

Κεφάλαιο 7

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΝΕΥΤΩΝΕΙΕΣ ΡΟΕΣ

7.1 Εισαγωγή

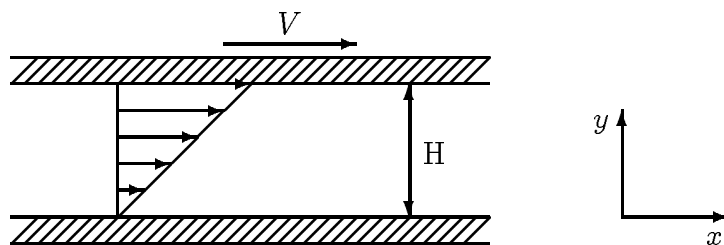
Σ' ένα Νευτώνειο ρευστό το ιξώδες η εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία, την πίεση και τη σύσταση του ρευστού. Στο βιβλίο αυτό μας ενδιαφέρουν μόνο οι ισόθερμες ροές οπότε η ισχυρή εξάρτηση του ιξώδους από τη θερμοκρασία δεν εμφανίζεται. Επίσης δεν μας ενδιαφέρουν ροές στις οποίες παρατηρείται μεταβολή της χημικής σύστασης ή της φυσικής κατάστασης ενός ρευστού. Τέλος, στη γενική περίπτωση, η εξάρτηση του ιξώδους από την πίεση είναι ασθενής. Για όλους αυτούς τους λόγους θεωρούσαμε το ιξώδες ενός Νευτώνειου ρευστού σταθερό. Για μηδενικό διασταλτικό ιξώδες, η καταστατική εξίσωση ενός Νευτώνειου ρευστού παίρνει την μορφή:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D} - \frac{2}{3}\eta \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I}. \quad (7.1)$$

Υπενθυμίζουμε τον αναγνώστη ότι $\nabla \mathbf{u}$ είναι ο **τανυστής κλίσεων της ταχύτητας** (velocity-gradient tensor) και

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (7.2)$$

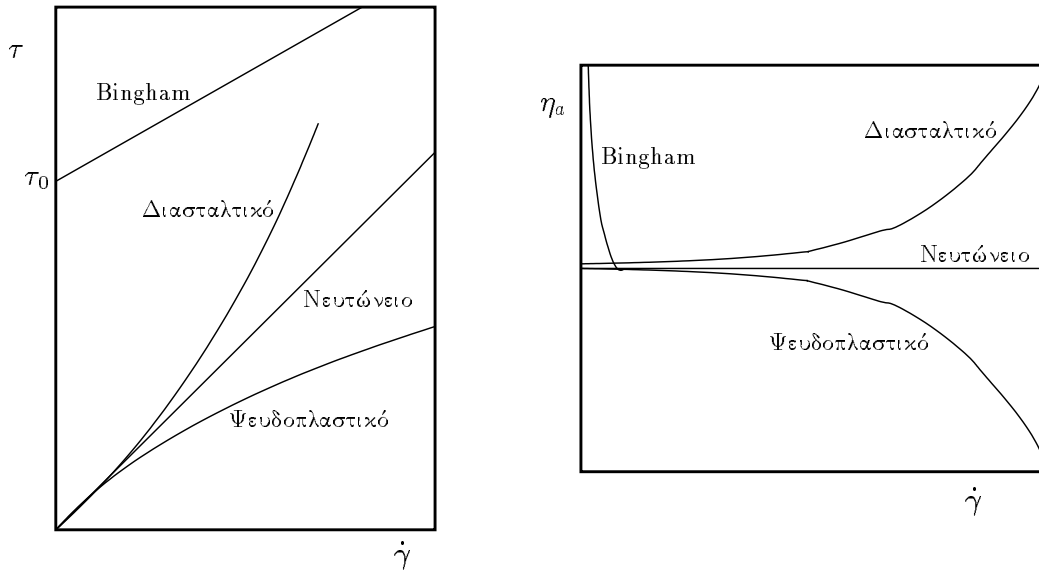
ο **τανυστής ρυθμών παραμόρφωσης** (rate-of-deformation tensor).



Σχήμα 7.1: Απλή ροή διάτμησης.

Η εξίσωση (7.1) είναι γενική με την έννοια ότι ισχύει για συμπιεστή ροή. Σε ασυμπιεστή ροή, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, και έτσι η (7.1) ανάγεται στη γνωστή μας εξίσωση:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D}. \quad (7.3)$$



Σχήμα 7.2: Τυπικές ρεολογικές καμπύλες και φαινόμενα ιξώδη γενικευμένων Νευτώνειων ρευστών.

Στην περίπτωση της απλής ροής διάτμησης (simple shear flow) που φαίνεται στο Σχήμα 7.1, η εξίσωση (7.3) ανάγεται στον νόμο ιξώδους του Newton (Newton's law of viscosity):

$$\tau_{yx} = \eta \frac{du_x}{dy}. \quad (7.4)$$

Η απλή ροή διάτμησης είναι επίσης γνωστή ως **επίπεδη ροή Couette** (plane Couette flow). Αυτή είναι η πιο κοινή **ιξωδομετρική μέθοδος** (viscometric flow), όπου μετρούμε την διατμητική τάση $\tau = |\tau_{yx}|$ για διάφορες τιμές του λεγόμενου **ρυθμού διάτμησης** (shear rate or shear strain rate):

$$\dot{\gamma} = \left| \frac{du_x}{dy} \right|. \quad (7.5)$$

Έτσι ο νόμος του Newton παίρνει επίσης τη βαθμωτή μορφή

$$\tau = \eta \dot{\gamma}. \quad (7.6)$$

Το διάγραμμα της τ συναρτήσει του ρυθμού διάτμησης $\dot{\gamma}$ είναι μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, όπως φαίνεται γραφικά στο Σχήμα 7.2. Η κλίση της ευθείας αυτής δηλαδή ο λόγος $\tau/\dot{\gamma}$ μας δίνει εξ ορισμού το ιξώδες. Αν τα πειραματικά σημεία δεν βρίσκονται σε μια τέτοια ευθεία γραμμή αλλά σε μια καμπύλη όπου ο λόγος $\tau/\dot{\gamma}$ δεν είναι σταθερός, λέμε ότι το ρευστό επιδεικνύει **μη-Νευτώνεια συμπεριφορά**. Ο λόγος $\tau/\dot{\gamma}$ ορίζει το λεγόμενο **φαινόμενο ιξώδες** (apparent viscosity):

$$\eta_a \equiv \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{\tau}{\left| \frac{du_x}{dy} \right|}. \quad (7.7)$$

Μια πρώτη προσπάθεια περιγραφής μη Νευτώνειων ρευστών είναι η πιο κάτω γενίκευση του νόμου ιξώδους του Newton:

$$\tau = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}. \quad (7.8)$$

Ρευστά που υπακούουν ένα νόμο της μορφής (7.8), όπου το φαινόμενο ιξώδες δεν είναι πλέον σταθερό αλλά συνάρτηση του ρυθμού διάτμησης $\dot{\gamma}$, καλούνται **γενικευμένα Νευτώνεια ρευστά** (generalized Newtonian fluids).

Τρία τυπικά παραδείγματα γενικευμένων Νευτώνειων ρευστών φαίνονται στο Σχήμα 7.2:

(α) **Ψευδοπλαστικά ρευστά** (pseudoplastic fluids). Σ' αυτά το ιξώδες ελαττώνεται με τον ρυθμό διάτμησης. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό σαν **ρεολέπτυνση** ή **ρεοαραίωση** (shear thinning). Τα ρευστά αυτά καλούνται επίσης **συσταλτικά** ή **ρεοεκλεπνόμενα** ή **ρεοαραιούμενα** (shear-thinning fluids).

(β) **Διασταλτικά ρευστά** (dilatant fluids). Το ιξώδες αυξάνεται με τον ρυθμό διάτμησης. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό σαν **ρεοπάχυνση** ή **ρεοπύκνωση** (shear thickening). Τα ρευστά αυτά τα οποία δεν είναι τόσο συνηθισμένα όσο τα ψευδοπλαστικά καλούνται επίσης **ρεοπυκνούμενα** ή **ρεοπαχυνόμενα** (shear-thickening fluids).

(γ) **Ιξωδοπλαστικά ρευστά** (viscoplastic fluids). Το χαρακτηριστικό αυτών των ρευστών είναι ότι για τιμές της διατμητικής τάσης τ μικρότερες από μια κρίσιμη τιμή τ_0 δεν παρατηρείται ροή, δηλαδή η ροή διάτμησης είναι μηδέν. Η κρίσιμη αυτή τιμή είναι γνωστή ως **τάση διαρροής** (yield stress). Είναι φανερό ότι για μη μηδενική τάση διαρροής η καμπύλη $\tau(\dot{\gamma})$ δεν περνά από την αρχή των αξόνων. Αν η $\tau(\dot{\gamma})$ είναι γραμμική, το ρευστό καλείται **ρευστό Bingham** (Bingham fluid).

Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το τανυστικό ανάλογο της βαθμωτής εξίσωσης (7.8) θα είναι της μορφής

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta(\mathbf{D}) \mathbf{D}.$$

Αν όμως το βαθμωτό μη-Νευτώνειο ιξώδες είναι συνάρτηση του τανυστή \mathbf{D} , τότε πρέπει να εξαρτάται από χαρακτηριστικά μεγέθη του τανυστή που είναι ανεξάρτητα από το σύστημα συντεταγμένων. Τα χαρακτηριστικά αυτά μεγέθη καλούνται **αναλλοίωτες** (invariants) του τανυστή. Ένα σύνολο ανεξάρτητων αναλλοίωτων ενός τανυστή $\boldsymbol{\sigma}$ είναι το πιο κάτω:¹

$$I_{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}, \quad (7.9)$$

$$II_{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \text{tr} \boldsymbol{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \sigma_{ji}, \quad (7.10)$$

¹Επειδή για οποιοδήποτε τανυστή $\boldsymbol{\sigma}$ ισχύει

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \sigma_{ji} = \text{tr} \boldsymbol{\sigma}^2,$$

η αναλλοίωτη $II_{\boldsymbol{\sigma}}$ ορίζεται επίσης ως εξής:

$$II_{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}).$$

$$III_{\boldsymbol{\sigma}} \equiv tr \boldsymbol{\sigma}^3 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}, \quad (7.11)$$

όπου $\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ και $\boldsymbol{\sigma}^3 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}^2$. Έτσι είναι πιο σωστό να γράψουμε ότι η καταστατική εξίσωση ενός γενικευμένου Νευτώνειου ρευστού στη μορφή:

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \eta (I_{\mathbf{D}}, II_{\mathbf{D}}, III_{\mathbf{D}}) \mathbf{D}.$$

Επειδή

$$I_{\mathbf{D}} = tr \mathbf{D} = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{u},$$

η πρώτη αναλλοίωτη $I_{\mathbf{D}}$ μηδενίζεται σε ασυμπιεστή ροή. Επίσης αποδεικνύεται ότι η τρίτη αναλλοίωτη $III_{\mathbf{D}}$ μηδενίζεται σε διατμητικές ροές, οπότε με την παραδοχή ότι η υπό μελέτη ροές είναι σχεδόν διατμητικές μπορούμε να αμελήσουμε την εξάρτηση του ιξώδους και από αυτή την αναλλοίωτη. Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι (για ασυμπιεστή ροή) το ιξώδες η είναι συνάρτηση μόνο της $II_{\mathbf{D}}$:

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \eta (II_{\mathbf{D}}) \mathbf{D}. \quad (7.12)$$

Επειδή ο τανυστής \mathbf{D} είναι συμμετρικός έχουμε

$$II_{\mathbf{D}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij}^2$$

ή

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]^2. \quad (7.13)$$

Έτσι σε καρτεσιανές συντεταγμένες παίρνουμε

$$\begin{aligned} II_{\mathbf{D}} = & \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Ομοίως σε κυλινδρικές συντεταγμένες ισχύει η

$$\begin{aligned} II_{\mathbf{D}} = & \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_{\theta}}{r} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} \right)^2. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Συνήθως ορίζουμε το μέτρο (magnitude) του τανυστή ρυθμών παραμόρφωσης ως εξής

$$\dot{\gamma} \equiv \sqrt{2II_{\mathbf{D}}} \quad (7.16)$$

και γράφουμε

$$\tau = 2\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}. \quad (7.17)$$

Για το μέτρο του \mathbf{D} έχουμε λοιπόν²

$$\dot{\gamma} \equiv \sqrt{2II_{\mathbf{D}}} = \sqrt{2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij}^2}.$$

Ισχύουν οι πιο κάτω εκφράσεις σε καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = & \left[2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (7.18)$$

και

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = & \left[2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Στην περίπτωση της απλής ροής διάτμησης η (7.18) απλοποιείται στον γνωστό μας ρυθμό διάτμησης

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{du_x}{dy} \right)^2} = \left| \frac{du_x}{dy} \right|.$$

Ορίζοντας τώρα το μέτρο τ του τανυστή ιξωδών τάσεων $\boldsymbol{\tau}$ ως εξής

$$\tau \equiv \sqrt{\frac{1}{2} II_{\boldsymbol{\tau}}} = \sqrt{\frac{1}{2} tr \boldsymbol{\tau}^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}} \quad (7.20)$$

έχουμε

$$\tau \equiv \sqrt{\frac{1}{2} II_{\boldsymbol{\tau}}} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij}^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [2\eta(\dot{\gamma}) D_{ij}]^2} = \eta(\dot{\gamma}) \sqrt{2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij}^2} = \eta(\dot{\gamma}) \sqrt{2II_{\mathbf{D}}}$$

και έτσι

$$\tau = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}.$$

²Το μέτρο ενός τανυστή είναι στην πραγματικότητα η ευκλείδεια νόρμα του αντίστοιχου τετραγωνικού πίνακα.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η βαθμωτή εξίσωση (7.8) ισχύει γενικά για τα μέτρα τ και $\dot{\gamma}$. Αυτή χρησιμοποιείται συχνά στη βιβλιογραφία αντί της τανυστικής εξίσωσης (7.17).

Σημειώνουμε ότι για το μέτρο του $\boldsymbol{\tau}$ σε καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε απλά:

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2}\tau_{xx}^2 + \frac{1}{2}\tau_{yy}^2 + \frac{1}{2}\tau_{zz}^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2} \quad (7.21)$$

και

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2}\tau_{rr}^2 + \frac{1}{2}\tau_{\theta\theta}^2 + \frac{1}{2}\tau_{zz}^2 + \tau_{r\theta}^2 + \tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2}. \quad (7.22)$$

Στην περίπτωση της απλής ροής διάτμησης οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες του $\boldsymbol{\tau}$ είναι οι (ίσες μεταξύ τους) τ_{yx} και τ_{xy} . Έτσι παίρνουμε τη διατμητική τάση

$$\tau = \sqrt{\tau_{yx}^2} = |\tau_{yx}|$$

την οποία χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη μας συζήτηση και στη βαθμωτή εξίσωση (7.8).

Παράδειγμα 7.1.1. Το μοντέλο Reiner-Rivlin

Αν θεωρήσουμε ότι ο ολικός τανυστής τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$ εξαρτάται μόνο από τον τανυστή ρυθμών παραμόρφωσης,

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\mathbf{D}),$$

και αναπτύζουμε τη συνάρτηση f σε σειρά Taylor έχουμε

$$\boldsymbol{\sigma} = f_0\mathbf{D}^0 + f_1\mathbf{D}^1 + f_2\mathbf{D}^2 + f_3\mathbf{D}^3 + \dots$$

Παρατηρούμε ότι $\mathbf{D}^0 = \mathbf{I}$ και ότι για ασυμπιεστή ροή $f_0 = -p$. Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton γνωρίζουμε ότι οι τανυστές \mathbf{D}^k με $k \geq 3$ μπορούν να εκφραστούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί των \mathbf{I} , \mathbf{D} και \mathbf{D}^2 . Άρα μπορούμε να γράψουμε

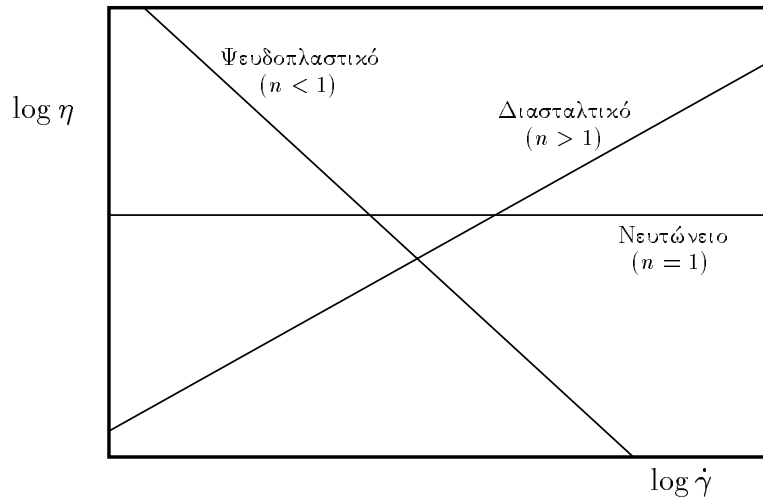
$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \eta_1 2\mathbf{D} + \eta_2 (2\mathbf{D})^2, \quad (7.23)$$

όπου τα η_1 και η_2 είναι βαθμωτές παράμετροι των αναλλοίωτων του τανυστή ρυθμών παραμόρφωσης \mathbf{D} . Με την υπόθεση της ασυμπιεστής ροής η πρώτη αναλλοίωτη $I_{\mathbf{D}}$ είναι μηδέν και έτσι

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \eta_1 (II_{\mathbf{D}}, III_{\mathbf{D}}) 2\mathbf{D} + \eta_2 (II_{\mathbf{D}}, III_{\mathbf{D}}) (2\mathbf{D})^2. \quad (7.24)$$

Η πιο πάνω εξίσωση είναι γνωστή σαν **καταστατική εξίσωση Reiner-Rivlin**. Το Νευτώνειο ρευστό αντιστοιχεί στην ειδική περίπτωση όπου $\eta_1 (II_{\mathbf{D}}, III_{\mathbf{D}}) = \eta$ και $\eta_2 = 0$. Επειδή για μη μηδενικό η_2 επιτρέπει την ανάπτυξη κάθετων τάσεων στη μόνιμη ροή διάτμησης οι οποίες όμως δεν αντιστοιχούν, ούτε καν ποιοτικά, στις πειραματικές ενδείξεις. Γι' αυτό τον λόγο το η_2 τίθεται συνήθως ίσο με μηδέν και έτσι γράφουμε:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \eta (II_{\mathbf{D}}, III_{\mathbf{D}}) 2\mathbf{D}. \quad (7.25)$$



Σχήμα 7.3: Λογαριθμικά διαγράμματα του ιξώδους εκθετικών ρευστών για διάφορες τιμές του εκθέτη n .

Επειδή τέλος η εξάρτηση του η από την III_D είναι αμελητέα σε διατμητικές ροές βρίσκουμε ότι

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \eta(II_D)2\mathbf{D} \quad (7.26)$$

και

$$\boldsymbol{\tau} = \eta(II_D)2\mathbf{D} . \quad (7.27)$$

□

7.2 Γενικευμένα Νευτώνεια μοντέλα

7.2.1 Ο εκθετικός νόμος

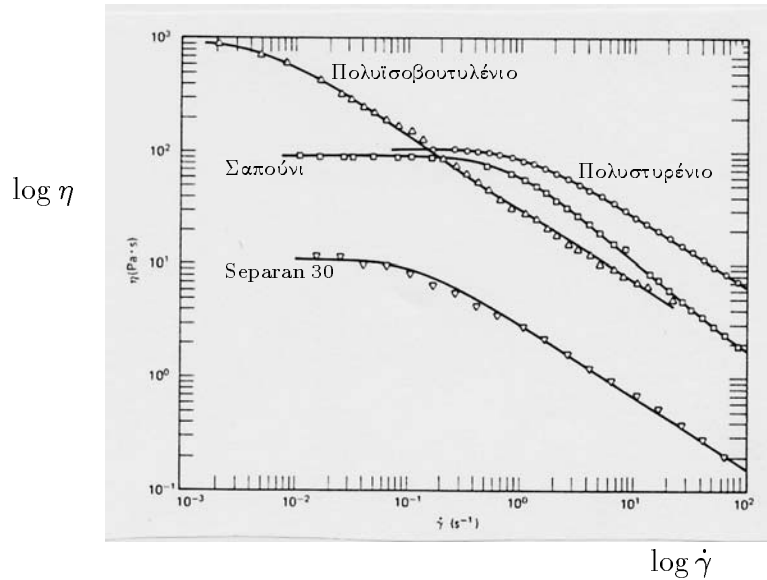
Η πιο απλή γενικευμένη Νευτώνεια καταστατική εξίσωση είναι ο **εκθετικός νόμος** (power-law) ο οποίος είναι επίσης γνωστός ως **μοντέλο των Ostwald και de Waele**:

$$\tau = k \dot{\gamma}^n \quad (7.28)$$

όπου k είναι ο λεγόμενος **δείκτης συνέφειας** (consistency index) με μονάδες Pas^n και n ο εκθέτης που είναι αδιάστατος. Τα ρευστά που υπακούουν τον εκθετικό νόμο είναι γνωστά ως **εκθετικά ρευστά** (power-law fluids). Για $n=1$ και $k=\eta$ ο εκθετικός νόμος ανάγεται στον νόμο του Νεύτωνα.

Για το φαινόμενο ιξώδες ισχύει

$$\eta(\dot{\gamma}) = k \dot{\gamma}^{n-1} . \quad (7.29)$$

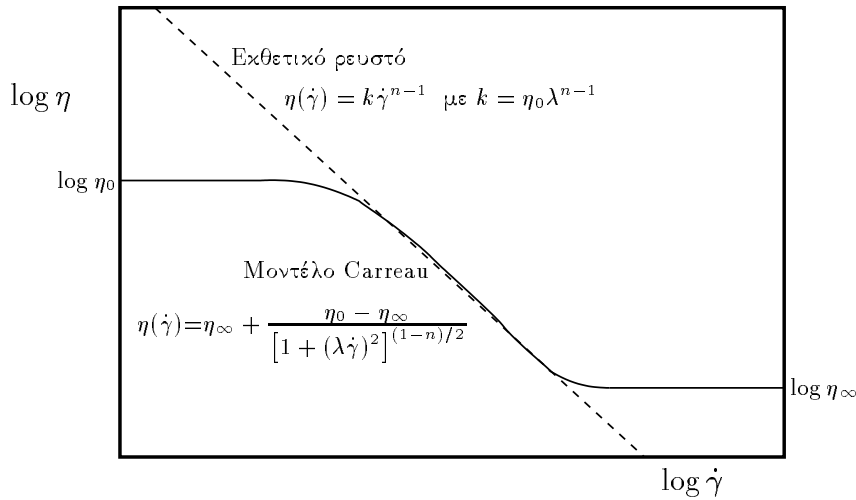


Σχήμα 7.4: Διαγράμματα ιξώδους τριών πολυμερικών διαλυμάτων και ενός διαλύματος σαπουνιού [R.B. Bird, R.C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, John Wiley & Sons, New York, 1987].

Παρατηρούμε ότι για $n < 1$ το ιξώδες μειώνεται με τον ρυθμό διάτμησης (ψευδοπλαστικό ρευστό) ενώ το αντίθετο συμβαίνει για $n > 1$ (διασταλτικό ρευστό). Η συμπεριφορά του μοντέλου φαίνεται στο Σχήμα 7.3. Ο εκθετικός νόμος χαρακτηρίζεται για την απλότητά του αφού περιλαμβάνει μόνο δύο παραμέτρους αλλά παρουσιάζει τρία σοβαρά μειονεκτήματα:

1. Στην περίπτωση ψευδοπλαστικού ρευστού ($n < 1$) προβλέπει απειρισμό του ιξώδους για μηδενικό ρυθμό διάτμησης (και μηδενισμό του για άπειρο ρυθμό διάτμησης). Στην πράξη όμως το ιξώδες μηδενικού ρυθμού διάτμησης είναι φυσικά πεπερασμένο ενώ σε ψηλούς ρυθμούς διάτμησης το ιξώδες πολλών αιωρημάτων και αραιών πολυμερικών διαλυμάτων είναι Νευτώνειο, δηλ. σταθερό. Με διαφορετικά λόγια, για πραγματικά ρευστά, ο εκθέτης n δεν είναι σταθερός σε όλο το εύρος των τιμών του ρυθμού διάτμησης.
2. Οι διαστάσεις του δείκτη συνάφειας k εξαρτώνται από τον εκθέτη n . Επίσης, επειδή δεν μπορούμε να ορίσουμε χαρακτηριστικό ιξώδες, το εκθετικό μοντέλο παρουσιάζει δυσκολίες κατά την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων που διέπουν μια ροή.
3. Είναι αδύνατη η συσχέτιση των παραμέτρων k και n με το μοριακό βάρος και τη συσχέντρωση.

Παραδείγματα διαγραμμάτων ιξώδους μερικών πραγματικών ρευστών φαίνονται στο Σχήμα 7.4. Σε όλες τις περιπτώσεις το ιξώδες είναι Νευτώνειο για μικρούς ρυθμούς διάτμησης και έτσι το ιξώδες μηδενικού ρυθμού διάτμησης είναι πεπερασμένο. Δεν παρατηρείται δεύτερη περιοχή σταθερού ιξώδους σε υψηλούς ρυθμούς διάτμησης όχι



Σχήμα 7.5: Λογαριθμικό διάγραμμα του ιξώδους για το μοντέλο Carreau.

επειδή δεν υπάρχει αλλά επειδή οι μετρήσεις έγιναν σε σχετικά χαμηλούς ρυθμούς διάτμησης.

Λόγω του απειρισμού του ιξώδους για μηδενικό ρυθμό διάτμησης το εκθετικό μοντέλο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αριθμητικές προσομοιώσεις. Είναι όμως αρκετά δημοφιλές γιατί επιτρέπει την εύρεση αναλυτικής λύσης σε αρκετές απλές αλλά ενδιαφέρουσες ροές.

7.2.2 Το μοντέλο Carreau

Το μοντέλο του Carreau,

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_{\infty} + \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{(1-n)/2}} \quad (7.30)$$

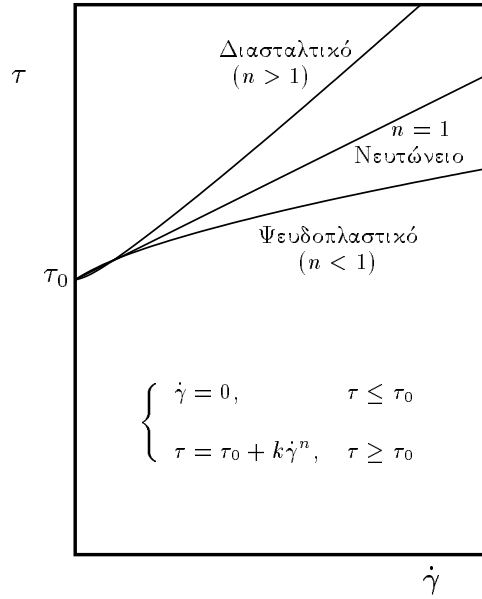
περιέχει τέσσερις παραμέτρους: το ιξώδες μηδενικού ρυθμού διάτμησης η_0 , το ιξώδες άπειρου ρυθμού διάτμησης η_{∞} , τη χρονική σταθερά λ και την παράμετρο n η οποία αντιστοιχεί στον εκθέτη n του εκθετικού μοντέλου. Για $\lambda=0$, το μοντέλο Carreau ανάγεται στο Νευτώνειο μοντέλο με $\eta(\dot{\gamma})=\eta_0$. Για $\eta_{\infty}=0$ και μεγάλους ρυθμούς διάτμησης

$$\eta(\dot{\gamma}) \simeq \frac{\eta_0}{(\lambda\dot{\gamma})^{1-n}} = \eta_0 \lambda^{n-1} \dot{\gamma}^{n-1},$$

οπότε το μοντέλο Carreau ανάγεται στο εκθετικό με

$$k = \eta_0 \lambda^{n-1}. \quad (7.31)$$

Η συμπεριφορά του μοντέλου φαίνεται στο Σχήμα 7.5: σε μικρούς και πολύ μεγάλους ρυθμούς διάτμησης το ιξώδες είναι σταθερό και ίσο με η_0 και η_{∞} αντίστοιχα. Σε μια



Σχήμα 7.6: Συμπεριφορά του μοντέλου *Herschel-Bulkley* για διάφορες τιμές του εκθέτη n .

ενδιάμεση περιοχή έχουμε μετάβαση από το η_0 στο η_∞ και η καμπύλη προσεγγίζει την αντίστοιχη του εκθετικού μοντέλου με $k=\eta_0\lambda^{n-1}$.

Το μοντέλο Carreau περιγράφει καλύτερα τα ρεολογικά δεδομένα πολλών πολυμερών τα οποία χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη πλατό σε χαμηλούς ρυθμούς διάτμησης. Για παράδειγμα, οι συνεχείς καμπύλες στο Σχήμα 7.4 προέκυψαν με προσαρμογή (fitting) του μοντέλου αυτού στα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα. Το μοντέλο είναι επίσης ιδιαίτερα χρήσιμο σε αριθμητικές προσομοιώσεις αφού δεν προκαλεί τις δυσκολίες σύγκλισης που χαρακτηρίζουν το εκθετικό ρευστό. Έχει όμως το μειονέκτημα ότι δεν επιτρέπει την ύπαρξη αναλυτικών λύσεων ακόμη και σε απλές ροές.

Ο Yasuda γενίκευσε το μοντέλο του Carreau με την εισαγωγή μιας πέμπτης παραμέτρου α :

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{[1 + (\lambda\dot{\gamma})^\alpha]^{(1-n)/\alpha}}. \quad (7.32)$$

Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό ως **μοντέλο Carreau-Yasuda**. Η αδιάστατη παράμετρος α καθορίζει τη μετάβαση από την αρχική περιοχή σταθερού ιξώδους στην περιοχή εκθετικής μεταβολής (για ενδιάμεσες τιμές του ρυθμού διάτμησης $\dot{\gamma}$).

Ένα άλλο μοντέλο που μοιάζει αρκετά με αυτό του Carreau αφού περιέχει ακριβώς τις ίδιες παραμέτρους είναι το **μοντέλο Cross**:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + (\lambda\dot{\gamma})^{1-n}}. \quad (7.33)$$

Όπως και το μοντέλο Carreau, για $\lambda=0$, το μοντέλο Cross ανάγεται στο Νευτώνειο

μοντέλο με $\eta(\dot{\gamma})=\eta_0$, ενώ για $\eta_\infty=0$, $n < 1$ και μεγάλους ρυθμούς διάτμησης

$$\eta(\dot{\gamma}) \simeq \frac{\eta_0}{(\lambda\dot{\gamma})^{1-n}} = \eta_0\lambda^{n-1} \dot{\gamma}^{n-1},$$

οπότε το μοντέλο Cross ανάγεται στο εκθετικό με

$$k = \eta_0\lambda^{n-1}. \quad (7.34)$$

7.2.3 Το μοντέλο Bingham και άλλα ιξωδοπλαστικά μοντέλα

Το **μοντέλο του Bingham** είναι το πιο απλό ιξωδοπλαστικό μοντέλο. Περιλαμβάνει δύο παραμέτρους: την *τάση διαρροής* τ_0 και την παράμετρο *ιξώδους* k :

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = 0, & \tau \leq \tau_0 \\ \tau = \tau_0 + k\dot{\gamma}, & \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (7.35)$$

Για $\tau_0=0$, το μοντέλο ανάγεται στο Νευτώνειο με $\eta=k$. Για τιμές της διατμητικής τάσης μικρότερες ή ίσες της τάσης διαρροής τ_0 , ο ρυθμός παραμένει μηδενικός, πράγμα που σημαίνει ότι δεν υπάρχει ροή. Το μοντέλο Bingham προβλέπει απειρισμό του ιξώδους για $\tau \leq \tau_0$ και είναι ασυνεχές:

$$\begin{cases} \eta = \infty, & \tau \leq \tau_0 \\ \eta = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k, & \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (7.36)$$

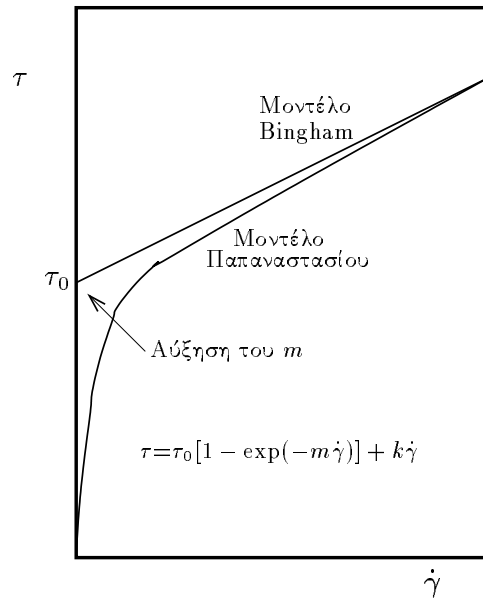
Μια γενίκευση του μοντέλου Bingham είναι το **μοντέλο των Herschel-Bulkley**. Αυτό συνδυάζει ουσιαστικά το μοντέλο Bingham με το εκθετικό μοντέλο:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = 0, & \tau \leq \tau_0 \\ \tau = \tau_0 + k\dot{\gamma}^n, & \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (7.37)$$

Το μοντέλο Herschel-Bulkley επιτρέπει την περιγραφή ιξωδοπλαστικών ρευστών που εμφανίζουν ρεολέπτυνση ($n < 1$) ή ρεοπύκνωση ($n > 1$). Για $n=1$, αυτό ανάγεται προφανώς στο μοντέλο Bingham. Η συμπεριφορά του μοντέλου αυτού φαίνεται στο Σχήμα 7.6.

Τα μοντέλα Bingham και Herschel-Bulkley περιγράφουν ικανοποιητικά τη συμπεριφορά αρκετών υλικών (όπως η οδοντόκρεμα, η μαγιονέζα, το ketchup, το βούτυρο, αιωρήματα διάφορων στερεών, μπογιές κα). Επίσης επιτρέπουν την αναλυτική λύση αρκετών στοιχειωδών ροών. Λόγω της ασυνέχειάς τους όμως είναι δύσκολη η χρήση τους στην αριθμητική επίλυση των εξισώσεων κίνησης. Για να αποφύγει αυτό το πρόβλημα ο Παπαναστασίου (Κύπριος καθηγητής στα Πανεπιστήμια Michigan και Θεσσαλονίκης) εξομάλυνε το μοντέλο Bingham εισάγοντας ένα εκθετικό όρο που επιτρέπει την ομαλή (και συνεχή) μετάβαση από την αρχή των αξόνων στην γραμμική περιοχή:

$$\tau = \tau_0 [1 - \exp(-m\dot{\gamma})] + k\dot{\gamma}. \quad (7.38)$$



Σχήμα 7.7: Συμπεριφορά του μοντέλου Παπαναστασίου.

Η τανυστική μορφή του μοντέλου του Παπαναστασίου έχει ως εξής:

$$\tau = \left\{ \frac{\tau_0 [1 - \exp(-m \dot{\gamma})]}{\dot{\gamma}} + k \right\} (2\mathbf{D}), \quad (7.39)$$

όπου $\dot{\gamma} = \sqrt{2\mathbf{D}}$.

Η συμπεριφορά του μοντέλου του Παπαναστασίου φαίνεται στο Σχήμα 7.7. Με την αύξηση της τιμής της παραμέτρου m η ρεολογική καμπύλη προσεγγίζει περισσότερο την ασυνεχή καμπύλη του μοντέλου Bingham. Η επέκταση του μοντέλου Παπαναστασίου στην περίπτωση ρευστού Herschel-Bulkley είναι απλή:

$$\tau = \tau_0 [1 - \exp(-m \dot{\gamma})] + k \dot{\gamma}^n. \quad (7.40)$$

Το μοντέλο Παπαναστασίου έχει καταστεί πολύ δημοφιλές τα τελευταία χρόνια και έχει χρησιμοποιηθεί για την αριθμητική επίλυση πολλών σημαντικών προβλημάτων ιξωδοπλαστικών ροών.

Ένα άλλο ιξωδοπλαστικό μοντέλο είναι το **μοντέλο Casson**:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = 0, & \tau \leq \tau_0 \\ \sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{k \dot{\gamma}}, & \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (7.41)$$

Το μοντέλο αυτό επιδεικνύει μια βαθμιαία μετάβαση προς τη Νευτώνεια περιοχή και χρησιμοποιείται για να περιγράψει διάφορα ρευστά όπως το αίμα και διάφορα τρόφιμα.

Στο Κεφάλαιο 6 μελετήσαμε συστηματικά τις σημαντικότερες περιπτώσεις μονοκατευθυντικών Νευτώνειων ροών, και βρήκαμε τις αντίστοιχες απλοποιημένες μορφές των εξισώσεων κίνησης καθώς και τη γενική λύση για τη μη μηδενιζόμενη συνιστώσα της ταχύτητας. (Υπενθυμίζουμε ότι, στις μονοκατευθυντικές ροές, δύο συνιστώσες της ταχύτητας μηδενίζονται εξ ορισμού.) Στις παραγράφους που ακολουθούν θα θεωρήσουμε εκ νέου τις ίδιες μονοκατευθυντικές ροές για γενικευμένα Νευτώνεια ρευστά και θα βρούμε τις αντίστοιχες απλοποιημένες εξισώσεις.

7.3 Μονοδιάστατες ευθύγραμμες ροές σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Με τις παραδοχές

$$u_y = u_z = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const.},$$

έχουμε $u_x = u_x(y, t)$. Οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή ρυθμών παραμόρφωσης είναι οι

$$D_{yx} = D_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (7.42)$$

και έτσι οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή τάσεων είναι οι

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = 2\eta(\dot{\gamma}) D_{yx} = \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (7.43)$$

όπου

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2} = \left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|. \quad (7.44)$$

Η x -συνιστώσα της εξίσωσης διατήρησης της ορμής απλοποιείται ως εξής:

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho g_x. \quad (7.45)$$

Στην περίπτωση μόνιμης ροής, $u_x = u_x(y)$, οπότε

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \rho g_x = 0. \quad (7.46)$$

Ολοκληρώνοντας την πιο πάνω εξίσωση βρίσκουμε:

$$\tau_{yx} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x\right) y + c_1, \quad (7.47)$$

Παραδοχές:	$u_y = u_z = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const.}$
Εξίσωση συνέχειας:	$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \implies u_x = u_x(y)$
x-συνιστώσα:	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \rho g_x = 0$
y-συνιστώσα:	$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = 0$
z-συνιστώσα:	$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = 0$
<u>Γενική λύση:</u>	$\tau_{yx} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) y + c_1$ $p = \frac{\partial p}{\partial x} x + \rho g_y y + \rho g_z z + c$
<u>Γενικευμένο Νευτώνειο ρευστό:</u>	$\tau_{yx} = \eta(\dot{\gamma}) \frac{du_x}{dy} \quad \text{όπου } \dot{\gamma} = \left \frac{du_x}{dy} \right \implies$ $\eta(\dot{\gamma}) \frac{du_x}{dy} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) y + c_1$

Πίνακας 7.1: Εξισώσεις κίνησης, γενική λύση για τη διαμητική τάση και την πίεση και διέπουσα εξίσωση για την ταχύτητα για στάσιμη μονοδιάστατη ευθύγραμμη ροή γενικευμένου Νευτώνειου ρευστού σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

όπου c_1 σταθερά που προσδιορίζεται από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος ροής. Σημειώνουμε ότι οι εξισώσεις (7.45) και (7.46) καθώς και η λύση (7.47) για τη διατμητική τάση ισχύουν για κάθε ρευστό. Στην περίπτωση γενικευμένης Νευτώνειας ροής

$$\tau_{yx} = \eta(\dot{\gamma}) \frac{du_x}{dy}, \quad (7.48)$$

και έτσι για την ταχύτητα u_x προκύπτει η πιο κάτω ΣΔΕ:

$$\eta(\dot{\gamma}) \frac{du_x}{dy} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) y + c_1, \quad (7.49)$$

όπου

$$\dot{\gamma} = \left| \frac{du_x}{dy} \right|. \quad (7.50)$$

Στον Πίνακα 7.1 φαίνονται οι βασικές παραδοχές, οι εξισώσεις κίνησης, η γενική λύση για τη διατμητική τάση και την πίεση και η διέπουσα εξίσωση για την ταχύτητα για στάσιμη μονοδιάστατη ευθύγραμμη ροή γενικευμένου Νευτώνειου ρευστού σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Παράδειγμα 7.3.1. Επίπεδη ροή Couette για γενικευμένο Νευτώνειο ρευστό

Θεωρούμε τη μόνιμη ροή μεταξύ δύο άπειρων παράλληλων πλακών. Η απόσταση των δύο πλακών είναι H και η άνω πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα V . Η γεωμετρία της ροής αυτής φαίνεται στο Σχήμα 7.1. Με δεδομένο ότι η βαθμίδα πίεσης είναι μηδέν και θεωρώντας την βαρύτητα στη διεύθυνση των x επίσης μηδέν, από τη γενική λύση (7.47) προκύπτει ότι η διατμητική τάση είναι σταθερή:

$$\tau_{yx} = c_1. \quad (7.51)$$

Το πιο πάνω αποτέλεσμα ισχύει για οποιοδήποτε ρευστό. Για γενικευμένο Νευτώνειο ρευστό η διατμητική τάση δίνεται από την

$$\tau_{yx} = \eta(\dot{\gamma}) \frac{du_x}{dy}$$

και έτσι για την απόλυτή της τιμή τ ισχύει

$$\tau(\dot{\gamma}) = |\tau_{yx}| = \left| \eta(\dot{\gamma}) \frac{du_x}{dy} \right| = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} = |c_1| \implies$$

$$\tau(\dot{\gamma}) = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} = \text{const.} \quad (7.52)$$

Αν η διατμητική τάση είναι μονότονη (αύξουσα) συνάρτηση του ρυθμού διάτμησης, τότε σε μια σταθερή τιμή της τ αντιστοιχεί μια τιμή για τον ρυθμό διάτμησης. Άρα

$$\dot{\gamma} = \left| \frac{du_x}{dy} \right| = \text{const.} \implies \frac{du_x}{dy} = c_2 \implies$$

$$u_x = c_2 y + c_3,$$

όπου οι άγνωστες σταθερές c_2 και c_3 μπορούν να υπολογιστούν από τις συνοριακές συνθήκες:

(i) Για $y=0$, $u_x=0$ και έτσι $c_3=0$.

(ii) Για $y=H$, $u_x=V$ και έτσι $c_2=V/H$.

Έτσι η ταχύτητα δίνεται από τη γνωστή μας σχέση:

$$u_x = \frac{y}{H} V. \quad (7.53)$$

Η πιο πάνω γραμμική σχέση ισχύει λοιπόν για κάθε γενικευμένο Νευτώνειο ρευστό με την προϋπόθεση ότι η καταστατική εξίσωση $\tau=\tau(\dot{\gamma})$ είναι μονότονη.

Η διατμητική τάση που ασκείται από το ρευστό στην άνω πλάκα είναι

$$\tau_w = -\tau_{yx}|_{y=H} = -\eta(\dot{\gamma}) \frac{V}{H}, \quad (7.54)$$

όπου προφανώς $\dot{\gamma}=c_2=V/H$. Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο ότι η άνω πλάκα βλέπει προς στα αρνητικά y .

Παρατήρηση 1

Η λύση (7.53) για την ταχύτητα ισχύει και για ρευστό Bingham με την προϋπόθεση ότι η άνω πλάκα κινείται. Αυτό όμως συμβαίνει μόνο αν η ασκούμενη στην πλάκα διατμητική τάση είναι μεγαλύτερη από την τάση διαρροής τ_0 . Διαφορετικά, αν δηλαδή $\tau \leq \tau_0$, η πλάκα μένει ακίνητη οπότε δεν έχουμε ροή και $\dot{\gamma}=0$, όπως προβλέπεται από το μοντέλο.

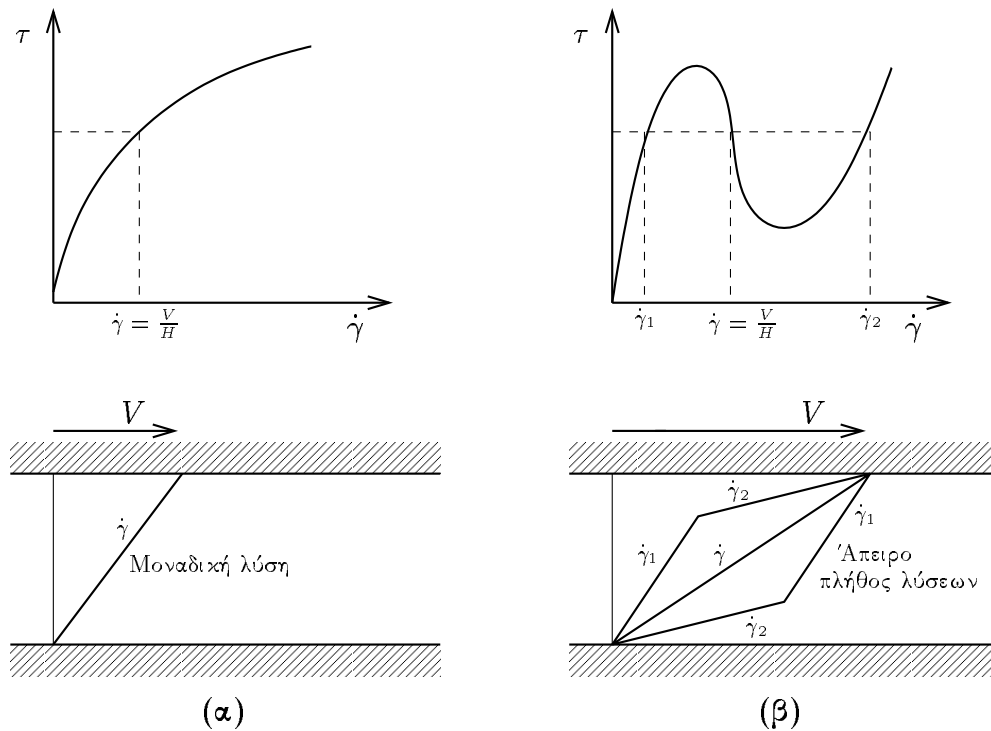
Παρατήρηση 2

Η λύση (7.53) είναι μοναδική με την προϋπόθεση ότι η καταστατική εξίσωση

$$\tau(\dot{\gamma}) = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}$$

είναι μονότονη. Σ' αυτή την περίπτωση για μια σταθερή τιμή τ της διατμητικής τάσης αντιστοιχεί μια τιμή $\dot{\gamma}=V/H$ για τον ρυθμό διάτμησης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.9α. Η τιμή της $\dot{\gamma}$ είναι προφανώς η κλίση της κατανομής της ταχύτητας.

Αν όμως η καταστατική εξίσωση δεν είναι μονότονη, τότε στη σταθερή τιμή της διατμητικής τάσης αντιστοιχούν περισσότερες αποδεκτές τιμές για τον ρυθμό διάτμησης. Για παράδειγμα στο Σχήμα 7.9β, εκτός από την τιμή $\dot{\gamma}=V/H$ υπάρχουν επιπλέον δύο άλλες αποδεκτές τιμές, οι $\dot{\gamma}_1$ και $\dot{\gamma}_2$. Μπορούμε τότε να κατασκευάσουμε θεωρητικά άπειρο πλήθος κατά τμήματα γραμμικών κατανομών της ταχύτητας με κλίσεις $\dot{\gamma}=V/H$, $\dot{\gamma}_1$ και $\dot{\gamma}_2$ φροντίζοντας να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες $u_x(0)=0$ και $u_x(H)=V$. Τρεις τέτοιες λύσεις φαίνονται στο παράδειγμα του Σχήματος 7.9β. Αποδεικνύεται πάντως ότι είναι ασταθείς, δηλαδή δεν παρατηρούνται στην πράξη, όσες λύσεις περιλαμβάνουν τμήματα με κλίση που αντιστοιχεί στην περιοχή όπου το διάγραμμα της $\tau(\dot{\gamma})$ φθίνει. Ωστόσο το πλήθος των ευσταθών λύσεων παραμένει άπειρο.



Σχήμα 7.9: Στη μόνιμη επίπεδη ροή Couette έχουμε (α) μοναδική λύση αν η καταστατική εξίσωση είναι μονότονη και (β) άπειρο πλήθος λύσεων αν αυτή είναι μη μονότονη.

Το φαινόμενο της εμφάνισης ζωνών διαφορετικού ρυθμού διάτμησης είναι γνωστό στη βιβλιογραφία σαν ζωνοποίηση ρυθμών διάτμησης (shear banding). \square

Παράδειγμα 7.3.2. Η διατμητική τάση στην επίπεδη ροή Poiseuille

Θεωρούμε την μόνιμη (δηλαδή πλήρως ανεπτυγμένη) ροή μεταξύ οριζόντιων, άπειρων, παράλληλων πλακών υπό σταθερή κλίση πίεσης. Η γεωμετρία της ροής φαίνεται στο Σχήμα 7.10. Η απόσταση μεταξύ των δύο πλακών είναι $2H$, η ροή είναι στην κατεύθυνση των x και η αρχή των αξόνων είναι στο επίπεδο συμμετρίας της ροής. Θεωρώντας ότι η βαρύτητα είναι αμελητέα από την (7.47) βρίσκουμε ότι η διατμητική τάση για οποιοδήποτε ρευστό δίνεται από την

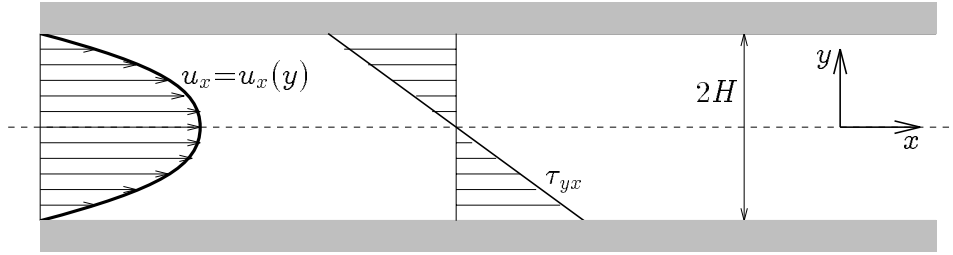
$$\tau_{yx} = \frac{\partial p}{\partial x} y + c_1.$$

Μπορούμε στο σημείο αυτό να εφαρμόσουμε την συνοριακή συνθήκη στο $y=0$. Λόγω της συμμετρίας

$$\text{για } y = 0, \quad \frac{du_x}{dy} = 0$$

ή διαφορετικά

$$\text{για } y = 0, \quad \tau_{yx} = 0.$$



Σχήμα 7.10: Επίπεδη ροή Poiseuille. Η κατανομή της διατμητικής τάσης είναι γραμμική για κάθε ρευστό: $\tau_{yx} = (\partial p / \partial x)y$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $c_1 = 0$ και έτσι

$$\tau_{yx} = \frac{\partial p}{\partial x} y. \quad (7.55)$$

Το πιο πάνω αποτέλεσμα που μας λέει ότι η διατμητική τάση μεταβάλλεται γραμμικά ισχύει για κάθε ρευστό. Η διατμητική τάση που ασκείται από το ρευστό στην άνω πλάκα είναι:

$$\tau_w = -\tau_{yx}|_{y=H} = -\frac{\partial p}{\partial x} H. \quad (7.56)$$

Είναι χαρακτηριστικό ότι η τ_w δεν εξαρτάται από το ιξώδες. \square

Είδαμε στο πιο πάνω παράδειγμα ότι η κατανομή της διατμητικής τάσης τ_{yx} είναι ανεξάρτητη του ρευστού. Αυτό βεβαίως δεν ισχύει και για την κατανομή της ταχύτητας u_x . Στη συνέχεια θα βρούμε την u_x για δύο γενικευμένα Νευτώνεια ρευστά: το εκθετικό και το ρευστό Bingham.

Παράδειγμα 7.3.3. Επίπεδη ροή Poiseuille εκθετικού ρευστού

Για εκθετικό ρευστό ισχύει

$$\tau_{yx} = k \dot{\gamma}^{n-1} \frac{du_x}{dy} = k \left| \frac{du_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{du_x}{dy}.$$

Επειδή η u_x είναι αύξουσα στο $[-H, 0]$ και φθίνουσα στο $[0, H]$ ισχύει:

$$\tau_{yx} = k \left(\frac{du_x}{dy} \right)^n, \quad -H \leq y \leq 0$$

$$\tau_{yx} = -k \left(-\frac{du_x}{dy} \right)^n, \quad 0 \leq y \leq H$$

Στη συνέχεια θα εργαστούμε στο διάστημα $[0, H]$. Αντικαθιστώντας στην (7.55) παίρνουμε:

$$-k \left(-\frac{du_x}{dy} \right)^n = \frac{\partial p}{\partial x} y \implies \frac{du_x}{dy} = - \left(-\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} y^{1/n}.$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε:

$$u_x = -\frac{n}{n+1} \left(-\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} y^{1/n+1} + c_2$$

Η σταθερά c_2 υπολογίζεται εφαρμόζοντας τη συνθήκη μη ολίσθησης στην άνω πλάκα: για $y=H$, $u_x=0$ και έτσι

$$c_2 = \frac{n}{n+1} \left(-\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} H^{1/n+1} .$$

Έτσι η κατανομή της ταχύτητας δίνεται από την

$$u_x = \frac{n}{n+1} \left(-\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} \left(H^{1/n+1} - y^{1/n+1} \right) . \quad (7.57)$$

Για $n=1$ και $k=\eta$, η (7.57) ανάγεται στη Νευτώνεια κατανομή:

$$u_x = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \left(H^2 - y^2 \right) .$$

Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας είναι στο επίπεδο συμμετρίας ($y=0$):

$$u_{x,max} = \frac{nH}{n+1} \left(-\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} H \right)^{1/n} . \quad (7.58)$$

Μπορούμε τέλος να υπολογίσουμε την ογκομετρική παροχή Q ανά μονάδα πλάτους W :

$$\frac{Q}{W} = \int_{-H}^H u_x dy = 2 \frac{n}{n+1} \left(-\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} \int_0^H \left(H^{1/n+1} - y^{1/n+1} \right) dy \implies$$

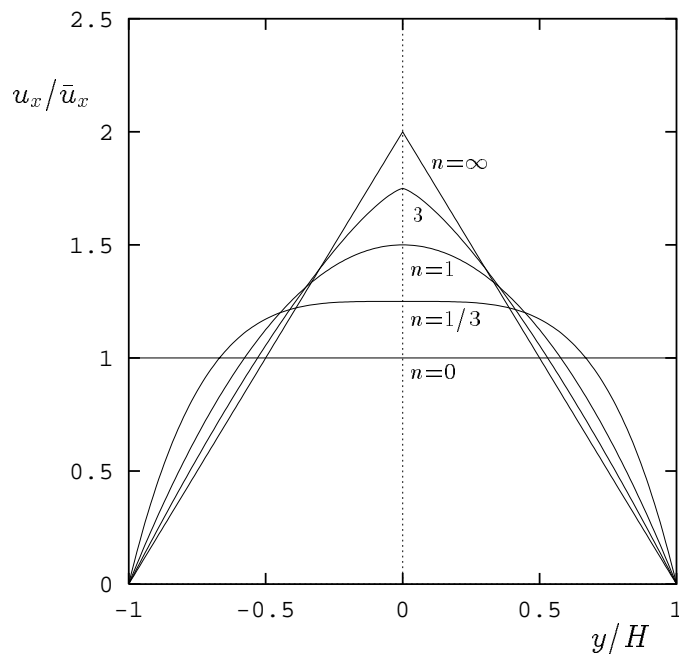
$$\frac{Q}{W} = \frac{2nH^2}{2n+1} \left(-\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} H \right)^{1/n} . \quad (7.59)$$

Θέτοντας $n=1$ και $k=\eta$ βρίσκουμε το αντίστοιχο Νευτώνειο αποτέλεσμα:

$$\frac{Q}{W} = -\frac{2}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 .$$

Η μέση ταχύτητα είναι

$$\bar{u}_x = \frac{Q}{2WH} = \frac{nH}{2n+1} \left(-\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} \quad (7.60)$$



Σχήμα 7.11: Κατανομές της ταχύτητας για διάφορες τιμές του εκθέτη n σε επίπεδη ροή Poiseuille εκθετικού ρευστού.

και έτσι

$$\frac{u_x}{\bar{u}_x} = \frac{2n+1}{n+1} \left[1 - \left(\frac{y}{H} \right)^{1/n+1} \right]. \quad (7.61)$$

Στο Σχήμα 7.11 φαίνονται οι κατανομές της ταχύτητας για διάφορες τιμές του εκθέτη n . Η Νευτώνεια κατανομή ($n=1$) είναι παραβολική. Στα ψευδοπλαστικά ρευστά ($n < 1$) η κατανομή είναι πεπλατυσμένη και καθίσταται εμβολική στο όριο $n \rightarrow 0$, ενώ στα διασταλτικά ($n > 1$) η κατανομή είναι αιχμηρή και καθίσταται τριγωνική στο όριο $n \rightarrow \infty$. \square

Παράδειγμα 7.3.4. Επίπεδη ροή Poiseuille ρευστού Bingham

Εφόσον η διατμητική τάση

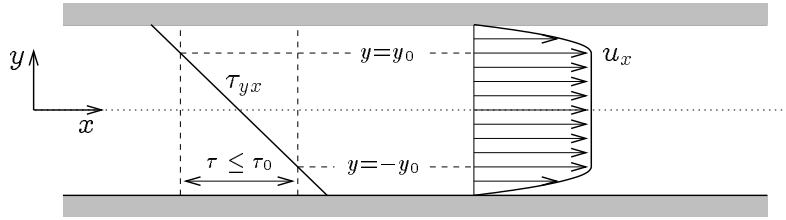
$$\tau_{yx} = \frac{\partial p}{\partial x} y$$

μηδενίζεται για $y=0$, είναι φανερό ότι θα ισχύει

$$\tau = |\tau_{yx}| \leq \tau_0 \quad \text{για} \quad -y_0 \leq y \leq y_0$$

όπου

$$y_0 = \frac{\tau_0}{(-\partial p / \partial x)} \quad (7.62)$$



Σχήμα 7.12: Σημεία διαρροής (yield points) σε επίπεδη ροή Poiseuille ενός ρευστού Bingham.

και τ_0 η τάση διαρροής. Επειδή τώρα για $\tau \leq \tau_0$ είναι

$$\dot{\gamma} = \left| \frac{du_x}{dy} \right| = 0 \implies u_x = \text{const.}$$

το ρευστό κινείται εμβολικά (δηλαδή με σταθερή ταχύτητα) στην περιοχή $-y_0 \leq y \leq y_0$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.12. Η περιοχή αυτή καλείται **περιοχή μη διαρροής** (unyielded region). Είναι φανερό ότι αν

$$y_0 = \frac{\tau_0}{(-\partial p / \partial x)} \geq H,$$

τότε δεν έχουμε ροή. (Σ' αυτή την περίπτωση η u_x είναι σταθερή για $0 \leq y \leq H$. Επειδή όμως $u_x=0$ στο $y=H$, έχουμε τελικά $u_x=0$ για $0 \leq y \leq H$.) Αυτό σημαίνει ότι η εφαρμοζόμενη κλίση πίεσης δεν είναι αρκετή για να προκαλέσει τη ροή του ρευστού Bingham.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση όπου έχουμε ροή, δηλ. $y_0 < H$. Στην **περιοχή διαρροής** (yielded region), δηλαδή για $y_0 \leq y \leq H$, είναι $\tau \geq \tau_0$ και για το ρευστό Bingham ισχύει

$$\tau_{yx} = \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k \right) \frac{du_x}{dy}$$

και επειδή

$$\dot{\gamma} = \left| \frac{du_x}{dy} \right| = -\frac{du_x}{dy}$$

$$\tau_{yx} = -\tau_0 + k \frac{du_x}{dy}. \quad (7.63)$$

Αντικαθιστώντας στην (7.55) παίρνουμε

$$-\tau_0 + k \frac{du_x}{dy} = \frac{\partial p}{\partial x} y \implies u_x = \frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + \frac{\tau_0}{k} y + c_2.$$

Η σταθερά c_2 υπολογίζεται εφαρμόζοντας τη συνθήκη μη ολίσθησης στην άνω πλάκα ($u_x=0$ για $y=H$):

$$c_2 = -\frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial x} H^2 - \frac{\tau_0}{k} H$$

και έτσι

$$u_x = -\frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial x} (H^2 - y^2) - \frac{\tau_0}{k} (H - y), \quad y_0 \leq y \leq H. \quad (7.64)$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε την τιμή της u_x στο $y=y_0$:

$$u_{x,0} = u_x(y_0) = \frac{1}{2k} \frac{\tau_0}{y_0} (H - y_0)^2 \quad (7.65)$$

ή διαφορετικά

$$u_{x,0} = -\frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial x} (H - y_0)^2 \quad (7.66)$$

Βρίσκουμε τελικά την πιο κάτω κατανομή για την ταχύτητα:

$$u_x = \begin{cases} \frac{1}{2k} \frac{\tau_0}{y_0} (H - y_0)^2, & 0 \leq y \leq y_0 \\ -\frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial x} (H^2 - y^2) - \frac{\tau_0}{k} (H - y), & y_0 \leq y \leq H \end{cases} \quad (7.67)$$

όπου το y_0 δίνεται από την (7.156). Αν $\tau_0=0$, τότε $y_0=0$ και η πιο πάνω κατανομή ανάγεται στη γνωστή μας Νευτώνεια κατανομή:

$$u_x = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (H^2 - y^2)$$

(θέσαμε $k=\eta$).

Για την ογκομετρική παροχή έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{Q}{W} &= 2 \int_0^H u_x dy \\ &= 2 \int_0^{y_0} \frac{1}{2k} \frac{\tau_0}{y_0} (H - y_0)^2 dy + 2 \int_{y_0}^H \left[-\frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial x} (H^2 - y^2) - \frac{\tau_0}{k} (H - y) \right] dy \\ &= -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ \int_0^{y_0} (H - y_0)^2 dy + \int_{y_0}^H [(H^2 - y^2) - 2y_0(H - y)] dy \right\} \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε την πιο κάτω έκφραση

$$Q = -\frac{2W}{3k} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{y_0}{H} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y_0}{H} \right)^3 \right] \quad (7.68)$$

η οποία για $y_0=0$ και $k=\eta$ ανάγεται στο γνωστό Νευτώνειο αποτέλεσμα:

$$Q = -\frac{2W}{3k} \frac{\partial p}{\partial x} H^3.$$

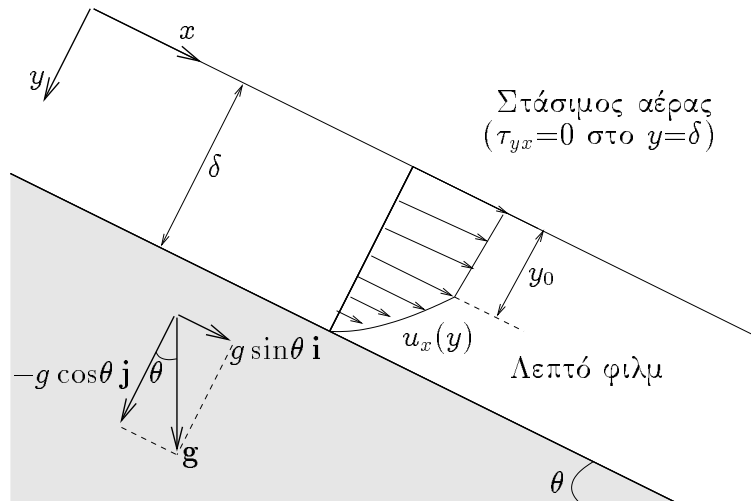
Δεδομένου ότι

$$\frac{y_0}{H} = \frac{\tau_0}{H(-\partial p/\partial x)},$$

η (7.68) δίνει την κλίση πίεσης σαν πεπλεγμένη συνάρτηση της ογκομετρικής παροχής. \square

Παράδειγμα 7.3.5. Ροή λεπτού φιλμ ρευστού Bingham σε κεκλιμένο επίπεδο

Θεωρούμε ένα λεπτό φιλμ ασυμπέστου ρευστού Bingham που ρέει σε κεκλιμένο επίπεδο όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.13. Ο αέρας πάνω από το φιλμ θεωρείται στάσιμος και έτσι η ροή οφείλεται μόνο στη βαρύτητα. Θεωρούμε ότι η επιφανειακή τάση του ρευστού είναι αμελητέα και ότι το φιλμ έχει ομοιόμορφο πάχος δ .



Σχήμα 7.13: Ροή ρευστού Bingham σε κεκλιμένο επίπεδο.

Εφόσον η βαθμίδα πίεσης είναι μηδέν, έχουμε από την (7.47)

$$\tau_{yx} = -\rho g_x y + c_1 = -\rho g \sin \theta y + c_1.$$

Θέτοντας την αρχή των αξόνων στην επιφάνεια του φιλμ βρίσκουμε από τη συνθήκη $\tau_{yx}=0$ στο $y=0$ ότι $c_1=0$. Άρα

$$\tau_{yx} = -\rho g \sin \theta y.$$

Το πρόβλημά μας είναι ουσιαστικά το ίδιο με αυτό της επίπεδης ροής Poiseuille (Παράδειγμα 7.3.4) αν αντικαστήσουμε τη βαθμίδα πίεσης με $\rho g \sin \theta$ και το H με δ . Έτσι το σημείο διαρροής όπου $\tau = |\tau_{yx}| = \tau_0$ είναι το

$$y_0 = \frac{\tau_0}{\rho g \sin \theta}. \quad (7.69)$$

Συμπεραίνουμε ότι το φιλμ ρέει εφόσον $\delta > y_0$ ή

$$\delta > \frac{\tau_0}{\rho g \sin \theta}. \quad (7.70)$$

Στην περίπτωση που το επίπεδο είναι κατακόρυφο, έχουμε ροή αν

$$\delta > \frac{\tau_0}{\rho g}. \quad (7.71)$$

Οι πιο πάνω παρατηρήσεις σχετίζονται με κοινές μας εμπειρίες. Το ρευστό Bingham μπορεί να είναι για παράδειγμα μια μπογιά. Αν το φιλμ είναι πολύ λεπτό τότε δεν υπάρχει ροή. Αν το πάχος του όμως υπερβεί μια κρίσιμη τιμή, τότε το φιλμ ρέει με ανεπιθύμητα αποτελέσματα.

Εργαζόμενοι όπως και στο παράδειγμα 7.3.4, βρίσκουμε ότι η κατανομή της ταχύτητας δίνεται από την

$$u_x = \begin{cases} \frac{1}{2k} \frac{\tau_0}{y_0} (\delta - y_0)^2, & 0 \leq y \leq y_0 \\ \frac{\rho g \sin \theta}{2k} (\delta^2 - y^2) - \frac{\tau_0}{k} (\delta - y), & y_0 \leq y \leq \delta \end{cases} \quad (7.72)$$

ενώ για την ογκομετρική παροχή παίρνουμε:

$$Q = \frac{2W \rho g \sin \theta}{3k} H^3 \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{y_0}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y_0}{\delta} \right)^3 \right] \quad (7.73)$$

□

7.4 Μόνιμες ευθύγραμμες αξονοσυμμετρικές ροές

Θεωρούμε στην παράγραφο αυτή την περίπτωση ευθύγραμμης αξονοσυμμετρικής ροής σε κυλινδρικές συντεταγμένες με μόνη μη μηδενική συνιστώσα της ταχύτητας την u_z . Με τις παραδοχές

$$u_r = u_\theta = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = 0,$$

προκύπτει από την εξίσωση συνέχειας ότι $u_z = u_z(r, t)$. Οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες των τανυστών ρυθμών παραμόρφωσης και ιξωδών τάσεων είναι αντίστοιχα οι

$$D_{rz} = D_{zr} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (7.74)$$

και

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = 2\eta(\dot{\gamma}) D_{rz} = \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (7.75)$$

όπου

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2} = \left| \frac{\partial u_z}{\partial r} \right|. \quad (7.76)$$

Η z -συνιστώσα της εξίσωσης διατήρησης της ορμής απλοποιείται ως εξής:

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \rho g_z. \quad (7.77)$$

Παραδοχές:	$u_r = u_\theta = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \text{const.}$
Εξίσωση συνέχειας:	$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_z = u_z(r)$
z -συνιστώσα:	$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau_{rz}) + \rho g_z = 0$
r -συνιστώσα:	$-\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r = 0$
θ -συνιστώσα:	$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta = 0$
<u>Γενική λύση:</u>	$\tau_{rz} = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r}$ $p = \frac{\partial p}{\partial z} z + c(r, \theta)$ <p>[$c(r, \theta) = \text{const.}$ όταν $g_r = g_\theta = 0$]</p>
Γενικευμένο Νευτώνειο ρευστό:	$\tau_{rz} = \eta(\dot{\gamma}) \frac{du_z}{dr} \quad \text{όπου } \dot{\gamma} = \left \frac{du_z}{dr} \right \quad \Rightarrow$ $\eta(\dot{\gamma}) \frac{du_z}{dr} = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r}$

Πίνακας 7.2: Εξισώσεις κίνησης, γενική λύση για τη διατμητική τάση και την πίεση και διεύρυνση εξίσωση για την ταχύτητα για στάσιμη ευθύγραμμη αξονοσυμμετρική ροή γενικευμένου Νευτώνειου ρευστού σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Στην περίπτωση μόνιμης ροής, $u_z = u_z(r)$, οπότε

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau_{rz}) + \rho g_z = 0. \quad (7.78)$$

Θεωρώντας ότι η κλίση πίεσης $\partial p/\partial z$ είναι σταθερή μπορούμε να ολοκληρώσουμε την πιο πάνω εξίσωση:

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r}, \quad (7.79)$$

όπου c_1 σταθερά που προσδιορίζεται από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος ροής. Οι εξισώσεις (7.77) και (7.78) καθώς και η λύση (7.79) για τη διατμητική τάση ισχύουν για κάθε ρευστό. Στην περίπτωση γενικευμένης Νευτώνειας ροής

$$\tau_{rz} = \eta(\dot{\gamma}) \frac{du_z}{dr}, \quad (7.80)$$

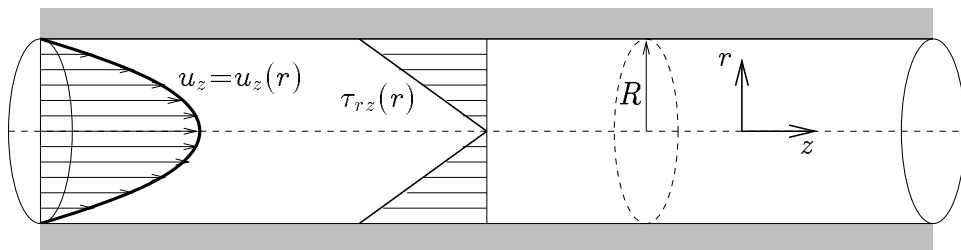
και έτσι για την ταχύτητα u_z προκύπτει η πιο κάτω ΣΔΕ:

$$\eta(\dot{\gamma}) \frac{du_z}{dr} = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r}, \quad (7.81)$$

όπου

$$\dot{\gamma} = \left| \frac{du_z}{dr} \right|. \quad (7.82)$$

Στον Πίνακα 7.2 φαίνονται οι βασικές παραδοχές, οι εξισώσεις κίνησης, η γενική λύση για τη διατμητική τάση και την πίεση και η διέπουσα εξίσωση για την ταχύτητα για στάσιμη ευθύγραμμη αξονοσυμμετρική ροή γενικευμένου Νευτώνειου ρευστού σε κυλινδρικές συντεταγμένες.



Σχήμα 7.14: Αξονοσυμμετρική ροή Poiseuille. Η κατανομή της διατμητικής τάσης είναι γραμμική για κάθε ρευστό: $\tau_{rz} = (\partial p/\partial z)r/2$.

Παράδειγμα 7.4.1. Η διατμητική τάση στην αξονοσυμμετρική ροή Poiseuille

Θεωρούμε τη μόνιμη ροή σε οριζόντιο, άπειρου μήκους κυλινδρικό αγωγό ακτίνας R υπό σταθερή κλίση πίεσης $\partial p/\partial z$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.14. Για αμελητέα βαρύτητα, η (7.79) μας δίνει

$$\tau_{rz} = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r}{2} + c_1.$$

Λόγω της συμμετρίας, $\tau_{rz}=0$ για $r=0$, και άρα $c_1=0$. Συνεπώς

$$\tau_{rz} = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r}{2}. \quad (7.83)$$

Όπως και στην περίπτωση της επίπεδης ροής Poiseuille, η διατμητική τάση μεταβάλλεται γραμμικά για κάθε ρευστό. Η διατμητική τάση που ασκείται από το ρευστό στο τοίχωμα του αγωγού είναι:

$$\tau_w = -\tau_{rz}|_{r=R} = -\frac{\partial p}{\partial z} \frac{R}{2}. \quad (7.84)$$

□

Παράδειγμα 7.4.2. Αξονοσυμμετρική ροή Poiseuille εκθετικού ρευστού

Επειδή $du_z/dr < 0$, η διατμητική τάση για εκθετικό ρευστό είναι:

$$\tau_{rz} = k \left| \frac{du_z}{dr} \right|^{n-1} \frac{du_z}{dr} = -k \left(-\frac{du_z}{dr} \right)^n$$

οπότε από την (7.83) έπεται ότι

$$-k \left(-\frac{du_z}{dr} \right)^n = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r}{2}.$$

Ολοκληρώνοντας και εφαρμόζοντας τη συνθήκη $u_z=0$ για $r=R$ βρίσκουμε:

$$u_z = \frac{n}{n+1} \left(-\frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/n} \left[R^{1/n+1} - r^{1/n+1} \right]. \quad (7.85)$$

Για $n=1$ και $k=\eta$, η (7.85) μας δίνει τη Νευτώνεια κατανομή:

$$u_z = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2).$$

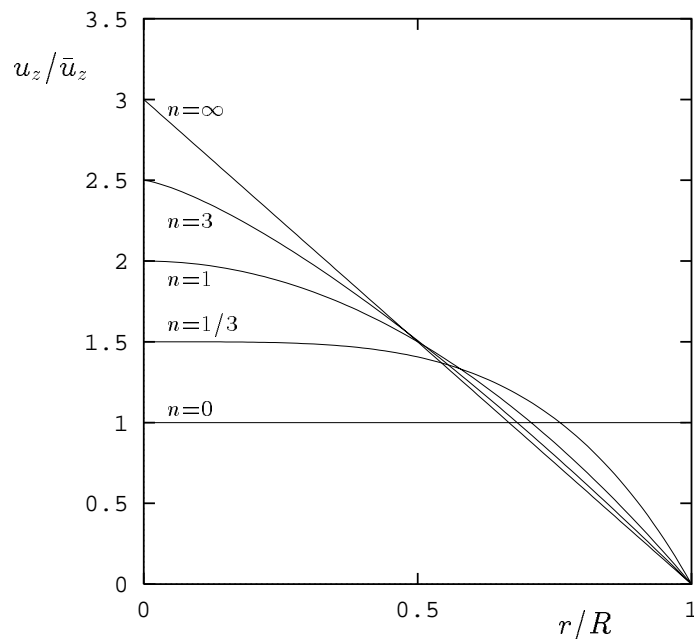
Για την ογκομετρική παροχή Q έχουμε:

$$Q = \int_0^R 2\pi u_z r dr = \frac{n}{n+1} \left(-\frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/n} \int_0^R \left[R^{1/n+1} - r^{1/n+1} \right] r dr \implies$$

$$Q = \frac{n\pi R^3}{3n+1} \left(-\frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial z} R \right)^{1/n}. \quad (7.86)$$

Θέτοντας $n=1$ και $k=\eta$ βρίσκουμε το αντίστοιχο Νευτώνειο αποτέλεσμα:

$$Q = -\frac{\pi}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^3.$$



Σχήμα 7.15: Κατανομές της ταχύτητας για διάφορες τιμές του εκθέτη n σε αξονοσυμμετρική ροή Poiseuille εκθετικού ρευστού.

Η μέση ταχύτητα είναι

$$\bar{u}_z = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{nR}{3n+1} \left(-\frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/n} \quad (7.87)$$

και έτσι

$$\frac{u_z}{\bar{u}_z} = \frac{3n+1}{n+1} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{1/n+1} \right]. \quad (7.88)$$

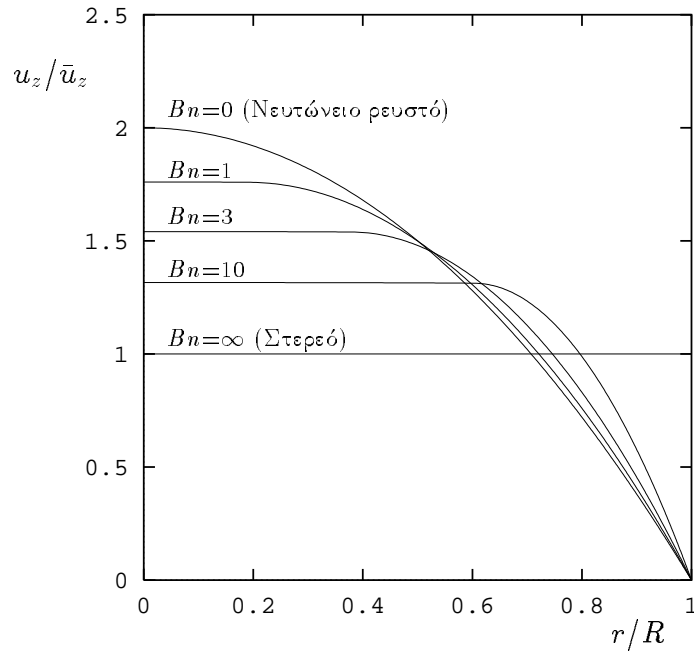
Στο Σχήμα 7.15 φαίνονται οι κατανομές της ταχύτητας για διάφορες τιμές του εκθέτη n . \square

Παράδειγμα 7.4.3. Αξονοσυμμετρική ροή Poiseuille ρευστού Bingham

Εργαζόμενοι όπως και στην επίπεδη ροή Poiseuille (Παράδειγμα 7.3.4), βρίσκουμε πρώτα το σημείο διαρροής r_0 όπου

$$|\tau_{rz}| = \tau_0 \implies \left| \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r_0}{2} \right| = \tau_0 \implies$$

$$r_0 = \frac{2\tau_0}{(-\partial p / \partial z)}. \quad (7.89)$$



Σχήμα 7.16: Κατανομές της ταχύτητας για διάφορες τιμές του αριθμού Bingham σε αξονοσυμμετρική ροή Poiseuille.

Σημειώνουμε ότι δεν παρατηρείται ροή αν

$$r_0 = \frac{2\tau_0}{(-\partial p/\partial z)} \geq R.$$

Στην περίπτωση όπου έχουμε ροή, τότε στην περιοχή διαρροής $r_0 \leq r \leq R$ έχουμε από την καταστατική εξίσωση Bingham:

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k \right) \frac{du_z}{dr} = \left[\frac{\tau_0}{\left(-\frac{du_z}{dr} \right)} + k \right] \frac{du_z}{dr} \implies \\ \tau_{rz} &= -\tau_0 + k \frac{du_z}{dr}. \end{aligned} \quad (7.90)$$

Αντικαθιστώντας στην (7.83) παίρνουμε

$$-\tau_0 + k \frac{du_z}{dr} = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r}{2} \implies u_z = \frac{1}{4k} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + \frac{\tau_0}{k} r + c_2.$$

Η σταθερά c_2 υπολογίζεται εφαρμόζοντας τη συνθήκη μη ολίσθησης στο τοίχωμα ($u_z=0$ για $r=R$):

$$c_2 = -\frac{1}{4k} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 - \frac{\tau_0}{k} R$$

και έτσι

$$u_z = -\frac{1}{4k} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2) - \frac{\tau_0}{k} (R - r), \quad r_0 \leq r \leq R. \quad (7.91)$$

Βρίσκουμε τώρα την τιμή της u_z στην περιοχή μη διαρροής ($0 \leq r \leq r_0$):

$$u_{z,0} = u_z(r_0) = \frac{1}{2k} \frac{\tau_0}{r_0} (R - r_0)^2. \quad (7.92)$$

Έχουμε έτσι την πιο κάτω κατανομή για την ταχύτητα:

$$u_z = \begin{cases} \frac{1}{2k} \frac{\tau_0}{r_0} (R - r_0)^2, & 0 \leq r \leq r_0 \\ -\frac{1}{4k} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2) - \frac{\tau_0}{k} (R - r), & r_0 \leq r \leq R \end{cases} \quad (7.93)$$

όπου το r_0 δίνεται από την (7.89). Αν $\tau_0=0$, τότε $r_0=0$. Θέτοντας $k=\eta$ η πιο πάνω κατανομή ανάγεται στη γνωστή μας Νευτώνεια κατανομή:

$$u_z = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2).$$

Αποδεικνύεται ότι για την ογκομετρική παροχή ισχύει η λεγόμενη **εξίσωση των Buckingham-Reiner**,

$$Q = -\frac{\pi}{8k} \frac{\partial p}{\partial z} R^4 \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right)^4 \right], \quad (7.94)$$

η οποία για $r_0=0$ και $k=\eta$ ανάγεται στο γνωστό Νευτώνειο αποτέλεσμα:

$$Q = -\frac{\pi}{8k} \frac{\partial p}{\partial z} R^4.$$

Στο Σχήμα 7.16 δίνονται οι κατανομές της ταχύτητας για διάφορες τιμές του αδιάστατου αριθμού Bingham ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$Bn \equiv \frac{\tau_0 R}{k \bar{u}_z}, \quad (7.95)$$

όπου \bar{u}_z η μέση ταχύτητα του ρευστού στον αγωγό. □

Παράδειγμα 7.4.4. Ροή φιλμ Bingham σε κατακόρυφο κύλινδρο

Θεωρούμε τη ροή φιλμ ρευστού Bingham το οποίο ρέει στην εξωτερική πλευρά ακίνητου, κατακόρυφου κυλίνδρου άπειρου μήκους και ακτίνας R όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.17. Το πάχος δ του φιλμ θεωρείται σταθερό και ο περιβάλλον αέρας στάσιμος. Η κλίση πίεσης είναι φυσικά μηδενική και η ροή οφείλεται στην βαρύτητα ($g_z=g$). Με την παραδοχή ότι η ροή είναι μόνιμη, από την (7.79) έχουμε:

$$\tau_{rz} = -\rho g \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r}$$

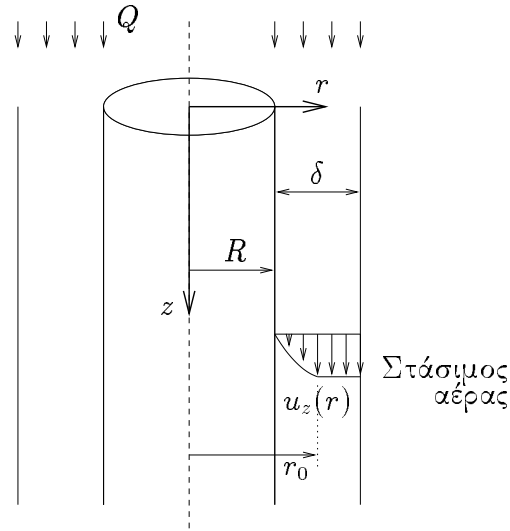
Αφού τώρα ο περιβάλλον αέρας είναι στάσιμος, η διατμητική τάση στην ελεύθερη επιφάνεια του φιλμ ($r=R+\delta$) μηδενίζεται. Με εφαρμογή της συνθήκης αυτής βρίσκουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης:

$$c_1 = \frac{\rho g}{2} (R + \delta)^2.$$

Άρα

$$\tau_{rz} = \frac{\rho g}{2} \left[\frac{(R + \delta)^2}{r} - r \right]. \quad (7.96)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε εδώ ότι η τ_{rz} είναι θετική.



Σχήμα 7.17: Ροή φιλμ Bingham στην εξωτερική πλευρά κατακόρυφου κυλίνδρου.

Αν r_0 είναι το σημείο διαρροής, όπου $\tau_{rz} = \tau_0$, τότε

$$\begin{aligned} \frac{\rho g}{2} \left[\frac{(R + \delta)^2}{r_0} - r_0 \right] &= \tau_0 \implies \\ (R + \delta)^2 - r_0^2 &= \frac{2\tau_0}{\rho g} r_0. \end{aligned} \quad (7.97)$$

Είναι φανερό ότι για να υπάρχει ροή του ρευστού Bingham πρέπει $r_0 > R$. Θέτοντας $r_0 = R$ βρίσκουμε το κρίσιμο μέγιστο πάχος δ^* του φιλμ για το οποίο δεν εμφανίζεται διαρροή και το φιλμ παραμένει ακίνητο:

$$\begin{aligned} (R + \delta^*)^2 - R^2 &= \frac{2\tau_0}{\rho g} R \implies \\ \delta^* &= \left(\sqrt{1 + \frac{2\tau_0}{\rho g R}} - 1 \right) R. \end{aligned} \quad (7.98)$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση πολύ λεπτού φιλμ όπου $\delta^* \ll R$, τότε αναγκαστικά θα είναι $2\tau_0/(\rho g R) \ll 1$ και

$$\sqrt{1 + \frac{2\tau_0}{\rho g R}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{2\tau_0}{\rho g R} = 1 - \frac{\tau_0}{\rho g R}$$

οπότε

$$\delta^* = \frac{\tau_0}{\rho g}. \quad (7.99)$$

Αυτό είναι ακριβώς το κρίσιμο πάχος επίπεδου φιλμ που βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο (βλ. Παράδειγμα 7.3.5).

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου έχουμε ροή οπότε $r_0 > R$. Η τιμή r_0 του σημείου διαρροής υπολογίζεται από την (7.97):

$$r_0 = \frac{\tau_0}{\rho g} \left[\sqrt{1 + \frac{(R + \delta)^2 \rho^2 g^2}{\tau_0^2}} - 1 \right]. \quad (7.100)$$

Επειδή στην περιοχή διαρροής ($R \leq r \leq r_0$) ο ρυθμός διάτμησης du_z/dr είναι θετικός έχουμε από την καταστατική εξίσωση Bingham

$$\tau_{rz} = \tau_0 + k \frac{du_z}{dr}.$$

Αντικαθιστώντας στην (7.96) παίρνουμε την

$$\tau_0 + k \frac{du_z}{dr} = \frac{\rho g}{2} \left[\frac{(R + \delta)^2}{r} - r \right],$$

η οποία ολοκληρώνεται εύκολα και μας δίνει την

$$u_z = \frac{\rho g}{4k} \left[2(R + \delta)^2 \ln r - r^2 \right] - \frac{\tau_0}{k} r + c_2.$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης c_2 υπολογίζεται με εφαρμογή της συνθήκης μη ολίσθησης στο τοίχωμα ($u_z=0$ για $r=R$)

$$c_2 = -\frac{\rho g}{4k} \left[2(R + \delta)^2 \ln R - R^2 \right] + \frac{\tau_0}{k} R,$$

και συνεπώς

$$u_z = \frac{\rho g}{4k} \left[R^2 - r^2 + 2(R + \delta)^2 \ln \frac{r}{R} \right] + \frac{\tau_0}{k} (R - r), \quad R \leq r \leq r_0.$$

Η τιμή $u_{z,0}$ της u_z στο σημείο διαρροής r_0 υπολογίζεται εύκολα με αντικατάσταση. Έχουμε λοιπόν την πιο κάτω κατανομή της ταχύτητας:

$$u_z = \begin{cases} \frac{\rho g}{4k} \left[R^2 - r^2 + 2(R + \delta)^2 \ln \frac{r}{R} \right] + \frac{\tau_0}{k} (R - r), & R \leq r \leq r_0 \\ \frac{\rho g}{4k} \left[R^2 - r_0^2 + 2(R + \delta)^2 \ln \frac{r_0}{R} \right] + \frac{\tau_0}{k} (R - r_0), & r_0 \leq r \leq (R + \delta) \end{cases} \quad (7.101)$$

□

7.5 Μόνιμες περιστροφικές αξονοσυμμετρικές ροές

Θεωρούμε στην παράγραφο αυτή την περίπτωση περιστροφικής αξονοσυμμετρικής ροής σε κυλινδρικές συντεταγμένες με μόνη μη μηδενική συνιστώσα της ταχύτητας την u_θ . Με τις παραδοχές

$$u_r = u_z = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$$

η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται αυτόματα. Επίσης οι συνιστώσες D_{rr} , $D_{\theta\theta}$, D_{zz} , D_{rz} και D_{zr} του τανυστή ρυθμών παραμόρφωσης καθώς και οι αντίστοιχες συνιστώσες του τανυστή ιξωδών τάσεων μηδενίζονται. Θεωρώντας ότι

$$\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z, \quad (7.102)$$

οι r - και z - συνιστώσες της εξίσωσης διατήρησης της ορμής απλοποιούνται αντίστοιχα ως εξής:

$$\rho \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (7.103)$$

και

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0. \quad (7.104)$$

Ολοκληρώνοντας την (7.104) με την παραδοχή ότι

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \text{const.}$$

βρίσκουμε ότι

$$p = -\rho g z + c(r, t).$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην (7.103) βλέπουμε ότι

$$u_\theta^2 = \frac{r}{\rho} \frac{\partial c}{\partial r}(r, t)$$

και συμπεραίνουμε ότι $u_\theta = u_\theta(r, t)$. Έτσι οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες των τανυστών ρυθμών παραμόρφωσης και ιξωδών τάσεων είναι αντίστοιχα οι

$$D_{r\theta} = D_{\theta r} = \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \quad (7.105)$$

και

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 2\eta(\dot{\gamma}) D_{r\theta} = \eta(\dot{\gamma}) r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \quad (7.106)$$

όπου

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right]^2} = r \left| \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right|. \quad (7.107)$$

Η θ -συνιστώσα της εξίσωσης διατήρησης της ορμής απλοποιείται ως εξής:

$$\rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}). \quad (7.108)$$

Στην περίπτωση μόνιμης ροής, $u_\theta = u_\theta(r)$, οπότε

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \tau_{r\theta}) = 0. \quad (7.109)$$

Παραδοχές:	$u_r = u_z = 0, \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad \mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$
Εξίσωση συνέχειας:	Ικανοποιείται αυτόματα
θ -συνιστώσα:	$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \tau_{r\theta}) = 0$
z -συνιστώσα:	$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$
r -συνιστώσα:	$\rho \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \implies u_\theta = u_\theta(r)$
Γενική λύση:	$\tau_{r\theta} = \frac{c_1}{r^2}$ $p = \rho \int \frac{u_\theta^2}{r} dr - \rho g z + c$
Γενικευμένο Νευτώνειο ρευστό:	$\tau_{r\theta} = \eta(\dot{\gamma}) r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \quad \text{όπου } \dot{\gamma} = r \left \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right \implies$ $\eta(\dot{\gamma}) r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{c_1}{r^2}$

Πίνακας 7.3: Εξισώσεις κίνησης, γενική λύση για τη διαμητική τάση και την πίεση και διέπυρα εξίσωση για την ταχύτητα για στάσιμη περιστροφική αξονοσυμμετρική ροή γενικευμένου Νευτώνειου ρευστού σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε:

$$\tau_{r\theta} = \frac{c_1}{r^2}, \quad (7.110)$$

όπου c_1 σταθερά που προσδιορίζεται από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος ροής. Οι εξισώσεις (7.108) και (7.109) καθώς και η λύση (7.110) για τη διατμητική τάση ισχύουν για κάθε ρευστό. Στην περίπτωση γενικευμένης Νευτώνειας ροής

$$\tau_{r\theta} = \eta(\dot{\gamma}) r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \quad (7.111)$$

και έτσι για την ταχύτητα u_θ προκύπτει η πιο κάτω εξίσωση:

$$\eta(\dot{\gamma}) r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{c_1}{r^2}, \quad (7.112)$$

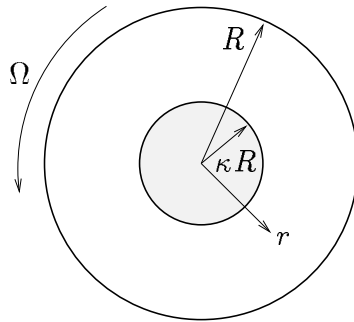
όπου

$$\dot{\gamma} = r \left| \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right| = r \left| \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r} \right|. \quad (7.113)$$

Στον Πίνακα 7.3 φαίνονται οι βασικές παραδοχές, οι εξισώσεις κίνησης, η γενική λύση για τη διατμητική τάση και την πίεση και η διέπουσα εξίσωση για την ταχύτητα για στάσιμη περιστροφική αξονοσυμμετρική ροή γενικευμένου Νευτώνειου ρευστού σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Παράδειγμα 7.5.1. Ροή εκθετικού ρευστού μεταξύ περιστρεφόμενων κυλίνδρων

Θεωρούμε τη ροή εκθετικού ρευστού μεταξύ κατακόρυφων κυλίνδρων άπειρου μήκους. Ο εξωτερικός κύλινδρος έχει ακτίνα R και περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω ενώ ο εσωτερικός κύλινδρος έχει ακτίνα κR με $\kappa < 1$ και είναι ακίνητος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.18.



Σχήμα 7.18: Ροή μεταξύ δύο κυλίνδρων. Ο εξωτερικός κύλινδρος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω ενώ ο εσωτερικός είναι ακίνητος.

Από τις συνοριακές συνθήκες

$$u_\theta = 0 \quad \text{στο} \quad r = \kappa R \quad (7.114)$$

$$u_\theta = \Omega R \quad \text{στο} \quad r = R \quad (7.115)$$

παρατηρούμε ότι η u_θ/r είναι αύξουσα στο $[\kappa R, R]$ οπότε

$$\dot{\gamma} = r \left| \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right| = r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right)$$

και για εκθετικό ρευστό

$$\tau_{r\theta} = \eta(\dot{\gamma}) r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = k r^n \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right]^n .$$

Αντικαθιστώντας στην (7.110) έχουμε

$$k r^n \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right]^n = \frac{c_1}{r^2} \implies \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{c_1'}{r^{2/n+1}} .$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τη γενική λύση:

$$u_\theta = r \left(c_2 + \frac{c_3}{r^{2/n}} \right) .$$

Οι σταθερές c_2 και c_3 υπολογίζονται με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών (7.114) και (7.115):

$$c_2 = \frac{\Omega}{1 - \kappa^{2/n}} \quad \text{και} \quad c_3 = -\frac{\Omega(\kappa R)^{2/n}}{1 - \kappa^{2/n}}$$

και έτσι

$$u_\theta = \frac{\Omega}{1 - \kappa^{2/n}} r \left[1 - \left(\frac{\kappa R}{r} \right)^{2/n} \right] . \quad (7.116)$$

Στην ειδική περίπτωση του Νευτώνειου ρευστού ($n=1$) η πιο πάνω εξίσωση γίνεται

$$u_\theta = \frac{\Omega}{1 - \kappa^2} r \left[1 - \left(\frac{\kappa R}{r} \right)^2 \right] .$$

Η εύρεση της κατανομής της πίεσης, $p(r, z)$ αφήνεται σαν άσκηση. □

Παράδειγμα 7.5.2. Ροή εκθετικού ρευστού γύρω από περιστρεφόμενο κύλινδρο

Θεωρούμε τώρα τη ροή μιας άπειρης λίμνης εκθετικού ρευστού γύρω από κατακόρυφο κύλινδρο ακτίνας R ο οποίος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με γωνιακή ταχύτητα Ω , όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.19.

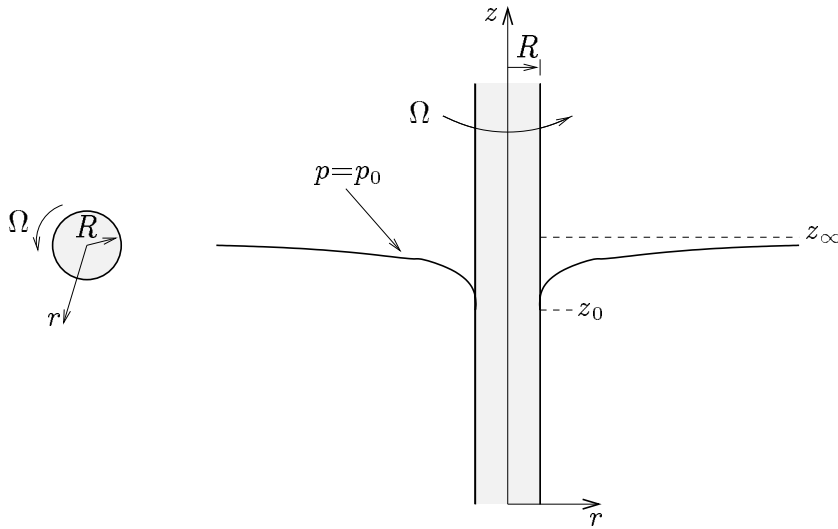
Από τις συνοριακές συνθήκες

$$u_\theta = \Omega R \quad \text{στο} \quad r = R \quad (7.117)$$

$$u_\theta = 0 \quad \text{για} \quad r \rightarrow \infty \quad (7.118)$$

παρατηρούμε ότι η u_θ/r είναι φθίνουσα στο $[R, \infty)$ οπότε

$$\dot{\gamma} = r \left| \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right| = -r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right)$$



Σχήμα 7.19: Ροή λίμνης ρευστού γύρω από περιστρεφόμενο κύλινδρο: κάτοψη και μορφή της ελεύθερης επιφάνειας.

και για εκθετικό ρευστό

$$\tau_{r\theta} = \eta(\dot{\gamma}) r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = -k r^n \left[-\frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right]^n .$$

Αντικαθιστώντας στην (7.110) έχουμε

$$-k r^n \left[-\frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right]^n = \frac{c_1}{r^2} \implies \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{c_1'}{r^{2/n+1}} ,$$

όπου το αρνητικό πρόσημο απορροφήθηκε στη νέα σταθερά c_1' . Η τελευταία εξίσωση έχει γενική λύση την:

$$u_\theta = r \left(c_2 + \frac{c_3}{r^{2/n}} \right) .$$

Από τη συνοριακή συνθήκη (7.118) συμπεραίνουμε ότι $c_2=0$, ενώ από την (7.117) βρίσκουμε:

$$c_3 = \Omega R^{2/n} .$$

Άρα η κατανομή της ταχύτητας είναι:

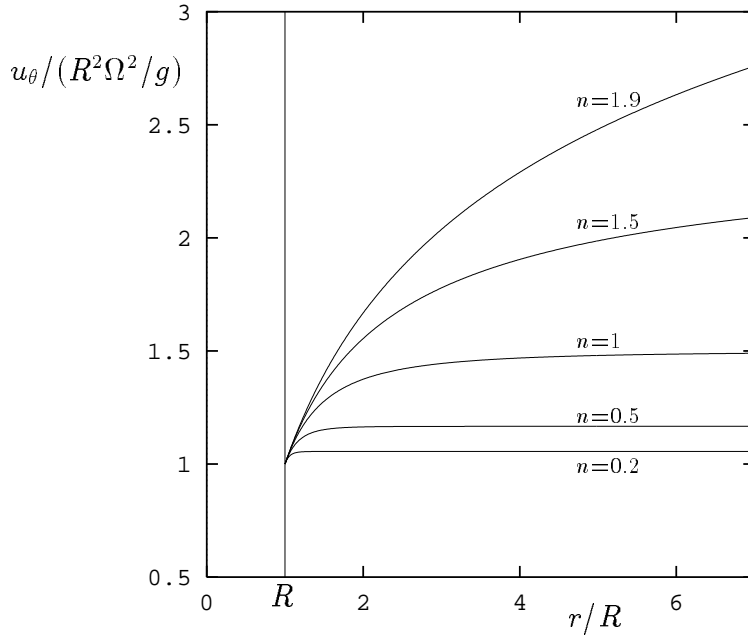
$$u_\theta = \Omega \left(\frac{R}{r} \right)^{2/n} r . \quad (7.119)$$

Στην ειδική περίπτωση του Νευτώνειου ρευστού ($n=1$) η πιο πάνω εξίσωση ανάγεται στην

$$u_\theta = \Omega R^2 \frac{1}{r} .$$

Θα βρούμε τώρα την κατανομή της πίεσης. Από τις r - και z - συνιστώσες της εξίσωσης διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$\rho \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{και} \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$$



Σχήμα 7.20: Μορφές της ελεύθερης επιφάνειας λίμνης εκθετικού ρευστού στην οποία περιστρέφεται κατακόρυφος κύλινδρος.

οπότε

$$p = \rho \int \frac{u_{\theta}^2}{r} dr - \rho g z + c, \quad (7.120)$$

όπου c σταθερά ολοκλήρωσης. Αντικαθιστώντας την u_{θ} και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε

$$p(r, z) = -\frac{n}{2(2-n)} \rho \Omega^2 R^2 \left(\frac{R}{r}\right)^{4/n-2} - \rho g z + c. \quad (7.121)$$

Για $n=1$ παίρνουμε το Νευτώνειο αποτέλεσμα

$$p(r, z) = -\frac{1}{2} \rho \Omega^2 R^4 \frac{1}{r^2} - \rho g z + c.$$

Θεωρούμε τώρα την ελεύθερη επιφάνεια της άπειρης λίμνης του εκθετικού ρευστού στην οποία περιστρέφεται ο κατακόρυφος κύλινδρος όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.19. Με αμελητέα επίδραση της επιφανειακής τάσης, η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση p_0 . Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης c , θεωρούμε γνωστό το σημείο επαφής του κυλίνδρου με την ελεύθερη επιφάνεια. Θέτοντας $p=p_0$ για $z=z_0$ και $r=R$, βρίσκουμε

$$c = \frac{n}{2(2-n)} \rho \Omega^2 R^2 + \rho g z_0,$$

και έτσι

$$p = \frac{n}{2(2-n)} \rho \Omega^2 R^2 \left[1 - \left(\frac{R}{r}\right)^{4/n-2} \right] - \rho g (z - z_0) + p_0.$$

Επειδή η πίεση είναι σταθερή στην ελεύθερη επιφάνεια, η εξίσωσή της θα είναι

$$p - p_0 = 0 \implies \frac{n}{2(2-n)} \rho \Omega^2 R^2 \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^{4/n-2} \right] - \rho g (z - z_0) = 0 \implies$$

$$z = z_0 + \frac{n}{2(2-n)} \frac{R^2 \Omega^2}{g} \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^{4/n-2} \right]. \quad (7.122)$$

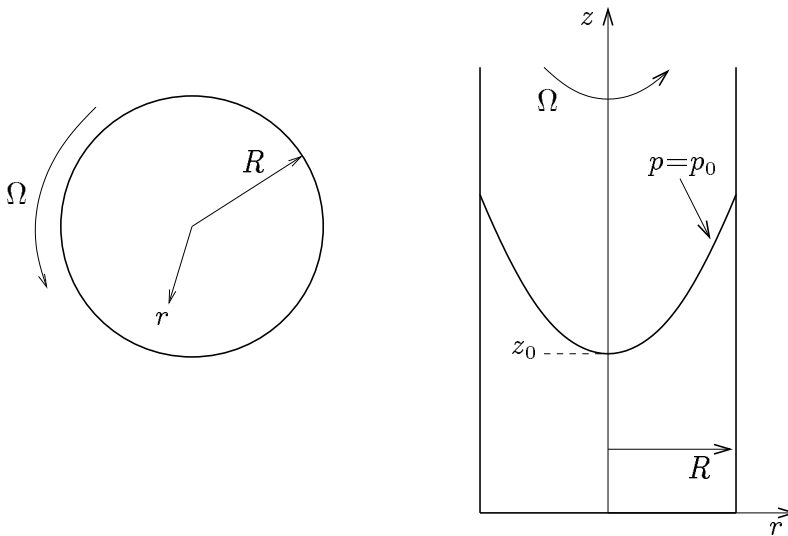
Είναι φανερό ότι για $n < 2$ η ελεύθερη επιφάνεια ανυψώνεται καθώς το r αυξάνει και προσεγγίζει ασυμπτωτικά την τιμή

$$z_\infty = z_0 + \frac{n}{2(2-n)} \frac{R^2 \Omega^2}{g}.$$

Στο Σχήμα 7.20 δίνουμε τις μορφές της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορες τιμές του εκθέτη n . Παρατηρούμε ότι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας μειώνεται με τον εκθέτη n . Έτσι στην περίπτωση διασταλτικών ρευστών ($n > 1$) έχουμε μεγαλύτερη ανύψωση απ'ότι στην Νευτώνεια περίπτωση. Παρατηρούμε επίσης ότι για τον εκθέτη υπάρχει ο περιορισμός $n < 2$ (γιατί;). □

Παράδειγμα 7.5.3. Ροή εκθετικού ρευστού σε περιστρεφόμενο κύλινδρο

Θεωρούμε τώρα τη ροή εκθετικού ρευστού σε κατακόρυφο κύλινδρο ακτίνας R ο οποίος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με γωνιακή ταχύτητα Ω , όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.21.



Σχήμα 7.21: Ροή ρευστού σε περιστρεφόμενο κύλινδρο: κάτοψη και μορφή της ελεύθερης επιφάνειας.

Από την (7.110) γνωρίζουμε ότι

$$\tau_{r\theta} = \frac{c_1}{r^2}.$$

Επειδή μόνο πεπερασμένες τιμές της $\tau_{r\theta}$ είναι αποδεκτές, η σταθερά c_1 είναι αναγκαστικά ίση με μηδέν και έτσι

$$\tau_{r\theta} = 0.$$

Από την καταστατική εξίσωση του εκθετικού ρευστού έχουμε τότε

$$\tau_{r\theta} = \eta(\dot{\gamma}) r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = 0 \implies \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = 0 \implies u_\theta = c_2 r.$$

Η εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης $u_\theta = \Omega R$ στο $r = R$ μας δίνει $c_2 = R$ και έτσι

$$u_\theta = \Omega r. \quad (7.123)$$

Όπως και στη Νευτώνεια περίπτωση, έχουμε περιστροφή στερεού σώματος. Αυτό συμβαίνει όχι μόνο για κάθε γενικευμένο Νευτώνειο αλλά γενικά για κάθε ρευστό.

Η κατανομή της πίεσης καθώς και η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας (Σχήμα 7.21) είναι και αυτές οι ίδιες με αυτές που βρίσκουμε για το Νευτώνειο ρευστό. Εργαζόμενοι όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα βρίσκουμε για την πίεση:

$$p = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g z + c$$

και ότι η ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού είναι μια παραβολή:

$$z = z_0 + \frac{\Omega^2}{2g} r^2.$$

□

Παράδειγμα 7.5.4. Ροή ρευστού Bingham μεταξύ περιστρεφόμενων κυλίνδρων

Θεωρούμε τη ροή ρευστού Bingham μεταξύ κατακόρυφων κυλίνδρων μεγάλου μήκους L και ακτίνων κR και R με $\kappa < 1$, στη γεωμετρία του Σχήματος 7.18 (Παράδειγμα 7.5.1). Ο εξωτερικός κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω ενώ ο εσωτερικός κύλινδρος είναι ακίνητος.

Θα θεωρήσουμε ότι η ροπή T που ασκείται στον εξωτερικό κύλινδρο είναι γνωστή (αυτή μπορεί εύκολα να μετρηθεί σ'ένα πείραμα). Επειδή η ασκούμενη δύναμη στον κύλινδρο είναι

$$F = \tau_{r\theta}|_{r=R} 2\pi R L,$$

για την ροπή ισχύει

$$T = FR = \tau_{r\theta}|_{r=R} 2\pi R^2 L. \quad (7.124)$$

Από την (7.110) γνωρίζουμε ότι

$$\tau_{r\theta} = \frac{c_1}{r^2}.$$

Η σταθερά c_1 υπολογίζεται με εφαρμογή της (7.124),

$$T = \frac{c_1}{R^2} 2\pi R^2 L \implies c_1 = \frac{T}{2\pi L},$$

οπότε

$$\tau_{r\theta} = \frac{T}{2\pi L} \frac{1}{r^2}. \quad (7.125)$$

Το πιο πάνω αποτέλεσμα ισχύει για οποιοδήποτε ρευστό κα μπορεί να ληφθεί επίσης με βάση τη διατήρηση της γωνιακής ορμής καθώς αυτή μεταδίδεται από τον εξωτερικό στον εσωτερικό κύλινδρο.

Επειδή η καταστατική εξίσωση του ρευστού Bingham είναι ασυνεχής, υπολογίζουμε πρώτα το πιθανό σημείο διαρροής r_0 όπου $\tau_0 = \tau = \tau_{r\theta}$:

$$\tau_0 = \frac{T}{2\pi L} \frac{1}{r_0^2} \implies$$

$$\boxed{r_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi L \tau_0}}}. \quad (7.126)$$

Επειδή το r_0 μπορεί να μη βρίσκεται στο πεδίο ροής $[\kappa R, R]$, διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: Αν $r_0 \leq \kappa R$, τότε σε όλο το πεδίο ροής είναι

$$\tau_{r\theta} \leq \tau_0 \implies \dot{\gamma} = r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = 0 \implies u_\theta = c_2 r.$$

Αν είχαμε περιστροφή του εξωτερικού κυλίνδρου με γωνιακή ταχύτητα Ω οι συνοριακές συνθήκες της ροής θα ήταν

$$\begin{aligned} u_\theta &= 0 \quad \text{στο} \quad r = \kappa R \\ u_\theta &= \Omega R \quad \text{στο} \quad r = R \end{aligned}$$

Η μόνη επιλογή στην οποία ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες είναι η $c_2=0$ οπότε αναγκαστικά $\Omega=0$. Συνεπώς δεν έχουμε ροή ($u_\theta=0$). Επίσης, αν και η ασκούμενη στον εξωτερικό κύλινδρο ροπή είναι μη μηδενική, αυτή δεν είναι ικανή να προκαλέσει την περιστροφή του. Η κρίσιμη τιμή T_{c1} της ροπής πάνω από την οποία ο κύλινδρος αρχίζει να περιστρέφεται αντιστοιχεί στην περίπτωση που είναι $r_0=\kappa R$, δηλαδή

$$T_{c1} = 2\pi L \tau_0 \kappa^2 R^2.$$

Περίπτωση 2: Αν $r_0 \geq R$, τότε όλο το πεδίο ροής είναι πεδίο διαρροής. Η κρίσιμη τιμή της ροπής T στην οποία συμβαίνει αυτό αντιστοιχεί στο $r_0=R$:

$$T_{c2} = 2\pi L \tau_0 R^2.$$

Επειδή $\tau_{r\theta} \geq \tau_0$ και

$$\dot{\gamma} = r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right)$$

(η u_θ/r είναι αύξουσα συνάρτηση του r), θα έχουμε

$$\tau_{r\theta} = \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k \right) r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = \tau_0 + k r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right), \quad \kappa R \leq r \leq R.$$

Αντικαθιστώντας στην (7.125) παίρνουμε τη ΔΕ:

$$\tau_0 + k r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{T}{2\pi L} \frac{1}{r^2}.$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε:

$$\frac{u_\theta}{r} = -\frac{T}{4\pi Lk} \frac{1}{r^2} - \frac{\tau_0}{k} \ln r + c_2.$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη $u_\theta = \Omega R$ στο $r = R$ βρίσκουμε ότι

$$\frac{u_\theta}{r} = \Omega + \frac{T}{4\pi LkR^2} \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] - \frac{\tau_0}{k} \ln \frac{r}{R}, \quad \kappa R \leq r \leq R. \quad (7.127)$$

Εφαρμόζοντας την εναπομείνασα συνθήκη $u_\theta = 0$ στο $r = \kappa R$ και λύνοντας ως προς Ω βρίσκουμε την εξίσωση:

$$\Omega = \frac{T}{4\pi LkR^2} \left(\frac{1}{\kappa^2} - 1 \right) + \frac{\tau_0}{k} \ln \kappa \quad (7.128)$$

Η εξίσωση αυτή που μας δίνει τη γωνιακή ταχύτητα Ω σαν συνάρτηση της ροπής T είναι γνωστή σαν **εξίσωση Reiner-Rivlin**. Αυτή εισηγείται και μια μέθοδο υπολογισμού των ρεολογικών παραμέτρων τ_0 και k .

Περίπτωση 3: Αν $\kappa R \leq r_0 \leq R$, τότε διακρίνουμε δύο περιοχές ροής:

$$\begin{cases} \tau_0 + k r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{T}{2\pi L} \frac{1}{r^2}, & \kappa R \leq r \leq r_0 \\ \dot{\gamma} = 0, & r_0 \leq r \leq R \end{cases}$$

Στην περιοχή μη διαρροής ($r_0 \leq r \leq R$) βρίσκουμε (βλ. περίπτωση 1)

$$u_\theta = c_2 r.$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη $u_\theta = \Omega R$ στο $r = R$ βρίσκουμε $c_2 = \Omega$ και έτσι

$$u_\theta = \Omega r, \quad r_0 \leq r \leq R.$$

Ολοκληρώνοντας τη ΔΕ στην περιοχή διαρροής ($\kappa R \leq r \leq r_0$) βρίσκουμε όπως και στην περίπτωση 2:

$$\frac{u_\theta}{r} = -\frac{T}{4\pi Lk} \frac{1}{r^2} - \frac{\tau_0}{k} \ln r + c_2.$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη $u_\theta = \Omega r_0$ στο $r = r_0$ βρίσκουμε ότι

$$\frac{u_\theta}{r} = \Omega + \frac{T}{4\pi Lkr_0^2} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right] - \frac{\tau_0}{k} \ln \frac{r}{r_0}, \quad \kappa R \leq r \leq r_0. \quad (7.129)$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματά μας στις δύο περιοχές, έχουμε την ακόλουθη κατανομή για την ταχύτητα

$$\frac{u_\theta}{r} = \begin{cases} \Omega + \frac{T}{4\pi Lkr_0^2} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right] - \frac{\tau_0}{k} \ln \frac{r}{r_0}, & \kappa R \leq r \leq r_0 \\ \Omega, & r_0 \leq r \leq R \end{cases} \quad (7.130)$$

Με εφαρμογή της συνθήκης $u_\theta=0$ για $r=\kappa R$, βρίσκουμε

$$\Omega = \frac{T}{4\pi Lkr_0^2} \left[\left(\frac{r_0}{\kappa R} \right)^2 - 1 \right] + \frac{\tau_0}{k} \ln \frac{\kappa R}{r_0}. \quad (7.131)$$

Αυτή είναι η εκδοχή της εξίσωσης Reiner-Rivlin για την περίπτωση όπου $\kappa R < r_0 < R$, η οποία όμως δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη αφού η πειραματική εύρεση του σημείου διαρροής r_0 είναι δύσκολη. Έτσι, σε πειράματα μέτρησης των ρεολογικών παραμέτρων τ_0 και k , φροντίζουμε έτσι ώστε η ροή να αντιστοιχεί σ' αυτή της περίπτωσης 2 όπου για

$$T > T_{c2} = 2\pi L\tau_0 R^2$$

έχουμε $r_0 > R$. Παρατηρούμε τέλος ότι για $r_0=\kappa R$, η (7.131) μας δίνει $\Omega=0$ που σημαίνει η ροή αντιστοιχεί στην περίπτωση 1. □

7.6 Μεταβατικές μονοδιάστατες ροές

Στις αναλύσεις των προηγούμενων παραγράφων βρήκαμε επίσης τις εξισώσεις που διέπουν τις αντίστοιχες μεταβατικές ροές. Για ευκολία, τις παραθέτουμε συνοπτικά εδώ.

Μεταβατικές μονοδιάστατες ευθύγραμμες ροές σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Για την $u_x(y, t)$ έχουμε από την x -συνιστώσα της εξίσωσης διατήρησης της ορμής:

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho g_x. \quad (7.132)$$

Μεταβατικές ευθύγραμμες αξονοσυμμετρικές ροές

Για την $u_z(r, t)$ έχουμε από την z -συνιστώσα της εξίσωσης διατήρησης της ορμής:

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \rho g_z. \quad (7.133)$$

Μεταβατικές ευθύγραμμες αξονοσυμμετρικές ροές

Για την $u_\theta(r, t)$ έχουμε από την θ -συνιστώσα της εξίσωσης διατήρησης της ορμής:

$$\rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}). \quad (7.134)$$

Η μη μηδενική συνιστώσα του τανυστή τάσεων που εμφανίζεται στη διέπουσα εξίσωση διατήρησης της ορμής εκφράζεται συναρτήσει της αντίστοιχης συνιστώσας του τανυστή ρυθμών παραμόρφωσης (και άρα συναρτήσει της μη μηδενικής συνιστώσας της ταχύτητας) μέσω της καταστατικής εξίσωσης του ρευστού. Η διέπουσα εξίσωση συνοδεύεται από κατάλληλες συνοριακές συνθήκες και την αρχική συνθήκη του μεταβατικού προβλήματος ροής. Σε αντίθεση με τις αντίστοιχες Νευτώνειες ροές, οι περισσότερες μεταβατικές γενικευμένες Νευτώνειες ροές δεν επιδέχονται αναλυτική λύση. Προστρέχουμε λοιπόν σε αριθμητικές μεθόδους. Συνήθως χρησιμοποιείται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για τη χωρική διακριτοποίηση και η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών για τη χρονική ολοκλήρωση.

Στη συνέχεια θα δούμε μερικά παραδείγματα μεταβατικών μονοδιάστατων γενικευμένων Νευτώνειων ροών τα οποία επιλύθηκαν αριθμητικά.

Παράδειγμα 7.6.1. Διακοπή επίπεδης ροής Couette ρευστού Bingham

Θεωρούμε το πρόβλημα της διακοπής της επίπεδης ροής Couette (cessation of plane Couette flow) όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.22. Στον χρόνο $t=0$, η κατανομή της ταχύτητας u_x είναι ως γνωστό γραμμική:

$$u_x(y, 0) = \left(1 - \frac{y}{H}\right) V, \quad (7.135)$$

όπου V είναι η ταχύτητα της κάτω πλάκας. Στον χρόνο $t=0^+$ η κάτω πλάκα ακινητοποιείται ξαφνικά και έτσι οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος έχουν ως εξής:

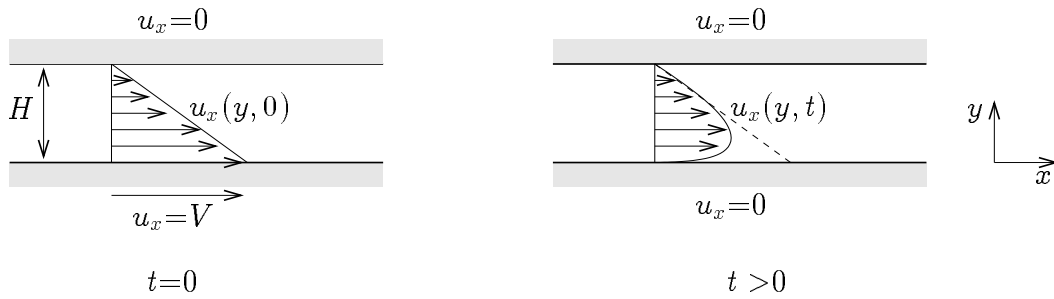
$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= 0, \quad t > 0 \\ u_x(H, t) &= 0, \quad t > 0 \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι η κλίση πίεσης και η βαρύτητα είναι μηδέν, η εξίσωση (7.132) απλοποιείται ως εξής:

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}. \quad (7.136)$$

Η αριθμητική επίλυση του προβλήματος ροής με την ασυνεχή καταστατική εξίσωση Bingham είναι δύσκολη αφού πρέπει κάποιος να βρίσκει σε κάθε χρονική στιγμή τη θέση του σημείου διαρροής για να χρησιμοποιήσει την κατάλληλη εξίσωση για το ρυθμό διάτμησης. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε το συνεχές μοντέλο του Παπαναστασίου, η τανυστική μορφή του οποίου έχει ως εξής:

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \left\{ \frac{\tau_0 [1 - \exp(-m\dot{\gamma})]}{\dot{\gamma}} + k \right\} \mathbf{D}, \quad (7.137)$$



Σχήμα 7.22: Διακοπή επίπεδης ροής Couette.

όπου

$$\dot{\gamma} \equiv \sqrt{2II_{\mathbf{D}}}.$$

Στο παρόν μονοδιάστατο πρόβλημα ροής η (7.137) ανάγεται στην

$$\tau_{yx} = \left\{ \frac{\tau_0 [1 - \exp(-m\dot{\gamma})]}{\dot{\gamma}} + k \right\} \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (7.138)$$

όπου

$$\dot{\gamma} = \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|.$$

Θα αδιαστατοποιήσουμε τις διέπουσες εξισώσεις χρησιμοποιώντας τις πιο κάτω κλίμακες:

$$y^* = \frac{y}{H}, \quad u_x^* = \frac{u_x}{V}, \quad t^* = \frac{t}{H/V} \quad \text{και} \quad \tau_{yx}^* = \frac{\tau_{yx}}{kV/H}. \quad (7.139)$$

Αντικαθιστώντας στις (7.136) και (7.138) βρίσκουμε αντίστοιχα:

$$\frac{\rho V H}{k} \frac{\partial u_x^*}{\partial t^*} = \frac{\partial \tau_{yx}^*}{\partial y^*}$$

και

$$\tau_{yx}^* = \left\{ \frac{\frac{\tau_0 H}{kV} [1 - \exp(-(mV/H)\dot{\gamma}^*)]}{\dot{\gamma}^*} + 1 \right\} \frac{\partial u_x^*}{\partial y^*}.$$

Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται τρεις αδιάστατοι αριθμοί: ο **αριθμός Reynolds**,

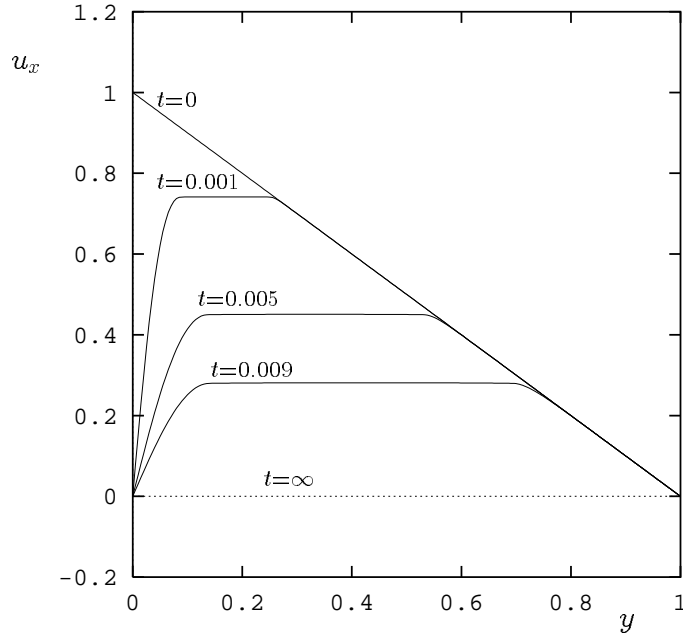
$$Re \equiv \frac{\rho V H}{k}, \quad (7.140)$$

ο **αριθμός Bingham**,

$$Bn \equiv \frac{\tau_0 H}{kV} \quad (7.141)$$

και η αδιάστατη παράμετρος

$$m^* \equiv \frac{mV}{H}. \quad (7.142)$$



Σχήμα 7.23: Εξέλιξη της κατανομής της ταχύτητας στη διακοπή επίπεδης ροής Couette ρευστού Bingham με $Re=1$, $Bn=10$ και $m=200$.

Οι αδιαστατοποιημένες διέπουσες εξισώσεις είναι λοιπόν οι

$$Re \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (7.143)$$

και

$$\tau_{yx} = \left\{ \frac{Bn [1 - \exp(-m\dot{\gamma})]}{\dot{\gamma}} + 1 \right\} \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (7.144)$$

όπου παραλείψαμε τους αστερίσκους για χάρη απλότητας. Οι αδιαστατοποιημένες συνοριακές συνθήκες καθώς και η αρχική συνθήκη έχουν ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} u_x(0, t) &= 0, & t > 0 \\ u_x(1, t) &= 0, & t > 0 \\ u_x(y, 0) &= 1 - y, & 0 \leq y \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (7.145)$$

Στο Σχήμα 7.23 δίνεται η εξέλιξη της κατανομής της ταχύτητας u_x για $Re=1$, $Bn=10$ και $m=200$. Είναι φανερό ότι η περιοχή όπου η κατανομή της ταχύτητας είναι σταθερή είναι περιοχή μη διαρροής (unyielded region). Τα όρια της περιοχής αυτής θα ήταν δύσκολο να εντοπιστούν αν χρησιμοποιούσαμε το ασυνεχές μοντέλο Bingham. \square

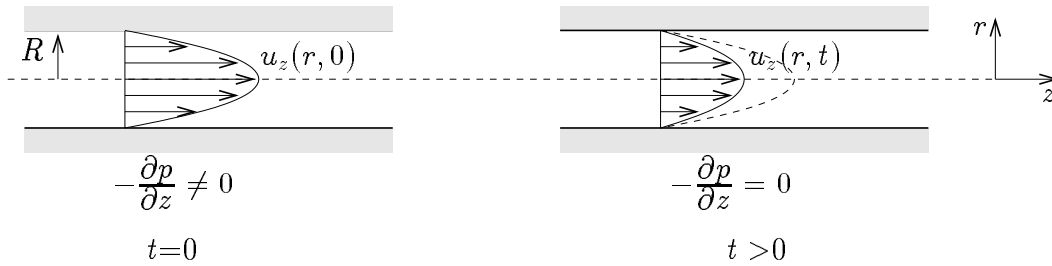
Παράδειγμα 7.6.2. Διακοπή αξονοσυμμετρικής ροής Poiseuille εκθετικού ρευστού

Θεωρούμε το πρόβλημα της διακοπής της αξονοσυμμετρικής ροής Poiseuille όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.24. Στον χρόνο $t=0$, η κατανομή της ταχύτητας u_z εκθετικού

ρευστού δίνεται από τη στάσιμη λύση την οποία βρήκαμε στο Παράδειγμα 7.4.2:

$$u_z(r, 0) = \frac{n}{n+1} \left(-\frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/n} \left[R^{1/n+1} - r^{1/n+1} \right]. \quad (7.146)$$

Στον χρόνο $t=0^+$ η κλίση πίεσης μηδενίζεται οπότε η ταχύτητα αρχίζει να μειώνεται για να μηδενιστεί σε άπειρο χρόνο.



Σχήμα 7.24: Διακοπή αξονοσυμμετρικής ροής Poiseuille.

Δεδομένου ότι η κλίση πίεσης (για $t > 0$) και η βαρύτητα είναι μηδέν, η εξίσωση (7.133) απλοποιείται ως εξής:

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}). \quad (7.147)$$

Η διατμητική τάση για εκθετικό ρευστό δίνεται από την

$$\tau_{rz} = k \dot{\gamma}^{n-1} \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad (7.148)$$

όπου

$$\dot{\gamma} = \left| \frac{\partial u_z}{\partial r} \right|.$$

Για την αδιαστατοποίηση των διεπουσών εξισώσεων, χρησιμοποιούμε σαν χαρακτηριστικό μήκος την ακτίνα R του κυλινδρικού αγωγού. Σαν χαρακτηριστική ταχύτητα παίρνουμε τη μέση τιμή της ταχύτητας στο χρόνο $t=0$ η οποία είναι γνωστή από το Παράδειγμα 7.4.2:

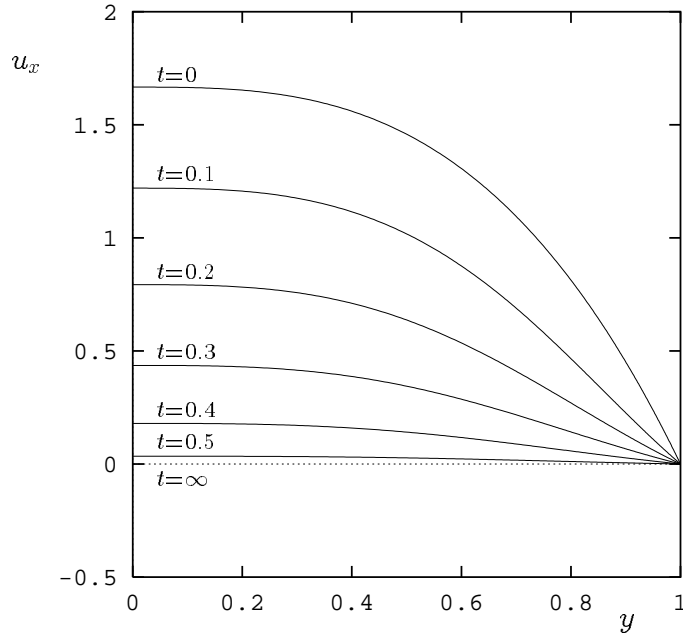
$$V = \bar{u}_z = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{nR}{3n+1} \left(-\frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/n}. \quad (7.149)$$

Χρησιμοποιώντας τις πιο κάτω κλίμακες

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad u_z^* = \frac{u_z}{V}, \quad t^* = \frac{t}{R/V} \quad \text{και} \quad \tau_{rz}^* = \frac{\tau_{rz}}{kV^n/R^n} \quad (7.150)$$

βρίσκουμε τις αδιαστατοποιημένες διέπουσες εξισώσεις τις οποίες παραθέτουμε χάριν απλότητας χωρίς αστερίσκους:

$$Re \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}). \quad (7.151)$$



Σχήμα 7.25: Εξέλιξη της κατανομής της ταχύτητας στη διακοπή αξιουοσυμμετρικής ροής Poiseuille εκθετικού ρευστού με $Re=1$ και $n=0.5$.

και

$$\tau_{rz} = \dot{\gamma}^{n-1} \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad (7.152)$$

όπου ο αριθμός Reynolds ορίζεται τώρα ως εξής:

$$Re \equiv \frac{\rho V^{2-n} R^n}{k}. \quad (7.153)$$

Οι αδιαστατοποιημένες συνοριακές συνθήκες καθώς και η αρχική συνθήκη έχουν ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial r}(0, t) &= 0, & t > 0 \\ u_z(1, t) &= 0, & t > 0 \\ u_z(r, 0) &= \frac{3n+1}{n+1} \left(1 - r^{1/n+1}\right), & 0 \leq r \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (7.154)$$

Στο Σχήμα 7.25 δίνεται η εξέλιξη της κατανομής της ταχύτητας u_z για $Re=1$ και $n=0.5$ □

Παράδειγμα 7.6.3. Διακοπή επίπεδης ροής Poiseuille ρευστού Bingham

Θεωρούμε το πρόβλημα της διακοπής της επίπεδης ροής Poiseuille ενός ρευστού Bingham, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.26. Στον χρόνο $t=0$, η κατανομή της ταχύτητας u_x εκθετικού ρευστού δίνεται από τη στάσιμη λύση την οποία βρήκαμε στο Παράδειγμα

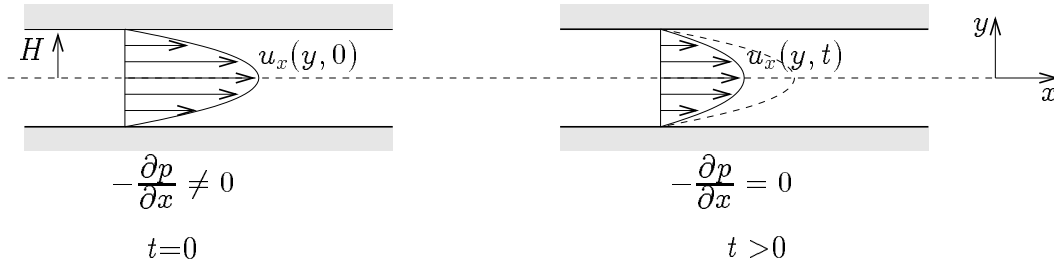
7.3.4:

$$u_x = \begin{cases} \frac{1}{2k} \frac{\tau_0}{y_0} (H - y_0)^2, & 0 \leq y \leq y_0 \\ -\frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial x} (H^2 - y^2) - \frac{\tau_0}{k} (H - y), & y_0 \leq y \leq H \end{cases} \quad (7.155)$$

όπου

$$y_0 = \frac{\tau_0}{(-\partial p / \partial x)} \quad (7.156)$$

Στον χρόνο $t=0^+$ η κλίση πίεσης μηδενίζεται οπότε η ταχύτητα αρχίζει να μειώνεται για να μηδενιστεί σε άπειρο χρόνο.



Σχήμα 7.26: Διακοπή επίπεδης ροής Poiseuille.

Για την επίλυση αυτού του προβλήματος ροής θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση Παπαναστασίου. Χρησιμοποιούμε τις κλίμακες

$$y^* = \frac{y}{H}, \quad u_x^* = \frac{u_x}{V}, \quad t^* = \frac{t}{H/V} \quad \text{και} \quad \tau_{yx}^* = \frac{\tau_{yx}}{kV/H}, \quad (7.157)$$

όπου H είναι η ημιάποσταση μεταξύ των παράλληλων πλακών (βλ. Σχήμα 7.26) και V η μέση τιμή της ταχύτητας στον χρόνο $t=0$:

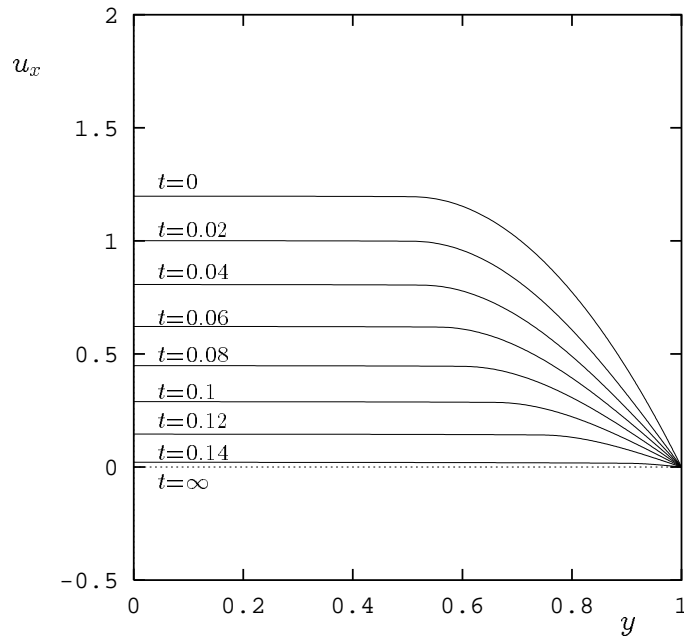
$$V = \frac{Q}{2WH}$$

Οι αδιαστατοποιημένες εξισώσεις είναι οι ίδιες με αυτές του Παραδείγματος 7.6.1. Οι αδιαστατοποιημένες συνοριακές συνθήκες καθώς και η αρχική συνθήκη έχουν ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial y}(0, t) &= 0, & t > 0 \\ u_x(1, t) &= 0, & t > 0 \\ u_x(y, 0) &= u_x^s(y), & 0 \leq r \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (7.158)$$

όπου $u_x^s(y)$ η αδιαστατοποιημένη μόνιμη λύση.

Στο Σχήμα 7.25 δίνεται η εξέλιξη της κατανομής της ταχύτητας u_x για $Re=1$, $Bn=5$ και $m=200$. Στο Σχήμα 7.28 βλέπουμε τη μεταβολή της ογκομετρικής παροχής για $Re=1$, $m=200$ και διάφορους αριθμούς Bingham. Παρατηρούμε ότι ο τερματισμός της ροής επιταχύνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός Bingham. Στη Νευτώνεια περίπτωση

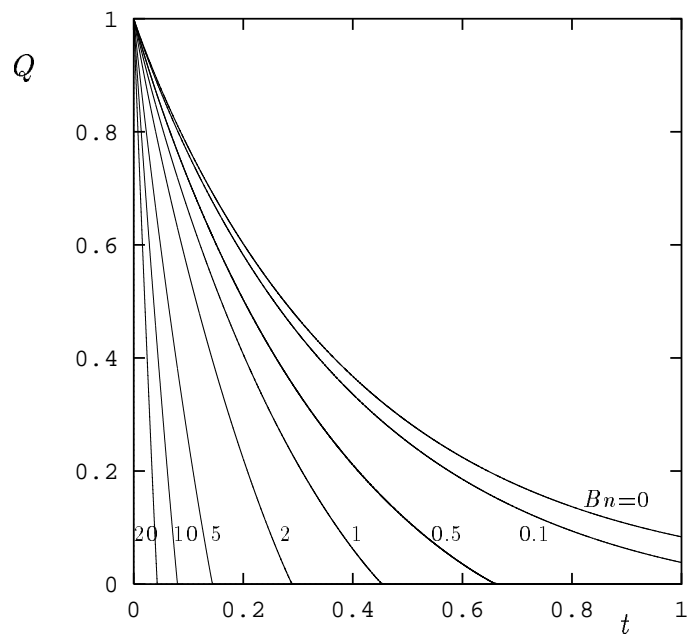


Σχήμα 7.27: Εξέλιξη της κατανομής της ταχύτητας στη διακοπή επίπεδης ροής Poiseuille ρευστού Bingham με $Re=1$, $Bn=5$ και $m=200$.

($Bn=0$) και για μικρούς αριθμούς Bingham η μείωση της ογκομετρικής παροχής είναι εκθετική (δηλ. αργή). Σε μεγαλύτερους αριθμούς Bingham η μείωση του Q καθίσταται πολυωνυμική (δηλ. πιο γρήγορη). Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνουν πρόσφατες θεωρίες που υποστηρίζουν ότι στα ρευστά Bingham ο χρόνος τερματισμού της ροής είναι πεπερασμένος (finite stopping times). \square

7.7 Βιβλιογραφία

1. T. Papanastasiou, G. Georgiou and A. Alexandrou, *Viscous Fluid Flow*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
2. R.B. Bird, W.E. Stewart, and E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, 2nd Ed., John Wiley, New York, 2002.
3. E.C. Bingham, *Fluidity and Plasticity*, McGraw-Hill, New York, 1922.
4. R.B. Bird, G.C. Dai, B.J. Yarusso, "The rheology and flow of viscoplastic materials," *Rev. Chem. Eng.* **1** (1983) 1.
5. T.C. Papanastasiou, "Flows of materials with yield," *J. Rheology* **31** (1987) 385.
6. R.B. Bird, R.C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, John Wiley & Sons, New York, 1987.



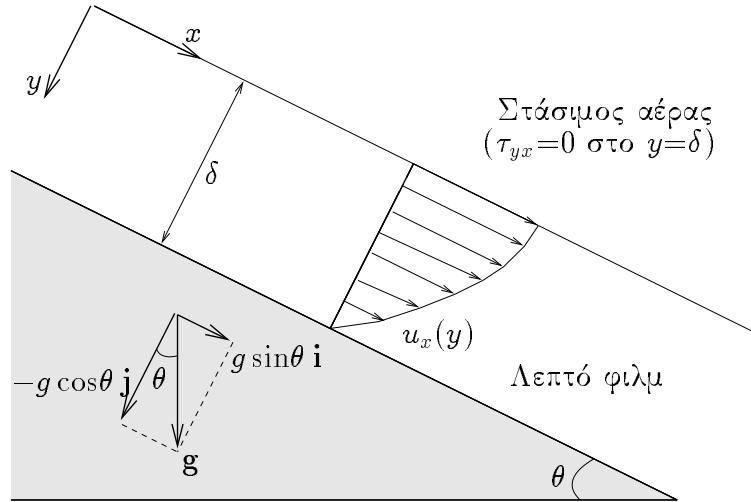
Σχήμα 7.28: Εξέλιξη της ογκομετρικής παροχής κατά τη διακοπή επίπεδης ροής Poiseuille ρευστού Bingham με $Re=1$, $m=200$ και διάφορους αριθμούς Bingham.

7. H.A. Barnes, *A handbook of Elementary Rheology*, University of Wales, Aberystwyth, 2000.

7.6 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ροή λεπτού εκθετικού ρευστού σε κεκλιμένο επίπεδο

Θεωρούμε ένα λεπτό φιλμ ασυμπίεστου εκθετικού ρευστού που ρέει σε κεκλιμένο επίπεδο όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Ο αέρας πάνω από το φιλμ θεωρείται στάσιμος και έτσι η ροή οφείλεται μόνο στη βαρύτητα. Θεωρούμε ότι η επιφανειακή τάση του ρευστού είναι αμελητέα και ότι το φιλμ έχει ομοιόμορφο πάχος δ .



(α) Δείξτε ότι η κατανομή της ταχύτητας είναι:

$$u_x = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{k} \right)^{1/n} \left[\delta^{1/n+1} - y^{1/n+1} \right]. \quad (7.159)$$

(β) Δείξτε ότι για την ογκομετρική παροχή ισχύει η

$$Q = \frac{nW}{2n+1} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{k} \right)^{1/n} \delta^{1/n+2}. \quad (7.160)$$

(γ) Απλοποιήστε τις πιο πάνω εκφράσεις για την περίπτωση κατακόρυφου επιπέδου.

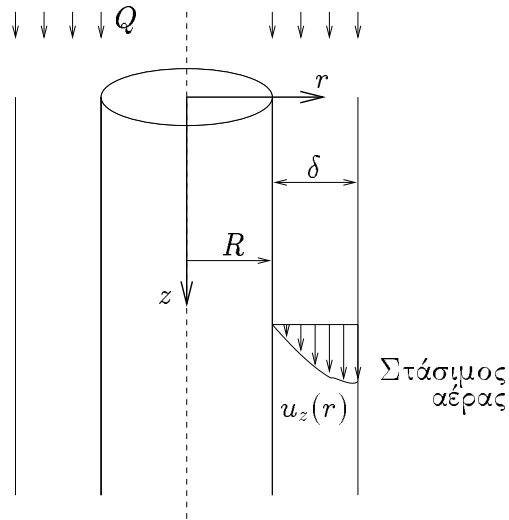
2. Δείξτε ότι για την ογκομετρική παροχή σε αξονοσυμμετρική ροή Bingham ισχύει η εξίσωση (7.94):

$$Q = -\frac{\pi}{8k} \frac{\partial p}{\partial z} R^4 \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right)^4 \right],$$

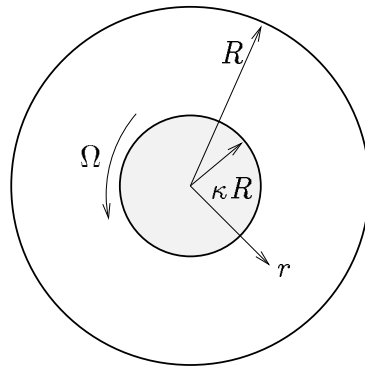
όπου r_0 το σημείο διαρροής:

$$r_0 = \frac{2\tau_0}{(-\partial p / \partial z)}.$$

3. Θεωρούμε τη μόνιμη ροή ενός λεπτού φιλμ εκθετικού ρευστού στην εξωτερική πλευρά κατακόρυφου κυλίνδρου ακτίνας R και άπειρου μήκους, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Ο κύλινδρος είναι ακίνητος και έτσι η ροή οφείλεται μόνο στη βαρύτητα. Το πάχος δ του φιλμ θεωρείται σταθερό.



- (α) Βρείτε την εξίσωση που ισχύει για την ταχύτητα $u_z(r)$.
 (β) Βρείτε την κατανομή της ταχύτητας $u_z(r)$ για $n=1/2, 1/3$ και $1/5$.
 (γ) Βρείτε την ογκομετρική παροχή Q για τις πιο πάνω τιμές του εκθέτη n .
4. Βρείτε την κατανομή της πίεσης $p(r, z)$ στο Παράδειγμα 7.5.1.
5. Θεωρούμε τη ροή **εκθετικού ρευστού** μεταξύ κατακόρυφων κυλίνδρων άπειρου μήκους και ακτίνων κR και R με $\kappa < 1$. Ο εξωτερικός κύλινδρος έχει ακτίνα R και είναι ακίνητος ενώ ο εσωτερικός κύλινδρος έχει ακτίνα κR με $\kappa < 1$ και περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα:



- (α) Βρείτε την κατανομή της ταχύτητας $u_\theta(r)$.
 (β) Βρείτε την κατανομή της πίεσης $p(r, z)$.
 (γ) Βρείτε την εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού.

6. Επιλύστε τη ροή του προηγούμενου προβλήματος για **ρευστό Bingham**.
7. Επιλύστε το μεταβατικό πρόβλημα έναρξης (startup) της επίπεδης ροής Couette ενός πλαστικού Bingham.
8. Αδιαστατοποιήστε τις διέπουσες εξισώσεις στο Παράδειγμα 7.6.1, χρησιμοποιώντας τις εξής κλίμακες:

$$y^* = \frac{y}{H}, \quad u_x^* = \frac{u_x}{V}, \quad t^* = \frac{t}{H/V} \quad \text{και} \quad \tau_{yx}^* = \frac{\tau_{yx}}{\tau_0}.$$

9. Γράψτε στη γενική τανυστική μορφή,

$$\boldsymbol{\tau} = \eta(I_{\mathbf{D}}) (2\mathbf{D}),$$

τα κάτωθι γενικευμένα Νευτώνεια μοντέλα.

- (α) Μοντέλο Cross.
- (β) Μοντέλο των Carreau και Yasuda.
- (γ) Μοντέλο Bingham.
- (δ) Μοντέλο Herschel-Bulkley.
- (ε) Μοντέλο Casson.