ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ ΙΙ

Εαρινό εξάμηνο 2024

Διαστατική ανάλυση

- Ζητείται η πτώση πίεσης ΔP μόνιμης ροής ασυμπίεστου ρευστού σε λείο κυλινδρικό αγωγό.

$$\Delta P = f(D, \rho, U, \mu)$$

- Ισοδύναμα: $$\frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho U^2} = g\left(\frac{\rho\, U D}{\mu}\right)$$

Μέθοδος Rayleigh

- Έστω ανεξάρτητη μεταβλητή *A* συναρτήσει *n* εξαρτημένων μεταβλητών *A1*, *A2*, …, *An* μέσω μίας εκθετικής σχέσης της μορφής:

$$[A] = \left[C \times A_1^{\alpha} \cdot A_2^{\beta} \cdot \ldots \cdot A_n^{\nu}\right]$$

Μέθοδος Rayleigh

- Βασικές διαστάσεις: α) F L T

  β) **M L T**

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \;\Rightarrow F = M\frac{L}{T^2}$$

Μέγεθος	Σύμβολο	Διαστάσεις
Επιφάνεια	A	L^2
Όγκος	V	L^3
Παροχή όγκου	$\dot{Q}$	L^3T^{-1}
Παροχή μάζας	$\dot{m}$	M^1T^{-1}
Ταχύτητα	U	L^1T^{-1}
Επιτάχυνση	a	L^1T^{-2}
Πίεση	P	$M^1L^{-1}T^{-2}$
Δύναμη	F	$M^1L^1T^{-2}$
Ενέργεια	$\mathcal{E}$	$M^1L^2T^{-2}$
Πυκνότητα	ρ	M^1L^{-3}
Ειδικό βάρος	γ	$M^1L^{-2}T^{-2}$
Δυναμικό ιξώδες	μ	$M^1L^{-1}T^{-1}$
Κινηματικό ιξώδες	ν	L^2T^{-1}
Μέτρο ελαστικότητας	E	$M^1L^{-1}T^{-2}$

Μέθοδος Rayleigh

- Βήμα 1: γράφουμε τη συναρτησιακή σχέση μεταξύ του άγνωστου μεγέθους και των γνωστών μεγεθών που επιλέχθηκαν,
- Βήμα 2: υπολογίζουμε τους συνολικούς εκθέτες για κάθε μία από τις βασικές διαστάσεις,
- Βήμα 3: εφαρμόζουμε την αρχή της διαστατικής ομοιογένειας,
- Βήμα 4: λύνουμε το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων που προκύπτει.

Θεώρημα Π (Buckingham)

- Εάν σε ένα πρόβλημα υπάρχουν *n* παράμετροι οι οποίες περιγράφονται από *m* βασικές διαστάσεις, τότε η εξίσωση που συνδέει όλα τα μεγέθη αυτά θα έχει *n – m* αδιάστατες ομάδες.

$$\Pi_1 = f\left(\Pi_2, \Pi_3, \cdots, \Pi_{n-m}\right)$$

Π1: ανεξάρτητη μεταβλητή

Π2, Π3, Πn-m: εξαρτημένες μεταβλητές

Μέθοδος Buckingham

- Βήμα 1: Ταυτοποιούμε την εξίσωση που συνδέει τη μοναδική ανεξάρτητη μεταβλητή με τις αντίστοιχες *(n-1)* εξαρτημένες,
- Βήμα 2: για κάθε μία από τις εξαρτημένες μεταβλητές γράφουμε το συνδυασμό των βασικών διαστάσεων που τις περιγράφουν,
- Βήμα 3: από τις *m* βασικές διαστάσεις που προέκυψαν από το Βήμα 2, επιλέγουμε *m* ανεξάρτητες μεταβλητές. Οι μεταβλητές αυτές θα πρέπει αφενός να περιέχουν όλες τις βασικές διαστάσεις και αφετέρου να μην σχηματίζουν αδιάστατες Π-ομάδες μεταξύ τους,
- Βήμα 4: αναγνωρίζουμε τις *(n-m)* αδιάστατες Π-ομάδες που προκύπτουν με κατάλληλο συνδυασμό των *m* μεταβλητών που επιλέχθηκαν στο Βήμα 3,
- Βήμα 5: επιλέγουμε μία διάσταση για απαλοιφή και συνεχίζουμε μέχρι να απαλειφθούν όλες,
- Βήμα 6: οι αδιάστατες ομάδες που απομένουν μετά την ολοκλήρωση του Βήματος 5 είναι οι ζητούμενες Π-ομάδες,
- Βήμα 7: γράφουμε την Π-ομάδα που περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή ως συνάρτηση των υπολοίπων Π-ομάδων που περιέχουν τις εξαρτημένες μεταβλητές.

Μέθοδος Buckingham

- Παράδειγμα: πτώση σφαίρα μάζας m από ύψος h που εκτελεί ελεύθερη πτώση εξαιτίας της βαρύτητας g

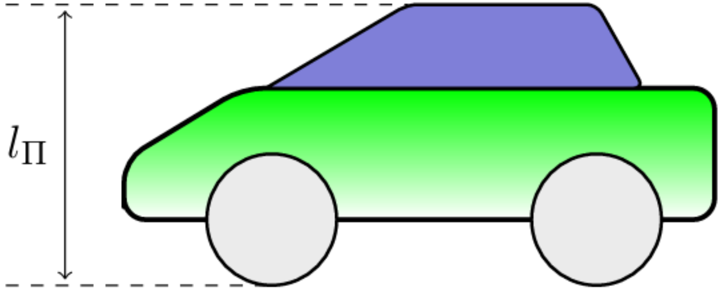
$$t = f(m, h, g)$$

Βασικές αδιάστατες ομάδες

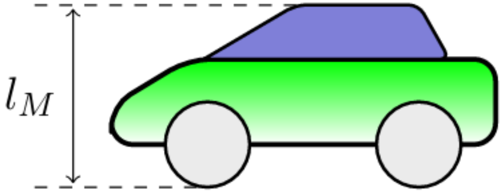
Ορισμός	Σύμβολο (Όνομα)	Φυσική ερμηνεία
$\dfrac{\rho U L}{\mu}$	Re (Reynolds)	$\dfrac{\text{αδρανειακές δυνάμεις}}{\text{δυνάμεις ιξώδους}}$
$\dfrac{\Delta P}{\rho U^2}$	Eu (Euler)	$\dfrac{\text{δυνάμεις πίεσης}}{\text{αδρανειακές δυνάμεις}}$
$\dfrac{U}{c}$	M (Mach)	$\dfrac{\text{αδρανειακές δυνάμεις}}{\text{δυνάμεις συμπιεστότητας}}$
$\dfrac{U}{\sqrt{gL}}$	Fr (Froude)	$\dfrac{\text{αδρανειακές δυνάμεις}}{\text{δυνάμεις βαρύτητας}}$
$\dfrac{\rho U^2 L}{\sigma}$	We (Weber)	$\dfrac{\text{αδρανειακές δυνάμεις}}{\text{δυνάμεις επιφανειακής τάσης}}$
$\dfrac{\rho U^2}{E}$	Ca (Cauchy)	$\dfrac{\text{αδρανειακές δυνάμεις}}{\text{δυνάμεις συμπιεστότητας}}$

Ομοιότητα

- Γεωμετρική: $l_\Pi / l_M = L$



(α) Πρωτότυπο



(β) Μοντέλο

Ομοιότητα

- Δυναμική

  Αδρανειακές δυνάμεις: $F_R = \rho L^2 U^2$

  ρ: πυκνότητα του ρευστού

  U: ταχύτητα

  L:χαρακτηριστικό μήκος
- Κινηματική

  U_Π / U_M

Άσκηση

- Κύλινδρος διαμέτρου D επιπλέει σε κατακόρυφη θέση σε υγρό ειδικού βάρους όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ο κύλινδρος μετατοπιστεί κατά την κατακόρυφη διεύθυνση και αφεθεί ελεύθερος, εκτελεί ταλάντωση γύρω από ένα σημείο ισορροπίας με συχνότητα ω. Αν η μάζα του κυλίνδρου είναι m, υπολογίστε την εξάρτηση της συχνότητας από τα υπόλοιπα μεγέθη.