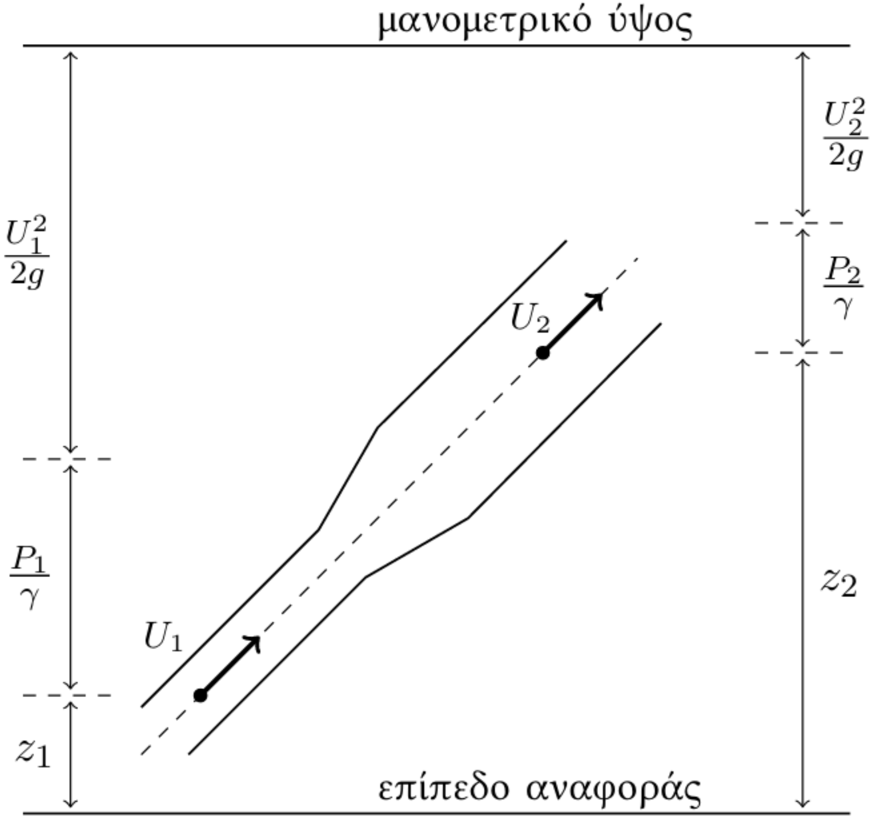
$$\rho\,(\mathbf{U}\cdot\nabla)\,\mathbf{U} = -\nabla P + \mathbf{f}$$

$$(\mathbf{U}\cdot\nabla)\,\mathbf{U} = \frac{1}{2}\nabla\,(\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{U}) = \frac{1}{2}\nabla\,(\mathbf{U}\cdot\mathbf{U})$$

Daniel Bernoulli

$$\frac{1}{2}\rho U^2 + P + \rho g z = \text{σταθερό}$$

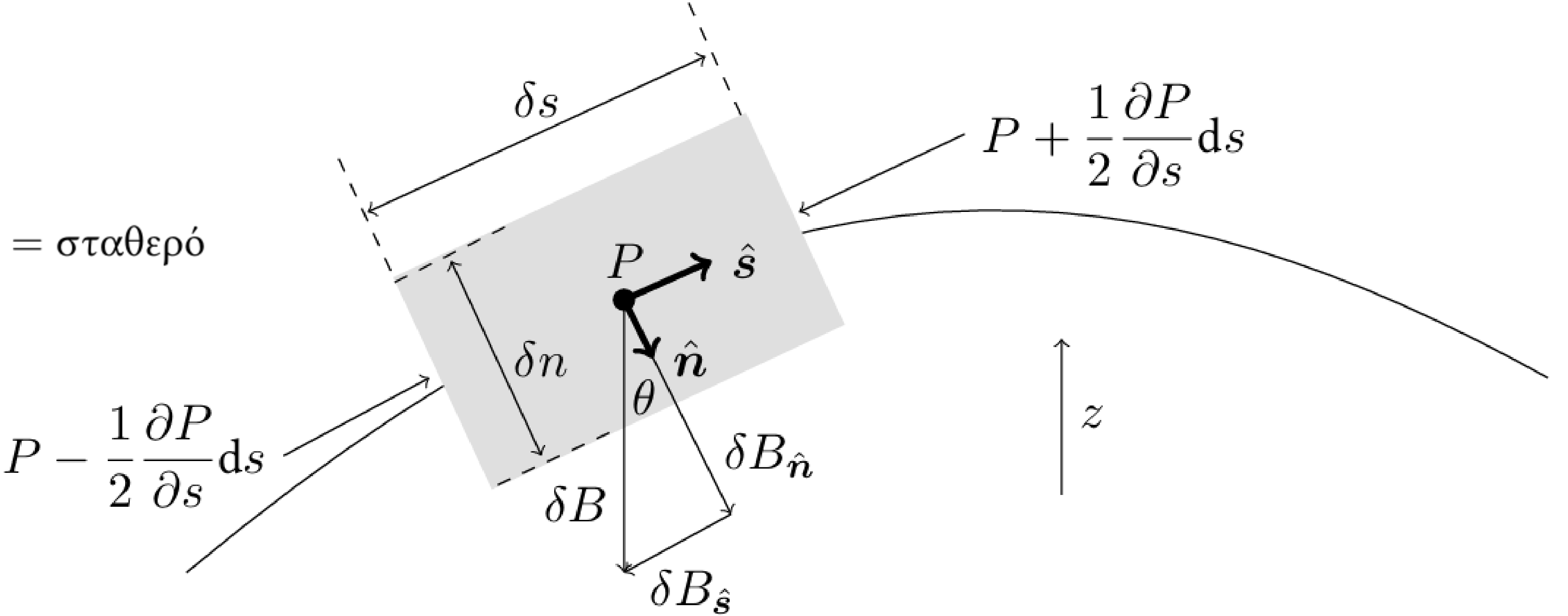
$$\frac{U^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z = \text{σταθερό}$$



Εξίσωση Bernoulli

- Κατά μήκος μίας γραμμής ροής 2D/3D

$$\frac{1}{2}\rho U^2 + P + \rho g z = \text{σταθερό}$$



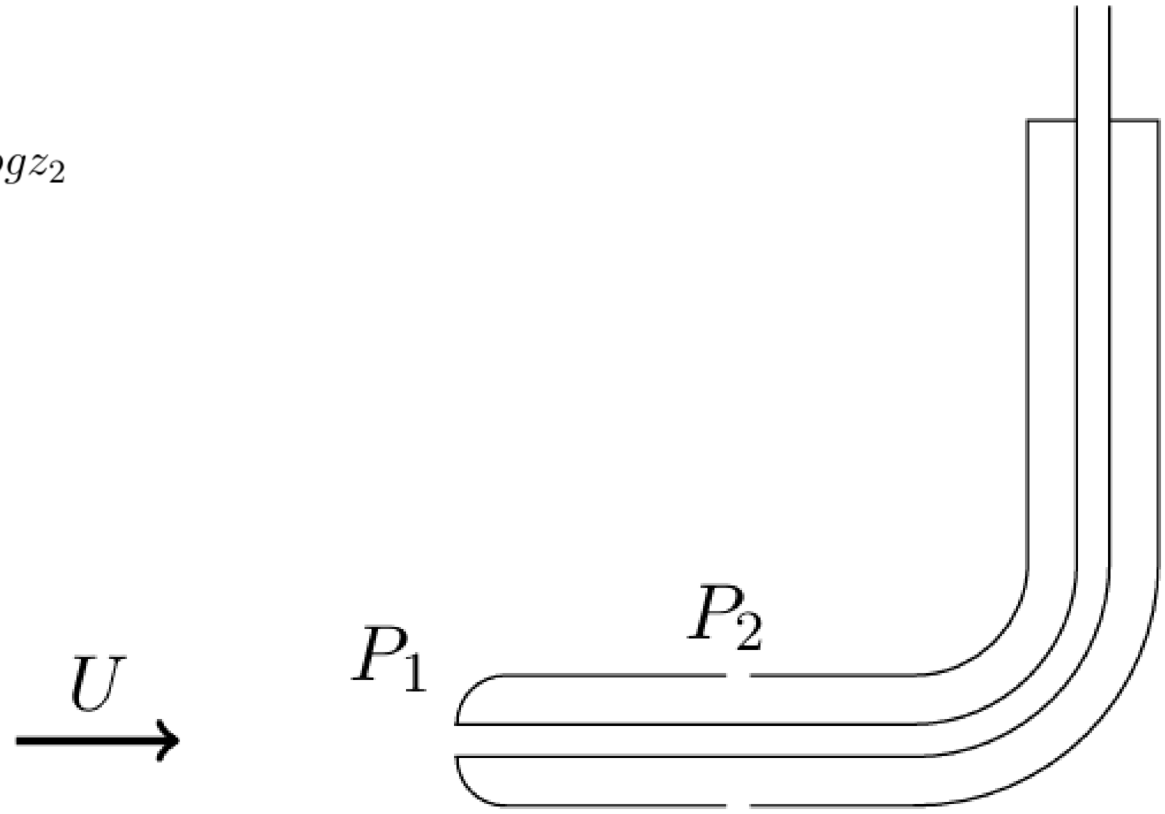
Εξίσωση Bernoulli

- Αμελητέα συνεκτικά φαινόμενα: π.χ. στενοί αγωγοί μεγάλου μήκους
- Μόνιμη ροή: $dU/dt + dP/dt \neq 0$
- Ασυμπίεστη ροή: $d\rho/dt=0$
- Αμελητέα θερμορροή: $dT/dt = 0$
- Μηδενικό προστιθέμενο έργο: $W=0$

Εφαρμογές

- Σωλήνας Pitot

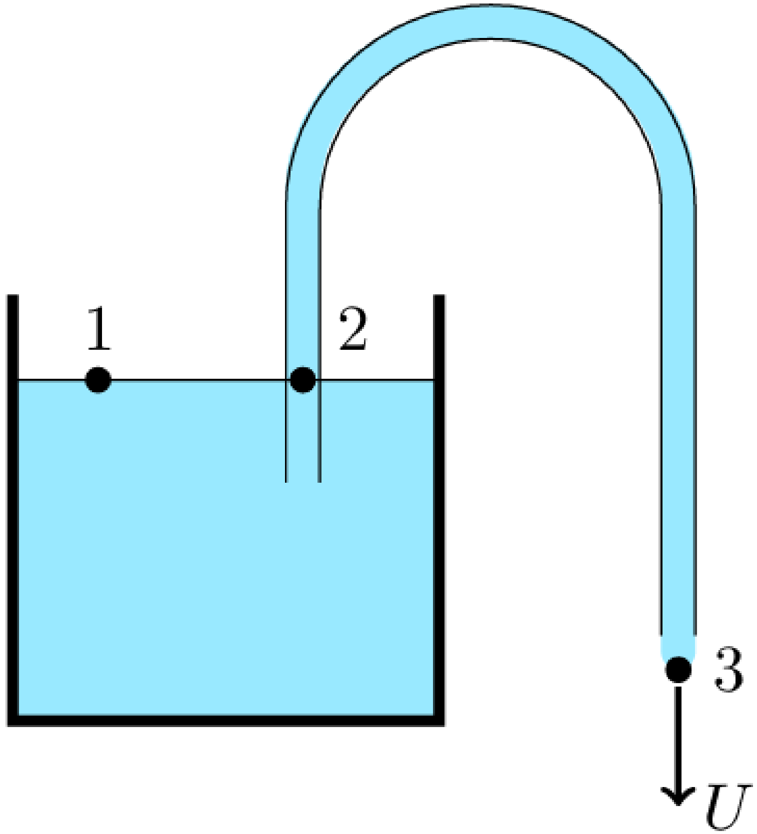
$$\frac{1}{2}\rho U_1^2 + P_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + P_2 + \rho g z_2$$



Εφαρμογές

- Μετάγγιση ροής

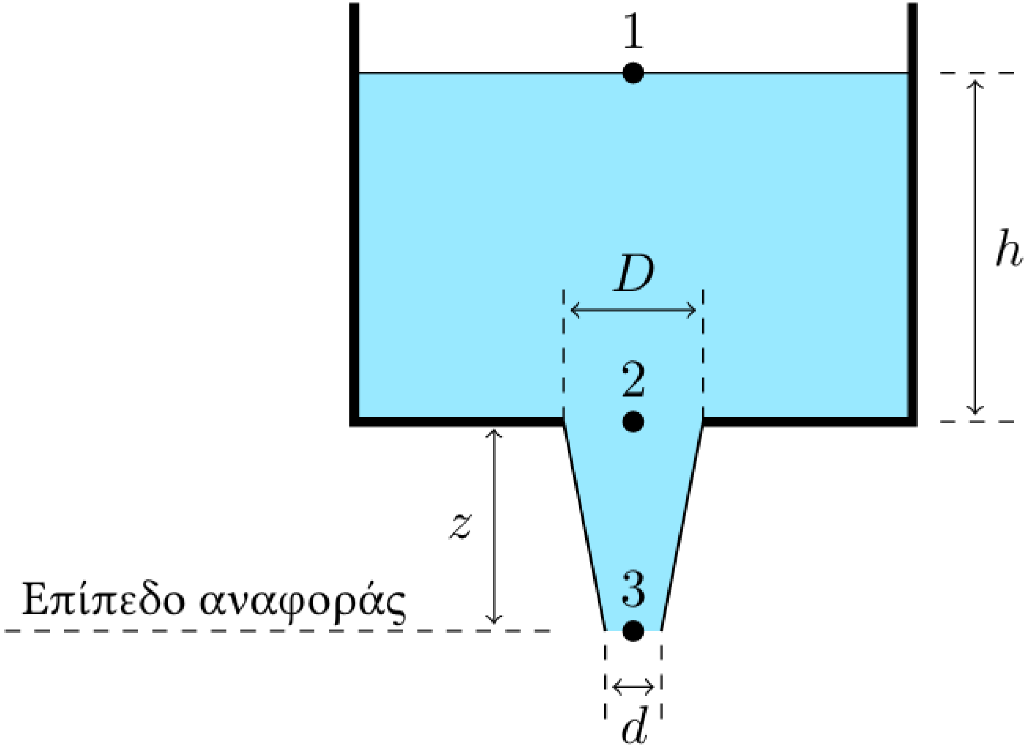
$$\frac{1}{2}\rho U_1^2 + P_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + P_2 + \rho g z_2$$



Εφαρμογές

- Διάμετρος πίδακα σε εκκένωση δεξαμενής

$$\frac{1}{2}\rho U_1^2 + P_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + P_2 + \rho g z_2$$

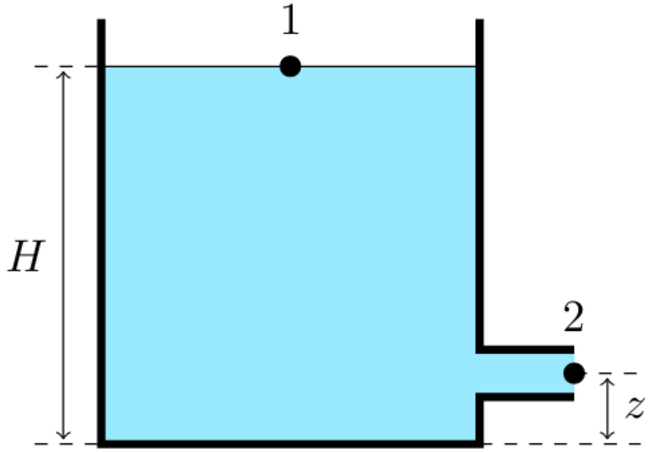


Άσκηση

Νερό ρέει σε ένα ποτιστικό λάστιχο μεταβλητής διατομής. Συγκεκριμένα, η διάμετρος του λάστιχου όταν το νερό εισέρχεται σε αυτό είναι $4\ cm$, ενώ όταν εξέρχεται από αυτό η διάμετρος ελαττώνεται σε $2\ cm$. Αν η συνολική πτώση πίεσης ισούται με $\Delta P = 7{,}5\ kPa$, υπολογίστε την ταχύτητα του νερού στην είσοδο του λάστιχου.

Άσκηση

Μια δεξαμενή με νερό φέρει οριζόντιο αγωγό απορροής διαμέτρου d=0.01m σε ύψος z=1m από τον πυθμένα της, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η δεξαμενή γεμίζει με νερό μέχρι η ελεύθερη επιφάνεια να φτάσει τα 10m ύψος. Αν η πυκνότητα του νερού ισούται με 1000kg/m^3, να βρεθεί ο ρυθμός εκροής του νερού από τη δεξαμενή.

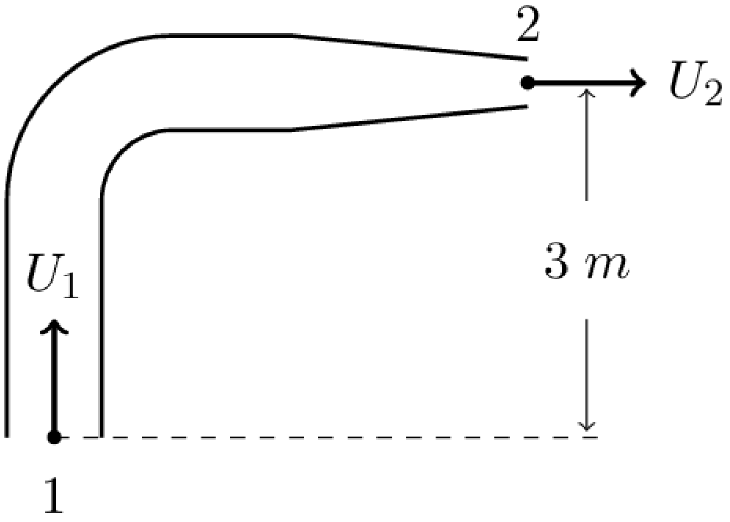


Άσκηση

Η διατομή μίας σωληνογραμμής μειώνεται από τα $4\ cm^2$ σε ένα σημείο 1 στα $2\ cm^2$ σε ένα σημείο 2 που βρίσκεται $2\ m$ υψηλότερα από το 1. Αν η σωληνογραμμή διαρρέεται από νερό παροχής $Q = 0{,}002\ m^3/s$, υπολογίστε τη διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων 1 και 2, αν το ειδικό βάρος του νερού ισούται με $9810\ N/m^3$.

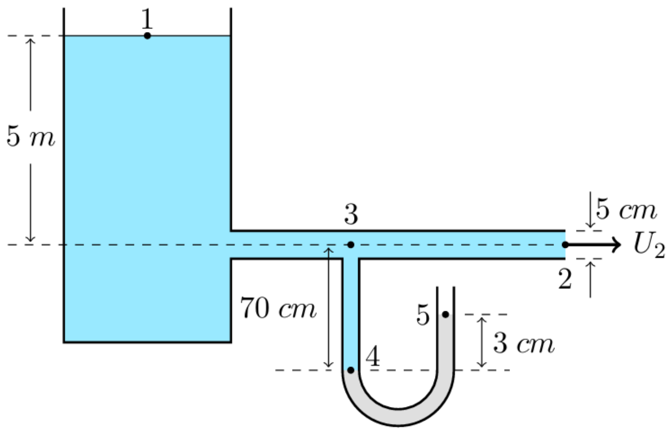
Άσκηση

Νερό ρέει κάθετα σε σωλήνα διαμέτρου 0,1 m και εξέρχεται από ακροφύσιο 5 cm, όπως στο σχήμα. Η ταχύτητα εξόδου του νερού από το ακροφύσιο θα πρέπει να είναι τουλάχιστον 10 m/s. Ποια πρέπει να είναι η πίεση στο σημείο 1 του σχήματος αν ο σωλήνας έχει 3 m ύψος;



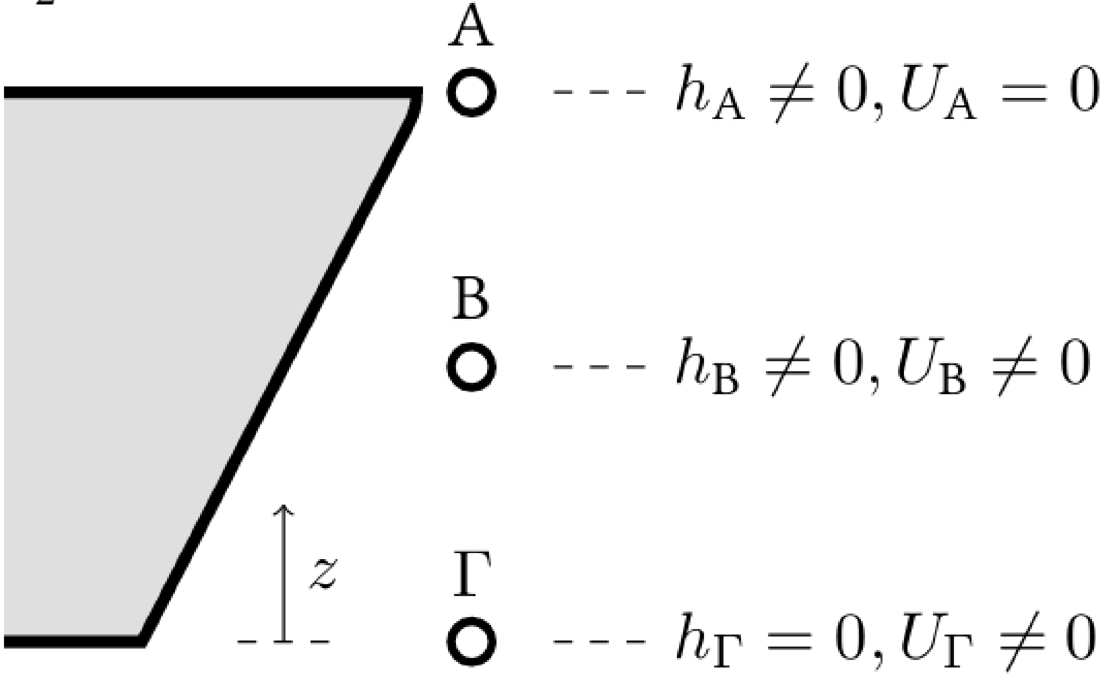
Άσκηση

Νερό ρέει από μία πολύ μεγάλη δεξαμενή σε ένα σωλήνα. Ο σωλήνας αυτός συνδέεται με ένα διαφορικό μανόμετρο το οποίο περιέχει υδράργυρο (Hg). Χρησιμοποιώντας τις αποστάσεις όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, υπολογίστε την ταχύτητα του νερού στην έξοδο του σωλήνα U_2 και την αντίστοιχη ογκομετρική παροχή. Η ειδική βαρύτητα του υδραργύρου $S.G._{Hg} = 13{,}6$.



Διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{1}{2}mU_{\mathrm{A}}^2 + mgh_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}mU_{\mathrm{B}}^2 + mgh_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}mU_{\Gamma}^2 + mgh_{\Gamma}$$

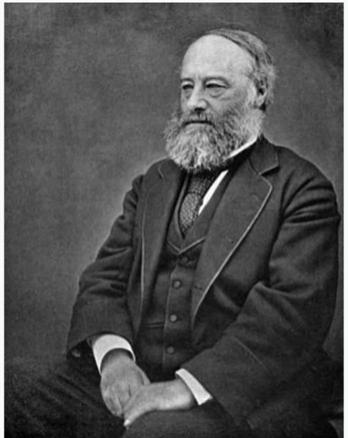


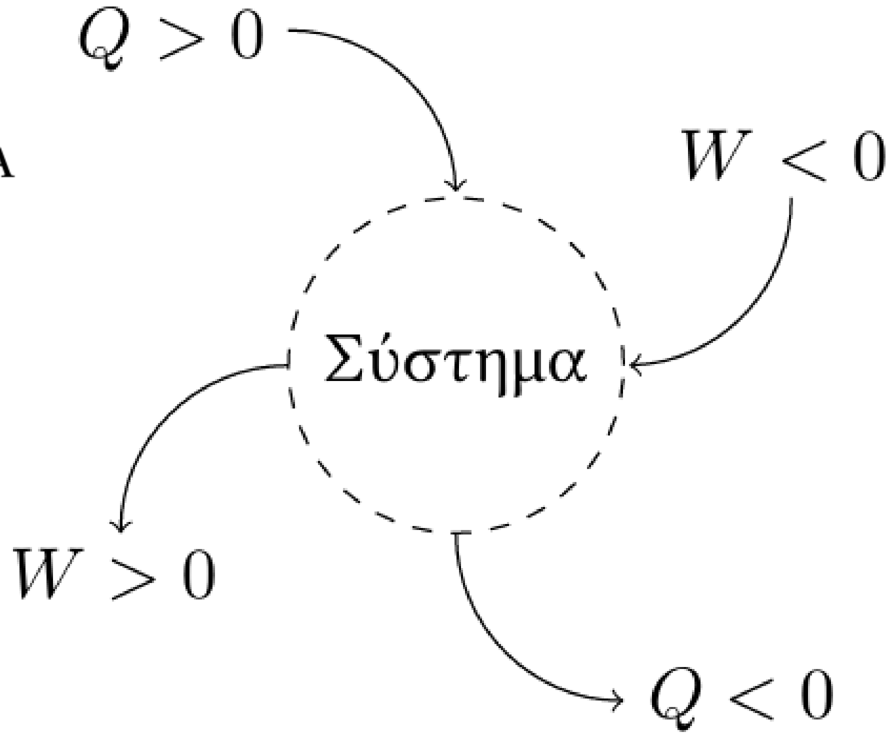
Διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{Q}_\kappa - \dot{W}_\kappa$$

$$\dot{Q}_\kappa - \dot{W}_\kappa = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{OE} \epsilon\rho\,\mathrm{d}V + \int_{EE} \epsilon\rho\,\mathbf{U}\cdot\mathbf{dA}$$

James Prescott Joule

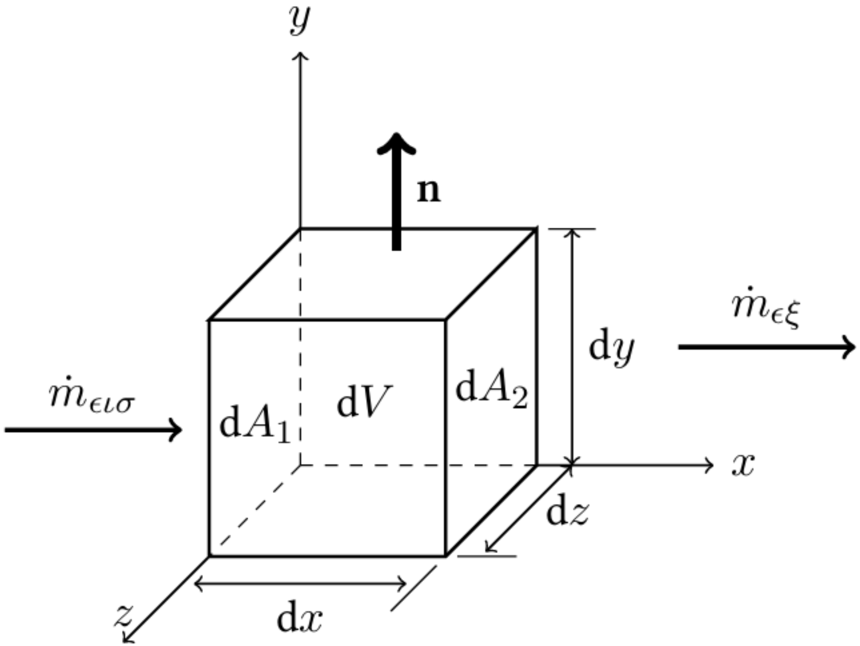




Εφαρμογές

- Ενεργειακή ανάλυση μόνιμων ροών

$$\dot{Q}_\kappa - \dot{W}_\kappa = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{OE} \epsilon\rho\,\mathrm{d}V + \int_{EE} \epsilon\rho\,\mathbf{U}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}$$



Άσκηση

Μία αντλία χρησιμοποιείται για την ανύψωση νερού σταθερής παροχής $Q = 0{,}01\ m^3/s$ από ένα σημείο A σε ένα σημείο B που βρίσκεται $3{,}04\ m$ ψηλότερα. Η διάμετρος του σωλήνα πριν από την αντλία (σημείο A) είναι $d_A = 50\ mm$ και μετά την αντλία (σημείο B) είναι $d_B = 40\ mm$. Εάν οι απώλειες τριβής λόγω ροής $h_f = 2\ m$ και $P_B - P_A = 30\ kPa$, υπολογίστε την ενέργεια που αποδίδει η αντλία στο νερό ανά μονάδα βάρους του.