Κεφάλαιο 5

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΡΕΥΣΤΑ

5.1 Ο τανυστής των τάσεων για Νευτώνεια ρευστά

Σε όλες τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν μέχρι τώρα έγινε η παραδοχή της Νευτώνειας συμπεριφοράς των ρευστών. Ο λόγος είναι ότ ι στις περισσότερες περιπτώσεις τα συνήθη ρευστά, όπως για παράδειγμα το νερό και ο αέρας, συμπεριφέρονται με παρόμοιο τρόπο για ένα μεγάλο εύρος συνθηκών. Εντούτοις, δεν έχει δοθεί ένας αυστηρός ορισμός της έννοιας του Νευτώνειου ρευστού. Για να ορίσουμε επομένως πότε ένα ρευστό μπορεί να χαρακτηριστεί ως Νευτώνειο,[1] αρκεί να βρούμε τη σχέση που συνδέει τον τανυστή τάσης, T_{ij}, με τον αντίστοιχο του ρυθμού παραμόρφωσης, ϵ_{ij}. Θεωρούμε λοιπόν τις παρακάτω τρεις παραδοχές:

- όταν το ρευστό είναι ακίνητο και ο ρυθμός παραμόρφωσης μηδενίζεται, η τάση που ασκεί το ρευστό είναι η υδροστατική πίεση,
- ο τανυστής τάσης εξαρτάται γραμμικά από τον τανυστή του ρυθμού παραμόρφωσης και δεν εξαρτάται από οποιοδήποτε άλλο τανυστή,

[1] Αξίζει να σημειωθεί ότι στην πραγματικότητα κανένα ρευστό δεν είναι απόλυτα Νευτώνειο, καθώς όλα αποκλίνουν σε κάποιο βαθμό από την ιδεατή κατάσταση που ορίζει η Νευτώνεια ρεολογία. Για πρακτικούς όμως λόγους, θεωρούμε ότι αρκετά ρευστά συμπεριφέρονται ως Νευτώνεια, καθώς το σφάλμα στην παραδοχή αυτή είναι τις περισσότερες φορές αμελητέο.

- το ρευστό είναι ισοτροπικό και ομογενές, δηλαδή η σχέση μεταξύ των τανυστών τάσεως και ρυθμού παραμόρφωσης δεν χαρακτηρίζεται από προτιμητέες κατευθύνσεις και είναι παντού η ίδια αντίστοιχα.

Η πρώτη συνθήκη μας επιτρέπει να εκφράσουμε τον τανυστή τάσης σύμφωνα με την εξίσωση

$$T_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}, \tag{5.1.1}$$

όπου δ_{ij} το δέλτα του Kronecker που ορίζεται ως

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{όταν} \quad i = j, \\ 0 & \text{όταν} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Από τον ορισμό (5.1.1) φαίνεται επομένως ότι η πίεση εμφανίζεται μόνο στα διαγώνια στοιχεία του τανυστή τάσης, δηλαδή η πίεση συνεισφέρει μόνο στην κάθετη προς την επιφάνεια κατεύθυνση. Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο γεγονός ότι η δύναμη πίεσης ασκείται προς τα μέσα και επομένως έχει αντίθετη φορά με τη σύμβαση που έχει επικρατήσει να ορίζεται θετική αν είναι εφελκυστική.

Για να περιγράψουμε τον όρο (deviatoric stress) τ_{ij} θεωρούμε (σύμφωνα με την δεύτερη παραδοχή) ότι και τα εννέα στοιχεία του μπορούν να εκφραστούν σαν ένας γραμμικός συνδυασμός του τανυστή ρυθμού παραμόρφωσης, ϵ_{ij}, όπως ορίζεται από την εξίσωση (3.5.2). Η γενικότερη μαθηματική έκφραση που ικανοποιεί τη συνθήκη $\tau_{ij} \propto \epsilon_{ij}$ γράφεται

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_m}{\partial x_n} + \frac{\partial U_n}{\partial x_m}\right)\mathcal{A}_{ijmn},$$

όπου $\mathcal{A}_{ijmn}$ ένας τανυστής τέταρτης τάξης που αποτελείται από 81 στοιχεία συνολικά. Αποδεικνύεται[2] ότι η γενικότερη μορφή ενός τανυστή τέταρτης τάξης που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις αυτές δίνεται από την ακόλουθη έκφραση

$$\mathcal{A}_{ijmn} = \lambda\,\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu\,\delta_{im}\delta_{jn} + \nu\,\delta_{in}\delta_{jm},$$

όπου λ, μ και ν βαθμωτά μεγέθη. Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω αποτελέσματα έχουμε ότι

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_m}{\partial x_n} + \frac{\partial U_n}{\partial x_m}\right)(\lambda\,\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu\,\delta_{im}\delta_{jn} + \nu\,\delta_{in}\delta_{jm}) \tag{5.1.2}$$

[2] Η απόδειξη γίνεται με χρήση βασικών προτάσεων του τανυστικού λογισμού και επειδή δεν είναι απαραίτητη για την κατανόηση των εννοιών που αναλύονται στην ενότητα αυτή παραλείπεται.

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\delta_{mn} \neq 0$ αν και μόνο αν $m = n$ προκύπτει

$$\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial U_m}{\partial x_n} + \frac{\partial U_n}{\partial x_m}\right)\delta_{ij}\delta_{mn} = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial U_m}{\partial x_m} + \frac{\partial U_m}{\partial x_m}\right)\delta_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\frac{\partial U_m}{\partial x_m}, \qquad (5.1.3)$$

όπου επαναλαμβανόμενοι δείκτες στον ίδιο όρο, όπως ο m στο δεξί μέλος της (5.1.3), προστίθενται ως προς τις χωρικές συντεταγμένες. Επίσης, θεωρώντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\mu = \nu$,

$$\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial U_m}{\partial x_n} + \frac{\partial U_n}{\partial x_m}\right)(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) = \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right). \qquad (5.1.4)$$

Αντικαθιστώντας τέλος τις εξισώσεις (5.1.3) και (5.1.4) στην (5.1.2) είναι δυνατό να εκφράσουμε τον τανυστή της διατμητικής τάσης τ_{ij} συναρτήσει των κλίσεων της ταχύτητας ως εξής

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}\frac{\partial U_m}{\partial x_m} + \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right).$$

Ο συντελεστής λ ονομάζεται *δεύτερος συντελεστής ιξώδους* ή ιξώδες διαστολής (viscosity expansion) και εμφανίζεται μόνο στα διαγώνια στοιχεία του τ_{ij} για τα οποία $i = j$. Για ασυμπίεστα όμως ρευστά ο όρος αυτός δεν επηρεάζει καθόλου τη ροϊκή συμπεριφορά καθώς

$$\lambda\delta_{ij}\frac{\partial U_m}{\partial x_m} = \lambda\delta_{ij}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) = \lambda\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{U} = 0,$$

δίνοντας τελικά

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right). \qquad (5.1.5)$$

Αναγνωρίζοντας τέλος την σταθερά αναλογίας μ σαν το δυναμικό ιξώδες, ο τανυστής των τάσεων (5.1.1) για Νευτώνειο ρευστό δέχεται την τελική μορφή

$$T_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right). \qquad (5.1.6)$$

Στην περίπτωση που το ρευστό δεν είναι ασυμπίεστο, το αποτέλεσμα (5.1.6) γενικεύεται σύμφωνα με την ακόλουθη έκφραση

$$T_{ij} = -P\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial U_m}{\partial x_m} + \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right), \qquad (5.1.7)$$

ή ισοδύναμα

$$T_{ij} = (-P + \lambda\,\epsilon_{kk})\,\delta_{ij} + 2\mu\,\epsilon_{ij}, \tag{5.1.8}$$

όπου $\epsilon_{kk} = \nabla\cdot\mathbf{U}$ το ίχνος (trace) του τανυστή ρυθμού παραμόρφωσης. Σε μορφή συνιστωσών η εξίσωση (5.1.7) γράφεται

$$\sigma_{xx} = -P + \lambda\nabla\cdot\mathbf{U} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = -P + \lambda\nabla\cdot\mathbf{U} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\sigma_{zz} = -P + \lambda\nabla\cdot\mathbf{U} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι είναι δυνατό να ορισθεί η *μηχανική πίεση*, P_m, σαν την μέση τιμή των ορθών τάσεων διατηρώντας τη ίδια σύμβαση για το αρνητικό πρόσημο ως

$$P_m \equiv -\frac{1}{3}\left(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}\right). \tag{5.1.9}$$

Μία άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι ότι η θερμοδυναμική πίεση, P, δεν ισούται κατ' ανάγκη με τη μηχανική πίεση που παραμορφώνει το ροϊκό στοιχείο, P_m, καθώς χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.1.8) βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{3}\left(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}\right) = -P + \lambda\epsilon_{kk} + \frac{2}{3}\mu\left(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}\right)$$

δίνοντας,

$$P - P_m = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\epsilon_{kk}. \tag{5.1.10}$$

Προφανώς στην περίπτωση ασυπίεστων ρευστών, το δεξιό μέλος της εξίσωσης (5.1.10) μηδενίζεται αφού $\epsilon_{kk} = 0$ και τότε $P = P_m$. Ο πρώτος που παρατήρησε τη διάκριση αυτή μεταξύ των δύο πιέσεων ήταν ο Stokes, ο οποίος για να την εξηγήσει υπέθεσε ότι

$$\lambda \approx -\frac{2}{3}\mu,$$

γνωστή και ως υπόθεση του Stokes. Με την θεμελίωση βέβαια της κινητικής θεωρίας των αερίων γνωρίζουμε πλέον ότι στις περισσότερες περιπτώσεις οι αποκλίσεις από την υπόθεση του Stokes είναι μικρές και στην συντριπτική πλειοψηφία τους η υπόθεση θεωρείται προσεγγιστικά σωστή.

Στην επόμενη ενότητα θα γενικεύσουμε την εξίσωση (5.1.6) για να μελετήσουμε ρευστά που αποκλίνουν σημαντικά από τη γραμμικότητα μεταξύ των τανυστών τάσης και ρυθμού παραμόρφωσης και ως εκ τούτου επιδεικνύουν σημαντική μη Νευτώνεια συμπεριφορά.

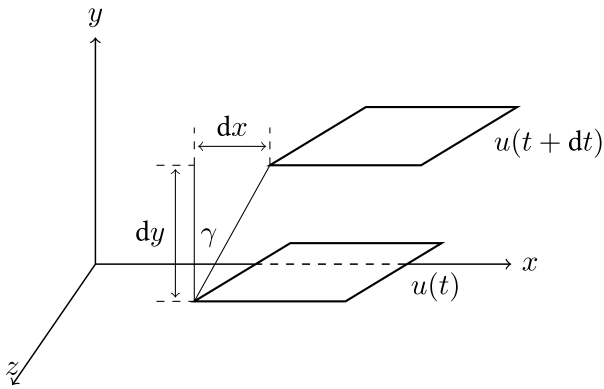
5.2 Γενικευμένα Νευτώνεια ρευστά

Η γενίκευση της σχέσης (5.1.5) για την περίπτωση μη Νευτώνειων ρευστών κατέστη αναγκαία με την ανάπτυξη της σύγχρονης βιομηχανίας και την παραγωγή προϊόντων που δεν ήταν δυνατό να μελετηθούν με βάση τη Νευτώνεια ρεολογία. Η οδοντόκρεμα, τα χρώματα βαφής, το μελάνι εκτύπωσης, το γιαούρτι και τα λιπαντικά είναι μερικά μόνο παραδείγματα μη Νευτώνειων ρευστών.

Η μελέτη των ρευστών αυτών γίνεται με τη βοήθεια του *ρυθμού διάτμησης* (shear rate), $\dot{\gamma}$, που εκφράζει τη μεταβολή της παραμόρφωσης τους με το χρόνο. Για απλές διατμητικές ροές, όπως η ροή Couette που μελετήθηκε στην ενότητα 4.2.3.3, η αναπτυσσόμενη διατμητική τάση ανάγεται στο γνωστό νόμο του Newton,

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}.$$

Στην περίπτωση αυτή, αν θεωρήσουμε δύο παράλληλα στρώματα ροής Couette με χρονική διαφορά ίση με $\mathrm{d}t$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1, μπορούμε να εκφρά-



Σχήμα 5.1: Ρυθμός διάτμησης και κλίση της ταχύτητας σε ροή Couette.

σουμε το ρυθμό διάτμησης συναρτήσει της κλίσης της ταχύτητας ως εξής:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\gamma.$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor την εφαπτομένη του ρυθμού διάτμησης γύρω από το σημείο μηδέν,

$$\tan\gamma = \gamma + \frac{1}{3}\gamma^3 + \frac{2}{15}\gamma^5 + \ldots$$

δίνοντας τέλος για μικρές τιμές του γ ότι,

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma) \implies \tau_{xy} = \mu \dot{\gamma} = 2\mu\, \epsilon_{xy} \tag{5.2.1}$$

χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.5.2) για τον τανυστή του ρυθμού παραμόρφωσης. Ο νόμος του Newton επομένως για Νευτώνεια ρευστά είναι μία ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων ως προς το σύστημα συντεταγμένων $(\dot{\gamma}, \tau)$. Η σταθερή κλίση της ευθείας αυτής ισούται εξ΄ορισμού με το δυναμικό ιξώδες, μ. Οποιοδήποτε λοιπόν ρευστό δεν ικανοποιεί την εξίσωση (5.2.1) ή περιγράφεται από πειραματικά σημεία που δεν ανήκουν σε μία ευθεία γραμμή, επιδεικνύει μη Νευτώνεια συμπεριφορά και περιγράφεται από μία γενικότερη σχέση της μορφής

$$\tau = f\left(\dot{\gamma}\right).$$

Επειδή όμως είναι αδύνατο να μελετηθεί η ροϊκή συμπεριφορά ενός ρευστού για οποιαδήποτε συνάρτηση f, περιοριζόμαστε σε ροές που χαρακτηρίζονται από την παρακάτω γενικευμένη έκφραση του γραμμικού νόμου (5.2.1),

$$\tau = \eta \dot{\gamma}, \tag{5.2.2}$$

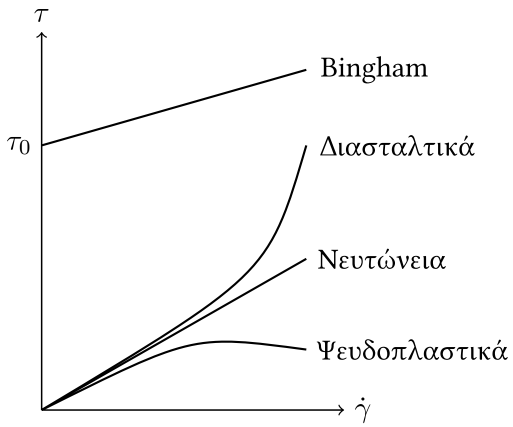
όπου το φαινόμενο ιξώδες (apparent viscosity), η, δεν είναι πλέον σταθερό. Τα ρευστά που υπακούουν την εξίσωση (5.2.2) ονομάζονται *γενικευμένα Νευτώνεια ρευστά* (generalized Newtonian fluids). Αξίζει να σημειωθεί ότι στα γενικευμένα Νευτώνεια ρευστά, η τιμή του ρυθμού διάτμησης εξαρτάται μόνο από τη δεδομένη χρονική στιγμή και καθόλου από τις αντίστοιχες τιμές του σε παρελθοντικούς χρόνους. Μερικά τυπικά παραδείγματα τέτοιων ρευστών παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.2 και διακρίνονται στις παρακάτω τρεις κατηγορίες:

- Ψευδοπλαστικά (Pseudoplastic): στην κατηγορία αυτή ανήκουν όλα τα ρευστά των οποίων το ιξώδες ελαττώνεται με αύξηση του ρυθμού διάτμησης, όπως για παράδειγμα παρατηρείται σε διάφορα πολυμερή και στο αίμα.

- Διασταλτικά (Dilatant): όταν το ιξώδες αυξάνεται με αύξηση του ρυθμού διάτμησης, το ρευστό ονομάζεται διασταλτικό. Το βασικότερο χαρακτηριστικό ρευστών που ανήκουν στην κατηγορία αυτή είναι ότι μπορούν να μετατραπούν από ρευστά σε στερεά με απλή εφαρμογή τάσης.

- Ιξωδοπλαστικά (Viscoplastic): ρευστά τα οποία δεν ρέουν για τιμές της διατμητικής τάσης μικρότερες από μία κρίσιμη τιμή (τάση διαρροής, τ_0)

ονομάζονται ιξωδοπλαστικά. Αν επίσης τα ρευστά αυτά συμπεριφέρονται ως Νευτώνεια για τάσεις μεγαλύτερες της τάσης διαρροής, ονομάζονται και ρευστά Bingham.



Σχήμα 5.2: Χαρακτηριστικές καμπύλες γενικευμένων Νευτώνειων ρευστών.

Από την εξισώση (5.2.1) προκύπτει άμεσα ότι η τανυστική γενίκευση της (5.2.2) γράφεται

$$\bar{\bar{\tau}} = 2\eta\bar{\bar{\epsilon}}.$$

Μία υπόθεση που λαμβάνει χώρα στην περίπτωση των γενικευμένων Νευτώνειων ρευστών είναι ότι το φαινόμενο ιξώδες εξαρτάται απο τον τανυστή του ρυθμού παραμόρφωσης. Επειδή όμως το πρώτο είναι βαθμωτό μέγεθος αντίθεση με το δεύτερο που είναι τανυστής, για να ισχύει κάτι τέτοιο θα πρέπει το η να είναι συνάρτηση των τριών αναλλοίωτων του $\bar{\bar{\epsilon}}$. Τα αναλλοίωτα αυτά συμβολίζονται με $I_{\bar{\bar{\epsilon}}}$, $II_{\bar{\bar{\epsilon}}}$, $III_{\bar{\bar{\epsilon}}}$ και δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις

$$I_{\bar{\bar{\epsilon}}} \equiv \mathrm{tr}(\bar{\bar{\epsilon}}), \quad II_{\bar{\bar{\epsilon}}} \equiv \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}(\bar{\bar{\epsilon}}^2) - \left[\mathrm{tr}(\bar{\bar{\epsilon}})\right]^2\right], \quad III_{\bar{\bar{\epsilon}}} \equiv \det(\bar{\bar{\epsilon}}),$$

όπου $\mathrm{tr}(\bar{\bar{\epsilon}})$ το ίχνος και $\det(\bar{\bar{\epsilon}})$ η ορίζουσα του τανυστή ρυθμού παραμόρφωσης. Μπορούμε τότε να γράψουμε,

$$\bar{\bar{\tau}} = 2\eta\left(I_{\bar{\bar{\epsilon}}}, II_{\bar{\bar{\epsilon}}}, III_{\bar{\bar{\epsilon}}}\right)\bar{\bar{\epsilon}}.$$

Ο προσεκτικός αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι η πρώτη αναλλοίωτη ποσότητα μηδενίζεται για ασυμπίεστη ροή καθώς

$$I_{\bar{\bar{\epsilon}}} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{U} = 0,$$

και τότε

$$II_{\bar{\bar{\epsilon}}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\bar{\bar{\epsilon}}^2). \tag{5.2.3}$$

Λαμβάνοντας επίσης υπόψη ότι $III_{\bar{\bar{\epsilon}}} = 0$ για διατμητικές ροές βρίσκουμε τελικά,

$$\bar{\bar{\tau}} = 2\,\eta\,(II_{\bar{\bar{\epsilon}}})\,\bar{\bar{\epsilon}}. \tag{5.2.4}$$

Αν στη συνέχεια συμβολίσουμε τα στοιχεία του συμμετρικού τανυστή ρυθμού παραμόρφωσης με ϵ_{ij} προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\bar{\bar{\epsilon}}^2) &= \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix}\epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz}\\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz}\\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz}\\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz}\\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz}\end{bmatrix}\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix}\epsilon_{xx}^2+\epsilon_{xy}^2+\epsilon_{xz}^2 & \mathcal{A}_{xy} & \mathcal{A}_{xz}\\ \mathcal{A}_{yx} & \epsilon_{xy}^2+\epsilon_{yy}^2+\epsilon_{yz}^2 & \mathcal{A}_{yz}\\ \mathcal{A}_{zx} & \mathcal{A}_{zy} & \epsilon_{xz}^2+\epsilon_{yz}^2+\epsilon_{zz}^2\end{bmatrix}\right)\\
&= \epsilon_{xx}^2+\epsilon_{yy}^2+\epsilon_{zz}^2+2\epsilon_{xy}^2+2\epsilon_{yz}^2+2\epsilon_{xz}^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,
\end{aligned}$$

όπου τα μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα $\bar{\bar{\epsilon}}^2$ δεν παρουσιάζονται καθώς δε συνεισφέρουν στον υπολογισμό του ίχνους του. Ορίζουμε τότε το ρυθμό διάτμησης συναρτήσει της δεύτερης αναλλοίωτης ποσότητας ως

$$\dot{\gamma} \equiv \sqrt{4II_{\bar{\bar{\epsilon}}}} = \sqrt{2\,\mathrm{tr}(\bar{\bar{\epsilon}}^2)} \tag{5.2.5}$$

δίνοντας,

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma} = \Bigg[&2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\Bigg]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ο ορισμός (5.2.5) για την ροή απλής διάτμησης γράφεται τότε

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^2} = \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|,$$

που δεν είναι τίποτα άλλο από τη γνωστή σχέση του Newton για τη ροή Couette. Συνδυάζοντας στη συνέχεια τις εξισώσεις (5.2.4) και (5.2.5),

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\eta\,(\dot{\gamma})\,\overline{\overline{\epsilon}} \tag{5.2.6}$$

με το αντίστοιχα μέτρο του κατά Frobenius να ορίζεται ως

$$\tau = \left\|\overline{\overline{\tau}}\right\| = \sqrt{\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\overline{\overline{\tau}}^{*}\,\overline{\overline{\tau}})},$$

όπου $\overline{\overline{\tau}}^{*}$ ο μιγαδικός ανάστροφος πίνακας του $\overline{\overline{\tau}}$. Επειδή όμως ο τανυστής αυτός είναι ένας πραγματικός και συμμετρικός πίνακας, $\overline{\overline{\tau}}^{*} = \overline{\overline{\tau}}$, και με τη βοήθεια των εξισώσεων (5.2.5) και (5.2.6) προκύπτει ότι

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\overline{\overline{\tau}}^{\,2})} = \sqrt{2\eta\,(\dot{\gamma})^{2}\,\mathrm{tr}(\overline{\overline{\epsilon}}^{\,2})} \implies \tau = \eta\,(\dot{\gamma})\,\dot{\gamma}. \tag{5.2.7}$$

Το αποτέλεσμα (5.2.7) αποτελεί την αφετηρία για τη μελέτη γενικευμένων Νευτώνειων ρευστών όπως αυτά παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα. Αξίζει βέβαια να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι ένα από τα μειονεκτήματα των ρευστών αυτών είναι ότι δεν περιγράφουν φαινόμενα που εξελίσσονται από την ύπαρξη κάθετων τάσεων καθώς και χρονικά εξαρτώμενα φαινόμενα. Εντούτοις αποτελούν μία πολύ σημαντική κατηγορία ρευστών με ευρείες εφαρμογές τόσο στην επιστήμη όσο και την τεχνολογία.

5.3 Παραδείγματα γενικευμένων Νευτώνειων ρευστών

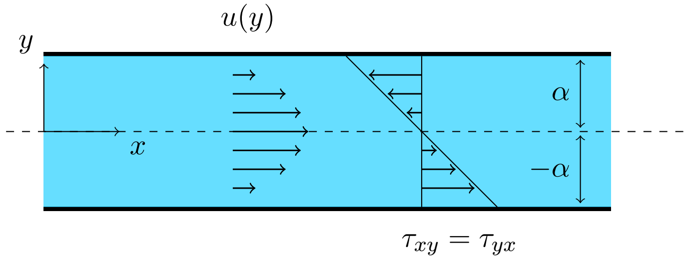
5.3.1 Εκθετικό ρευστό σε ακίνητες παράλληλες πλάκες

Η απλούστερη ροή γενικευμένου Νευτώνειου ρευστού είναι αυτή ενός εκθετικού ρευστού που ορίζεται ως

$$\tau = k\dot{\gamma}^{n}, \tag{5.3.1}$$

όπου k ένας συντελεστής που ονομάζεται συντελεστής συνάφειας και n αδιάστατος εκθέτης. Εκφράζοντας τις εξισώσεις ορμής (4.2.5) ως προς τον τανυστή τάσεων για γενικευμένα Νευτώνεια ρευστά απουσία εξωτερικών δυνάμεων έχουμε ότι

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\,\mathbf{U}\right] = -\nabla P + \nabla\cdot\overline{\overline{\tau}}, \quad \text{όπου} \quad \nabla\cdot\overline{\overline{\tau}} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}. \tag{5.3.2}$$



Σχήμα 5.3: Ροή εκθετικού ρευστού μεταξύ ακίνητων και παράλληλων πλακών.

Αν το ρευστό αυτό ρέει μεταξύ δύο παράλληλων και ακίνητων πλακών όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3, το διάνυσμα της ταχύτητας γράφεται $\mathbf{U} = (u, 0, 0)$ και για μόνιμη ροή η (5.3.2) λύνεται ως εξής

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}.$$

Επειδή το αριστερό μέλος είναι συνάρτηση μόνο του x ενώ το δεξιό μόνο του y, προκύπτει ότι και τα δύο μέλη θα είναι σταθερά δίνοντας την ακόλουθη απλή έκφραση για την κατανομή της πίεσης κατά μήκος των πλακών

$$\frac{\partial P}{\partial x} = c \implies P(x) = cx + c_1.$$

Επιβάλλοντας στη συνέχεια τις κατάλληλες οριακές συνθήκες $P(0) = P_1$ και $P(L) = P_2$, είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι σταθερές c και c_1 δίνοντας τελικά

$$P(x) = \left(\frac{P_2 - P_1}{L}\right) x + P_1 \implies \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\Delta P}{L},$$

όπου L το μήκος των πλακών. Η διατμητική τάση τότε γράφεται

$$\tau_{yx} = -\frac{\Delta P}{L} y + c_2 = -\frac{\Delta P}{L} y, \tag{5.3.3}$$

αφού $\tau_{xy} = 0$ για $y = 0$. Για να υπολογιστεί στη συνέχεια η κατανομή της ταχύτητας αρκεί να διαπιστώσουμε ότι αυτή μεταβάλλεται μόνο κατά τη διεύθυνση των y και επομένως ο ρυθμός διάτμησης, $\dot{\gamma}$, ισούται με

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^2} = \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right| = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \quad \text{για} \quad 0 \leq y \leq \alpha. \tag{5.3.4}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (5.3.1), (5.3.3) και (5.3.4) προκύπτει ότι

$$\mathrm{d}u = -\left(-\frac{1}{k}\frac{\Delta P}{L}\right)^{1/n} y^{1/n}\mathrm{d}y$$

και ολοκληρώνοντας το αποτέλεσμα αυτό στο διάστημα $(0, \alpha)$ βρίσκουμε,

$$\begin{aligned}\int_{u(y)}^{u(\alpha)} \mathrm{d}u &= -\int_y^\alpha \left(-\frac{1}{k}\frac{\Delta P}{L}\right)^{1/n} y^{1/n}\mathrm{d}y = -\left(-\frac{1}{k}\frac{\Delta P}{L}\right)^{1/n} \int_y^\alpha y^{1/n}\mathrm{d}y \\ &= -\frac{n}{n+1}\left(-\frac{1}{k}\frac{\Delta P}{L}\right)^{1/n} \int_y^\alpha \left(y^{1/n+1}\right)' \mathrm{d}y \\ &= -\frac{n}{n+1}\left(-\frac{1}{k}\frac{\Delta P}{L}\right)^{1/n} \left(\alpha^{1/n+1} - y^{1/n+1}\right).\end{aligned}$$

Θεωρώντας στη συνέχεια ότι η ταχύτητα του ρευστού μηδενίζεται πάνω στην πλάκα, $u(\alpha) = 0$, δίνοντας την ακόλουθη έκφραση για την κατανομή της ταχύτητας

$$u(y) = \frac{n}{n+1}\left(-\frac{1}{k}\frac{\Delta P}{L}\right)^{1/n} \alpha^{1/n+1}\left[1 - \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{1/n+1}\right].$$

Η μέγιστη ταχύτητα, $u_{\mu\epsilon\gamma}$, λαμβάνει χώρα για $y = 0$, δηλαδή κατά μήκος του επιπέδου συμμετρίας των πλακών

$$u_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{n}{n+1}\left(-\frac{1}{k}\frac{\Delta P}{L}\right)^{1/n} \alpha^{1/n+1}, \tag{5.3.5}$$

δίνοντας τελικά

$$u(y) = u_{\mu\epsilon\gamma}\left[1 - \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{1/n+1}\right]. \tag{5.3.6}$$

Παρατηρούμε ότι για $n = 1$ τα αποτελέσματα (5.3.5) και (5.3.6) απλοποιούνται στις αντίστοιχες εξισώσεις (4.2.18) και (4.2.17) ενός Νευτώνειου ρευστού.

Από την κατανομή της ταχύτητας είναι δυνατό στη συνέχεια να υπολογιστεί η παροχή μάζας, Q, και η μέση ταχύτητα του εκθετικού ρευστού, $\overline{u}$, ανά μονάδα πλάτους b των πλακών. Επειδή η ροή παρουσιάζει συμμετρία ως προς το επίπεδο $y = 0$ έχουμε,

$$Q = 2b\int_0^\alpha u(y)\,\mathrm{d}y = \frac{2bn}{n+1}\left(-\frac{1}{k}\frac{\Delta P}{L}\right)^{1/n} \alpha^{1/n+1}\int_0^\alpha \left[1 - \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{1/n+1}\right]\mathrm{d}y.$$

Λύνοντας το ολοκλήρωμα προκύπτει ότι

$$Q = \frac{2n}{2n+1} b \left(-\frac{1}{k} \frac{\Delta P}{L} \right)^{1/n} \alpha^{1/n+2}.$$

Η δε μέση τασχύτητα υπολογίζεται εύκολα ως εξής

$$\overline{u} = \frac{Q}{2\alpha b} = \frac{n}{2n+1} \left(-\frac{1}{k} \frac{\Delta P}{L} \right)^{1/n} \alpha^{1/n+1}.$$

Συγκρίνοντας τέλος τα αποτελέσματα για τη μέση και μέγιστη ταχύτητα βρίσκουμε

$$\overline{u} = \frac{n+1}{2n+1} u_{\mu\epsilon\gamma}, \tag{5.3.7}$$

δίνοντας την Νευτώνεια έκφραση (4.2.21) για $n = 1$.

5.4 Αίμα: Νευτώνειο ή μη Νευτώνειο ρευστό;

Ένα από τα σημαντικότερα ερωτήματα που καλείται να απαντήσει όποιος ασχολείται με τη ρευστοδυναμική είναι ποια είναι η πραγματική φύση του εκάστοτε ρευστού και πώς αυτό συμπεριφέρεται υπό διαφορετικές συνθήκες ροής. Η Νευτώνεια παραδοχή, για παράδειγμα, αποτελεί μία απλή και συνάμα βολική προσέγγιση που περιγράφει με επιτυχία τη συντριπτική πλειοψηφία των ρευστών. Δεν είναι όμως πάντοτε η αποδεκτή επιλογή, καθώς, όπως έχουμε ήδη δει είναι αρκετές οι περιπτώσεις που οι αποκλίσεις από τη Νευτώνεια ρεολογία είναι σημαντικές και πρέπει να ληφθούν υπόψη. Η διάκριση αυτή δεν λαμβάνει χώρα μόνο μεταξύ διαφορετικών ρευστών, αλλά ακόμα και για το ίδιο ρευστό όταν υπόκειται σε διαφορετικές συνθήκες. Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα της κατηγορίας αυτής είναι το αίμα.

Το αίμα είναι το υγρό που κυκλοφορεί σε ολόκληρο το σώμα ενός σπονδυλωτού οργανισμού. Η βασική του λειτουργία (μεταξύ πολλών άλλων) είναι να μεταφέρει οξυγόνο και θρεπτικά συστατικά και να καθαρίζει τον οργανισμό από άχρηστες ή βλαβερές ουσίες. Παρ' όλο που το αίμα στο γυμνό μάτι φαίνεται απόλυτα ομοιογενές, κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Στην πραγματικότητα αποτελείται κατά 55% περίπου από το πλάσμα. Το πλάσμα είναι ένα άμορφο συστατικό το οποίο με τη σειρά του αποτελείται κατά 92% από νερό και το υπόλοιπο 8% από διάφορες ενώσεις και ουσίες όπως διοξείδιο του άνθρακα, βιταμίνες, πρωτεΐνες, γλυκόζη κ.ά. Το υπόποιπο 45% του αίματος απαρτίζεται κυρίως από ερυθρά και λευκά αιμοσφαίρια και αιμοπετάλια, με το πλήθος των ερυθρών