Εξίσωση στροβιλότητας

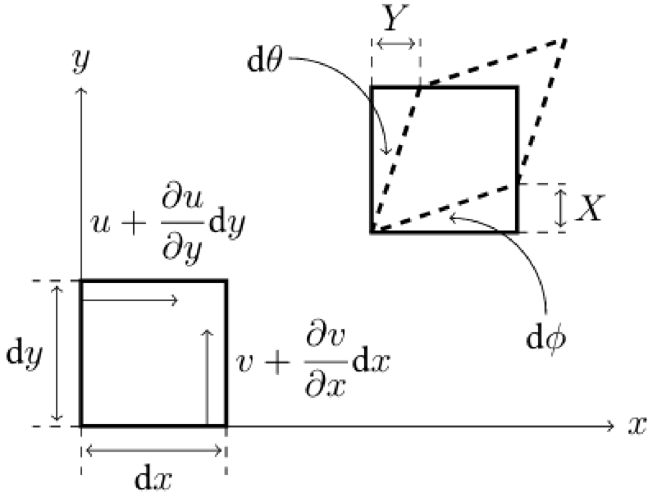
- Γωνιακή παραμόρφωση 2D ροϊκού στοιχείου

$$\tan(\mathrm{d}\phi) = \frac{X}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}t \approx \mathrm{d}\phi \qquad \omega_{\mathrm{d}\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\tan(\mathrm{d}\theta) = \frac{Y}{\mathrm{d}y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}t \approx \mathrm{d}\theta. \qquad \omega_{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \boxed{-}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\omega_{\mathrm{d}\phi} + \omega_{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

περιστροφή αριστερά: + δεξιά: -



- Στροβιλότητα Ω ροϊκού στοιχείου

$$\mathbf{\Omega} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{i}} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{j}} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{k}} = \nabla \times \mathbf{U}$$

Εξίσωση στροβιλότητας

- Navier-Stokes, ασυμπίεστο, Νευτώνειο ρευστό

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\,\mathbf{U} = \frac{\mathbf{f}}{\rho} - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{U}$$

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla)\,\mathbf{U} = \frac{1}{2}\nabla\left(\mathbf{U}^2\right) - \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U})$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\left(\mathbf{U}^2\right) - \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) = \frac{\mathbf{f}}{\rho} - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{U}$$

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla \times \left[\nabla\left(\mathbf{U}^2\right)\right] - \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{\rho}\nabla \times \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla \times \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{\Omega}$$

$$\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{\Omega}) = \mathbf{U}\,(\nabla \cdot \mathbf{\Omega}) - (\nabla \cdot \mathbf{U}) - (\mathbf{U} \cdot \nabla)\,\mathbf{\Omega} + (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla)\,\mathbf{U}$$

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\,\mathbf{\Omega} = (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla)\,\mathbf{U} + \nu \nabla^2 \mathbf{\Omega}$$

Νόμοι θερμοδυναμικής

- 0ος νόμος: αν Α, Β σε θερμοδυναμική ισορροπία, τότε $T_A = T_B$
- 1ος νόμος: $Q – \Delta E + W$
- 2ος νόμος: $\Delta S \geq 0$, όπου $dS = \delta Q/T$
- 3ος νόμος: $T \to 0,\ S \to 0$

Έργο & Ενθαλπία

- Έργο

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$$

Έργο (ισοβαρής μεταβολή)

$$W = P\,\Delta V.$$

- Ενθαλπία

$$H = E + PV$$

- 1ος νόμος (ισοβαρής μεταβολή 1→2)

$$Q_{21} = E_2 - E_1 + P\,(V_2 - V_1) = (E_2 + PV_2) - (E_1 + PV_1) = H_2 - H_1$$

- Ισοδύναμα συναρτήσει εντροπίας & ενθαλπίας

$$\mathrm{d}q = \mathrm{d}e + P\,\mathrm{d}v \Rightarrow \mathrm{d}q = \mathrm{d}e + P\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\frac{1}{\rho}\mathrm{d}P = \mathrm{d}h - T\mathrm{d}s \Rightarrow \frac{1}{\rho}\nabla P = \nabla h - T\nabla s$$

Εξίσωση Crocco

- Navier-Stokes, για μη συνεκτικό ρευστό

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\left(\mathbf{U}^2\right) - \mathbf{U}\times\mathbf{\Omega} = -\frac{\nabla P}{\rho}$$

- Από εξίσωση εντροπίας & ενθαλπίας

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\left(\mathbf{U}^2\right) - \mathbf{U}\times\mathbf{\Omega} = T\nabla s - \nabla h$$

$$\boxed{\mathbf{U}\times\mathbf{\Omega} + T\nabla s} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{U}^2 + h\right)$$

Luigi Crocco

Άσκηση 1

Αποδείξτε ότι για μία ροή με πεδίο ταχύτητας U = (u,0,0) ισχύει ότι $(\Omega \cdot \nabla)\, U = 0$

Άσκηση 2

Αποδείξτε ότι για διδιάστατη ροή $(\Omega \cdot \nabla)U=0$ με αποτέλεσμα η εξίσωση $D\Omega/Dt=(\Omega \cdot \nabla)U + \nu\nabla^2\Omega$ απλοποιείται στην $D\Omega/Dt = \nu\nabla^2\Omega$

Άσκηση 3

Έστω το διανυσματικό πεδίο $u = 6x^2y\,\hat{i} + (4x-4z)\,\hat{j} + 12z^2\,\hat{k}$. Υπολογίστε την γωνιακή ταχύτητα ω.

$\hat{\omega} = 2\,\hat{i} + (2-3x^2)\,\hat{k}$