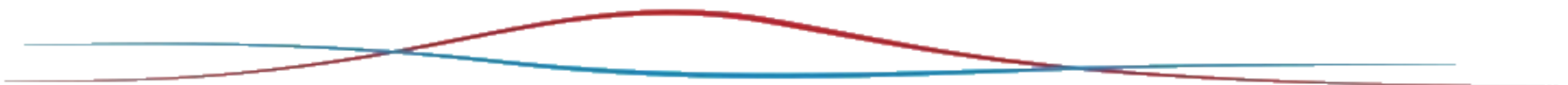




Αριθμητικά σχήματα διακριτοποίησης

*Υπολογιστική Ρευστομηχανική
Ενεργειακή Κατεύθυνση
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών*

Γεώργιος Μιχ. Σταυρακάκης
Επίκουρος Καθηγητής



Η εξίσωση καθαρής συναγωγής

Ίσως η απλούστερη από τις πρότυπες εξισώσεις ροής είναι αυτή της μονοδιάστατης καθαρής συναγωγής:

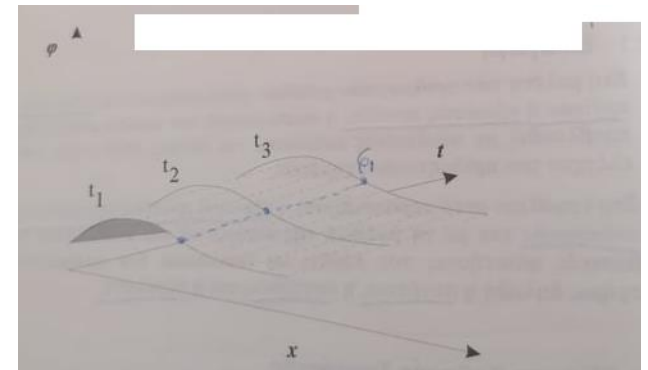
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

Περιγράφει τη μεταφορά της εξαρτημένης μεταβλητής ϕ στη x διεύθυνση του χώρου στο χρόνο t , με σταθερή ταχύτητα u .

Παραδείγματα φυσικών φαινομένων καθαρής συναγωγής:

- Μεταφορά χημικού είδους σε ρέον ρευστό ($\phi=C$ =συγκέντρωση χημικού είδους).
- Διάδοση διαταραχής ύψους στάθμης νερών ($\phi=h$ =ύψος στάθμης νερών).

Η μεταβολή της ϕ στο χρόνο είναι ανάλογη της αρνητικής κλίσης της στη x -διεύθυνση. Η λύση ακολουθεί τις εστιγμένες γραμμές που είναι παράλληλες στο επίπεδο x - t και έχουν κλίση $dx/dt=u$. Οι εστιγμένες γραμμές που στοιχειοθετούν την λύση-επιφάνεια $\phi(x,t)$, και κατα μήκος των οποίων διαδίδεται η διαταραχή, είναι οι χαρακτηριστικές γραμμές της εξίσωσης συναγωγής.

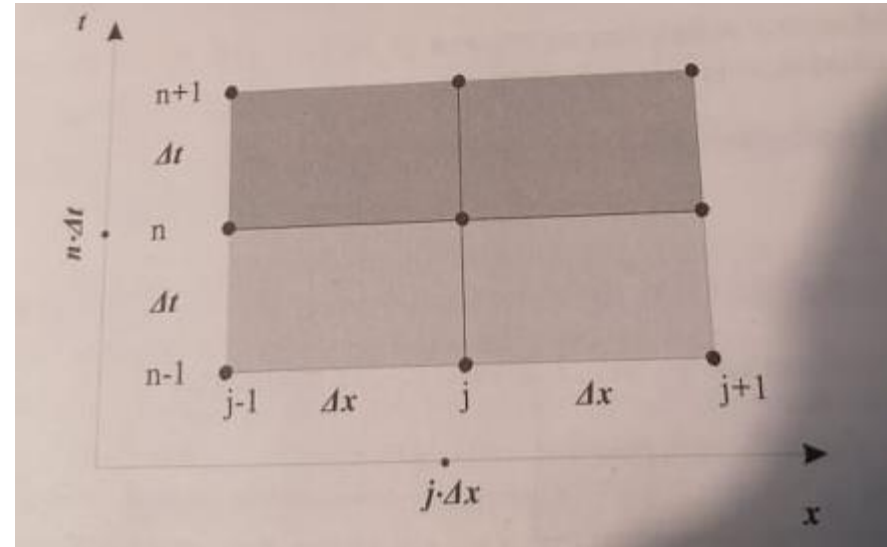


Διακριτοποίηση εξίσωσης καθαρής συναγωγής

Σχήμα FTBS (Forward in Time Backward in Space)

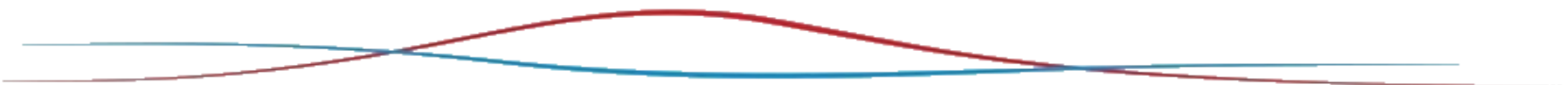
Δεδομένου ότι η διακριτοποίηση μίας εξίσωσης μπορεί να γίνει με πολλές εκφράσεις, μπορούν να αναπτυχθούν πλήθος αριθμητικών σχημάτων διακριτοποίησης.

Έστω ότι για το διπλανό πλέγμα και γύρω από το σημείο (j,n) επιλέγουμε ανάντη (πίσω) διαφορές στον χώρο και κατάντη (εμπρός) διαφορές στον χρόνο. Τότε, τα αντίστοιχα αναπτύγματα Taylor θα είναι:



$$\varphi_{j-1}^n = \varphi_j^n - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_j^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_j^n \frac{\Delta x^2}{2} + O(\Delta x^3) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_j^n = \frac{\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n}{\Delta x} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_j^n \frac{\Delta x}{2} + O(\Delta x^2)$$

$$\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_j^n \Delta t + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_j^n \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_j^n = \frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n}{\Delta t} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_j^n \frac{\Delta t}{2} + O(\Delta t^2)$$



Διακριτοποίηση εξίσωσης καθαρής συναγωγής

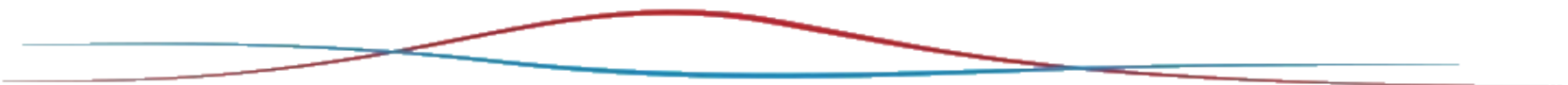
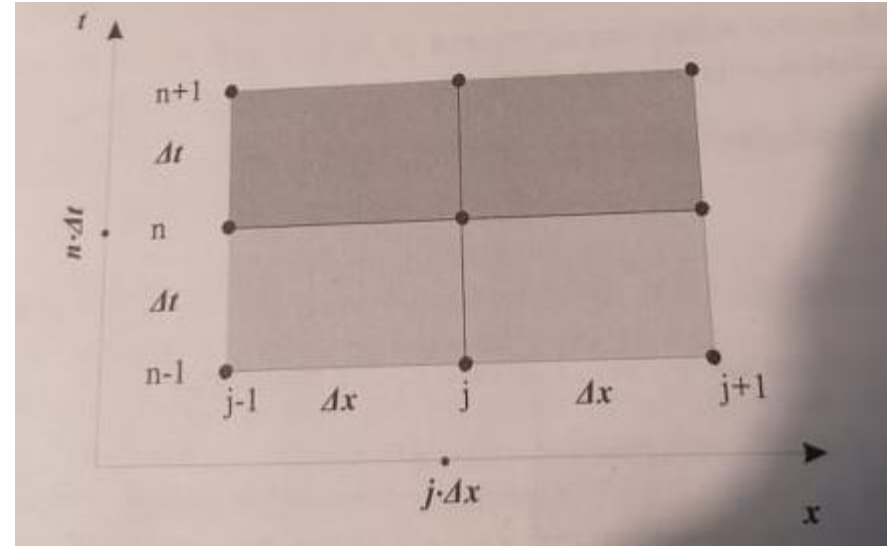
Σχήμα FTBS

Δεδομένου ότι η διακριτοποίηση μίας εξίσωσης μπορεί να γίνει με πολλές εκφράσεις, μπορούν να αναπτυχθούν πλήθος αριθμητικών σχημάτων διακριτοποίησης.

Έστω για το διπλανό πλέγμα και γύρω από το σημείο (j,n) επιλέγουμε ανάντη (πίσω) διαφορές στον χώρο και κατάντη (εμπρός) διαφορές στον χρόνο. Η εξίσωση συναγωγής γίνεται:

$$\frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n}{\Delta t} + u \frac{\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n}{\Delta x} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_j \frac{\Delta t}{2} - u \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_j \frac{\Delta x}{2} + O(\Delta t)$$

Το αριστερό σκέλος είναι η προσέγγιση της εξίσωσης μερικών παραγώγων, ενώ το δεξιό σκέλος είναι το σφάλμα αποκοπής (Σ.Α.) της αριθμητικής προσέγγισης.



Διακριτοποίηση εξίσωσης καθαρής συναγωγής

Σχήμα FTBS

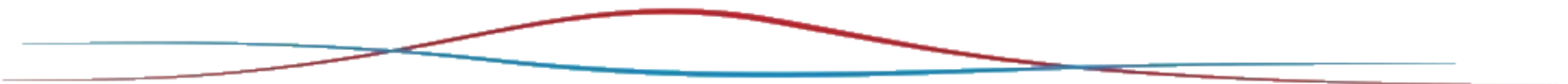
Αν αγνοήσουμε το Σ.Α. τότε η ϕ στο χρονικό βήμα $n+1$ προκύπτει από την εξίσωση (εφαρμογή σχήματος FTBS στην εξίσωση συναγωγής):

$$\phi_j^{n+1} = (1 - Cr)\phi_j^n + Cr\phi_{j-1}^n,$$

Όπου $Cr = u\Delta t / \Delta x$ είναι ο αριθμός Courant.

Λεκτική περιγραφή: Η ϕ σε ένα σημείο του πεδίου μία χρονική στιγμή προκύπτει ως το σταθμισμένο άθροισμα της τιμής της ϕ στο ίδιο σημείο του πεδίου την προηγούμενη χρονική στιγμή και της με μεγαλύτερο συντελεστή βαρύτητας τιμής της ϕ στο προηγούμενο σημείο του πεδίου την ίδια χρονική στιγμή.

Το αριθμητικό σχήμα λέγεται **Forward in Time Backward in Space, FTBS**. Το σχήμα είναι **PHTO (explicit)**, καθώς επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό της μεταφερόμενης ποσότητας από πληροφορίες της προηγούμενης χρονικής στιγμής.



Διακριτοποίηση εξίσωσης καθαρής συναγωγής

Σχήμα FTBS

Ροή πληροφορίας: Η τιμή της ϕ , σε κάθε σημείο του χρονικού βήματος $n+1$, προσδιορίζεται από την τιμή στο προηγούμενο χρονικό βήμα στην ίδια χωρική θέση και από την πληροφορία σε θέση μετατοπισμένη κατά ένα χωρικό βήμα στα ανάντη της ροής.

Προσδιορισμός αριθμητικής λύσης

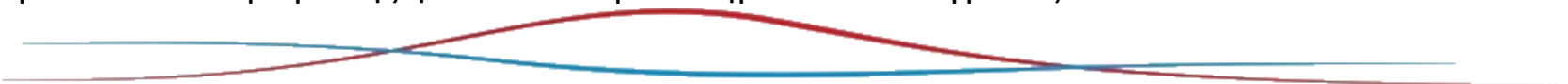
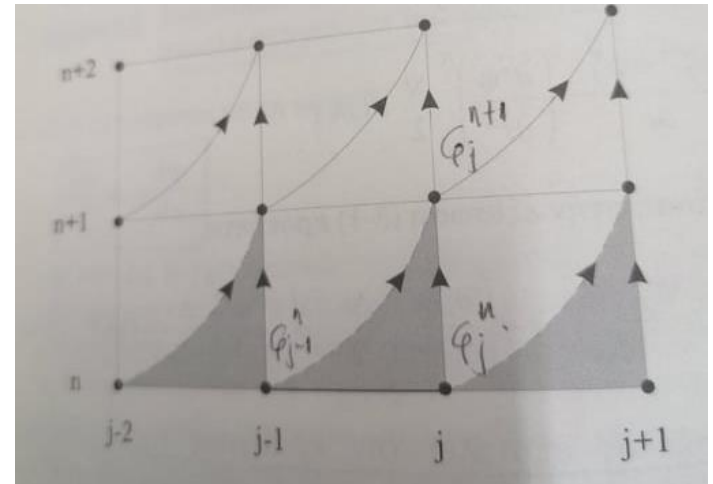
Ορισμός **αρχικών συνθηκών** δηλ. οι τιμές της ϕ στο χρονικό βήμα 0.

Ορισμός **οριακών συνθηκών** δηλ. στα χωρικά όρια του πεδίου ροής: Συχνά εμφανίζονται σε 2 μορφές:

Α. Σταθερή τιμή της ϕ στα όρια (Dirichlet)

Δηλ. Αν έχουμε N διαστήματα στο χώρο, τότε γνωστές τιμές των ϕ_1^n και ϕ_{Nx}^n .

Περίπτωση χωρίς δυσκολίες καθώς οι οριακές τιμές χρησιμοποιούνται άμεσα από το αριθμητικό σχήμα για τον υπολογισμό της ϕ στα εσωτερικά σημεία του πλέγματος.



Διακριτοποίηση εξίσωσης καθαρής συναγωγής

Σχήμα FTBS

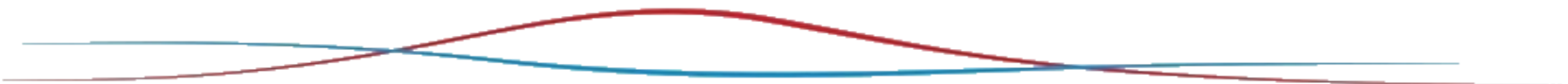
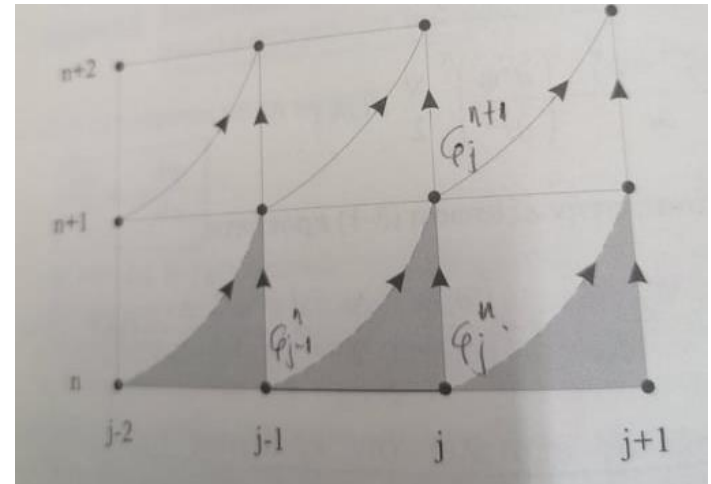
Β. Γνωστές παράγωγοι της ϕ στα όρια (Neumann)

Δηλ. γνωστά τα $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_1^n$ και $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{Nx}^n$. Οπότε, η τιμή της ϕ στο αριστερό και στο δεξιό όριο προκύπτει από μία κατάντη και μία ανάντη διαφορά, αντιστοίχως:

$$\phi_1^n = \phi_2^n - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_1^n \Delta x$$

Και

$$\phi_{Nx}^n = \phi_{Nx-1}^n + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{Nx}^n \Delta x$$





Διακριτοποίηση εξίσωσης καθαρής συναγωγής

Σχήμα FTBS – Τάξη ακρίβειας

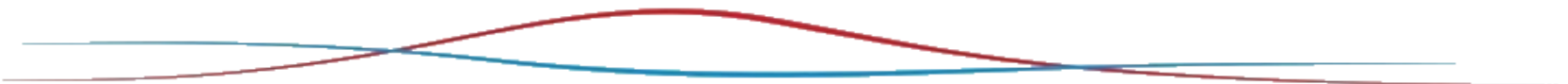
Τάξη ακρίβειας του FTBS: 1^η τάξης, $O(\Delta x, \Delta t)$. (βλ. Σ.Α.)

Το σφάλμα αποκοπής μηδενίζεται στο όριο $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ όταν οι παράγωγοι του Σ.Α. δεν αυξάνουν με ρυθμό ταχύτερο από το ρυθμό μείωσης των Δx και Δt .

Σε περιοχές ασυνέχειας εμφανίζεται πάντα ανεξέλεγκτη αύξηση των παραγώγων και κατά συνέπεια το Σ.Α. μηδενίζεται μόνο όταν η λύση παραμένει ομαλή, καθώς τα Δx και Δt τείνουν στο 0. Σε αυτές τις περιπτώσεις η προαναφερόμενη ανάλυση ακρίβειας αποτυγχάνει καθώς είναι αδύνατο να προσδιοριστεί ποσοτικά «αρκετά ομαλή λύση».

Η μη ομαλότητα της λύσης μπορεί να οφείλεται και σε τεχνητούς (αριθμητικούς) μηχανισμούς, που εισάγει το ίδιο το σχήμα διακριτοποίησης.

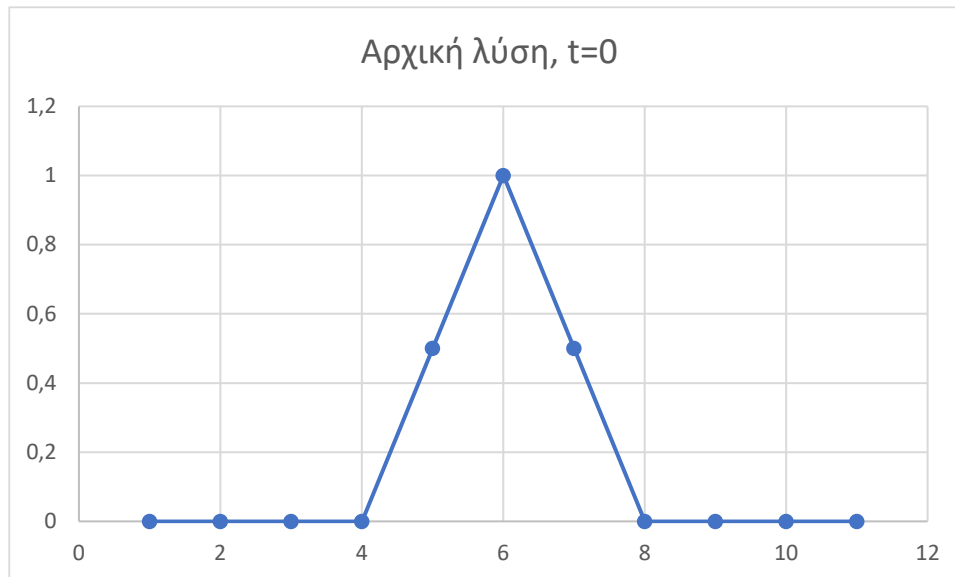
Ας δούμε ένα παράδειγμα...



Διακριτοποίηση εξίσωσης καθαρής συναγωγής

Σχήμα FTBS – Παράδειγμα ομαλότητας της λύσης

Έστω ότι έχουμε μία ροή σε έναν αγωγό με μηχανισμό συναγωγής της ποσότητας ϕ . Η αρχική κατανομή της ϕ ($t=0$) είναι τριγωνική όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω επίσης ότι έχουμε περιοδικές οριακές συνθήκες, έτσι ώστε όταν η κατανομή εξέρχεται από το δεξιό όριο τότε εισέρχεται από το αριστερό όριο. Καθώς δεν υπάρχει διάχυση, η κατανομή οφείλει να διατηρεί το αρχικό τριγωνικό σχήμα. Οποιαδήποτε παρέκκλιση από αυτήν οφείλεται στο αριθμητικό σχήμα.

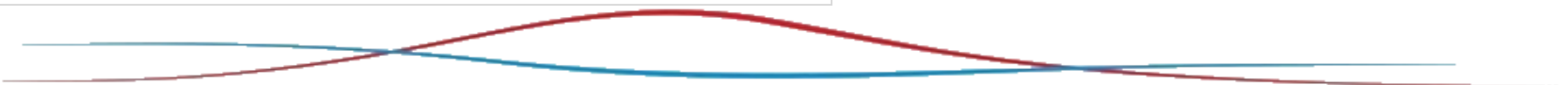


Ισχύουν:

Ταχύτητα ροής: $u=1$

Χωρικό βήμα (διάστημα διακριτοποίησης):
 $\Delta x=1$

Πλήθος σημείων: $Nx=11$



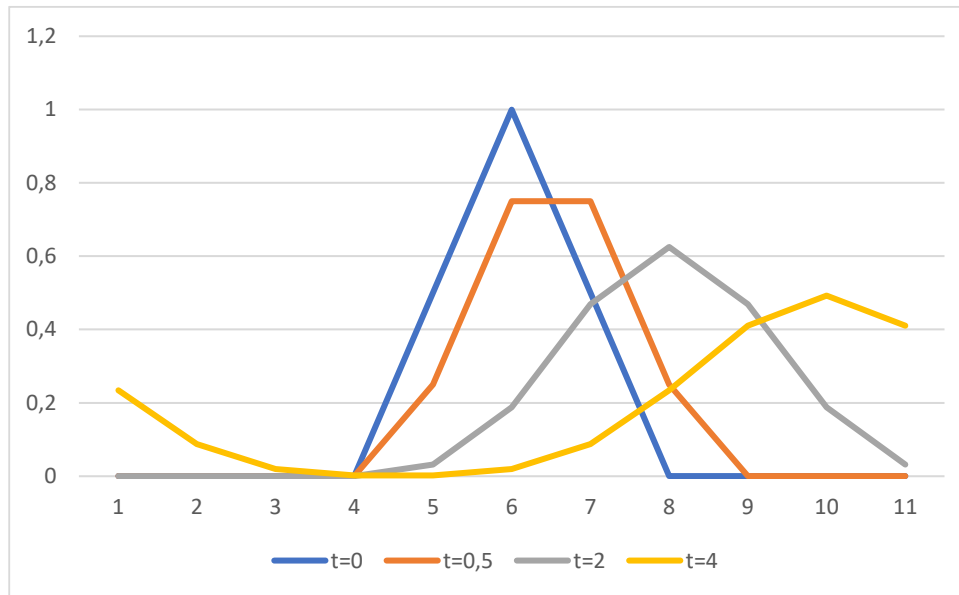
Διακριτοποίηση εξίσωσης καθαρής συναγωγής

Σχήμα FTBS – Παράδειγμα ομαλότητας της λύσης

Βλέπε συνοδευτικό excel «courant_conv».

Επίλυση της ϕ για κάθε χρονικό βήμα με $Cr=0.5$

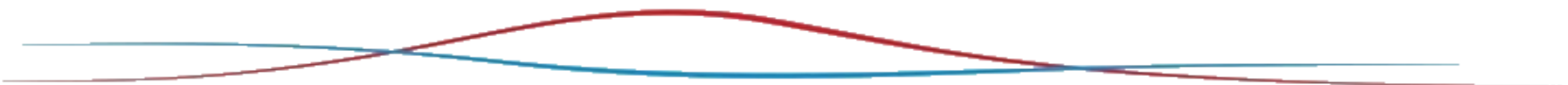
$Cr=0.5 \Rightarrow \Delta t=0.5$



Η αριθμητική λύση διαχέεται με αποτέλεσμα να μειώνεται το ύψος της κατανομής η οποία διασπείρεται εκτός των ορίων της πραγματικής λύσης.

Εμφανίζεται λοιπόν ενός είδους αριθμητικής διάχυσης ή ψευτοδιάχυσης.

Παρ' όλα αυτά, η φάση της κατανομής διατηρείται το ίδιο (η μέγιστη τιμή μεταφέρεται με σωστή ταχύτητα).



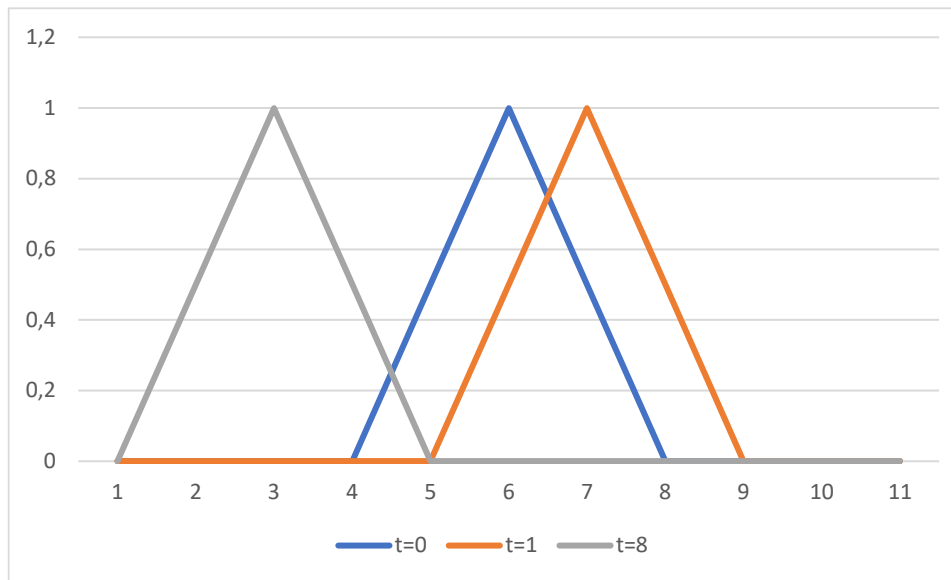
Διακριτοποίηση εξίσωσης καθαρής συναγωγής

Σχήμα FTBS – Παράδειγμα ομαλότητας της λύσης

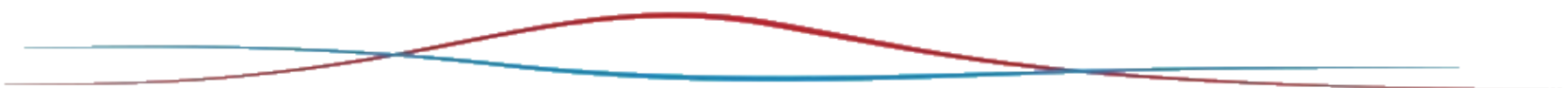
Βλέπε συνοδευτικό excel «courant_conv».

Επίλυση της ϕ για κάθε χρονικό βήμα με $Cr=1$

$Cr=1 \Rightarrow \Delta t=1$



Η κατανομή της ϕ διαδίδεται αμετάβλητη και η αριθμητική λύση είναι σωστή.



Διακριτοποίηση εξίσωσης καθαρής συναγωγής

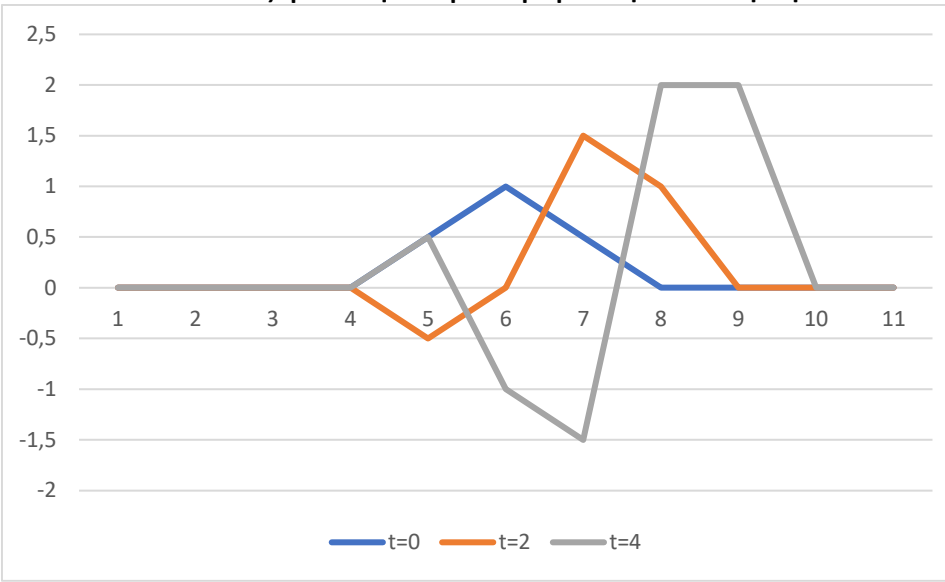
Σχήμα FTBS – Παράδειγμα ομαλότητας της λύσης

Βλέπε συνοδευτικό excel «courant_conv».

Επίλυση της ϕ για κάθε χρονικό βήμα με $Cr=2$

$$Cr=2 \Rightarrow \Delta t=2$$

Η αριθμητική λύση παρουσιάζει μεγάλες ταλαντώσεις, οι οποίες αυξάνουν με τον χρόνο παράγοντας μη ρεαλιστικά αποτελέσματα. Άρα, το αριθμητικό σχήμα είναι ασταθές για τη συγκεκριμένη συνθήκη.



Άρα, τα αποτελέσματα μίας υπολογιστικής μεθόδου εξαρτώνται τόσο από το αριθμητικό σχήμα όσο και από τις παραμέτρους που επιλέγονται!

Οι βασικές απαιτήσεις που πρέπει να ικανοποιεί ένα αριθμητικό σχήμα είναι:

- Συνέπεια
- Ευστάθεια
- Σύγκλιση



Συνέπεια αριθμητικού σχήματος – Εξίσωση συναγωγής

Ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών είναι συνεπές όταν η έκφραση της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών ταυτίζεται με την έκφραση της μερικής διαφορικής εξίσωσης όταν $\Delta x \rightarrow 0$ και $\Delta t \rightarrow 0$.

Παράδειγμα για το σχήμα FTBS:

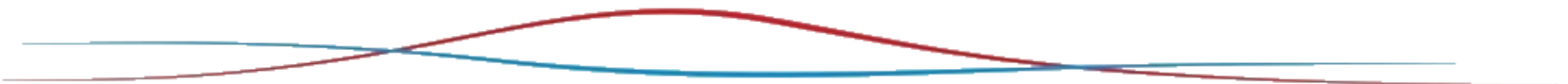
Η συνέπεια εξετάζεται με αντικατάσταση των αναπτυγμάτων Taylor για τα φ_j^{n+1} και φ_{j-1}^n στην διακριτοποιημένη εξίσωση συναγωγής. Προκύπτει εύκολα:

$$\varphi_j^{n+1} = (1 - Cr)\varphi_j^n + Cr \cdot \varphi_{j-1}^n \langle = \rangle$$

$$\langle = \rangle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_j^n + u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_j^n + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_j^n \frac{\Delta t}{2} - u \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_j^n \frac{\Delta x}{2} + OAT = 0$$

Είναι φανερό ότι όταν $\Delta x \rightarrow 0$ και $\Delta t \rightarrow 0$, ανακτάται η αρχική μερική διαφορική εξίσωση συναγωγής ανεξάρτητα από τον τρόπο μείωσης των Δx και Δt σε σχέση με τις μερικές παραγώγους.

Άρα, το FTBS είναι συνεπές άνευ όρων.



Ευστάθεια αριθμητικού σχήματος – Εξίσωση συναγωγής

Ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών είναι ευσταθές όταν τα σφάλματα ΔΕΝ αυξάνουν κατά τη διάρκεια μιας ακολουθίας αριθμητικών υπολογισμών, δηλ. «χοντρικά» ότι τα σφάλματα δεν αυξάνουν με την πάροδο του χρόνου. Μαθηματικά, ένα σχήμα είναι ευσταθές όταν το Σ.Α. είναι 0.

Ένα σχήμα που παρουσιάζει ευστάθεια $\forall \Delta x, \Delta t$ δηλ. για κάθε Courant είναι ευσταθές άνευ όρων.

Παράδειγμα για το σχήμα FTBS:

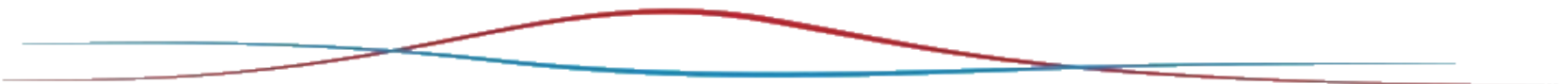
Η ευστάθεια εξετάζεται με παραγωγή στο χρόνο της εξίσωσης μεταφοράς και εν συνεχεία διερεύνηση της συμπεριφοράς του Σ.Α.. Δηλ.:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (1)$$

Λόγω της εξίσωσης συναγωγής ισχύει: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -u \frac{\partial \varphi}{\partial x}$

Οπότε η (1) γίνεται:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$



Ευστάθεια αριθμητικού σχήματος – Εξίσωση συναγωγής

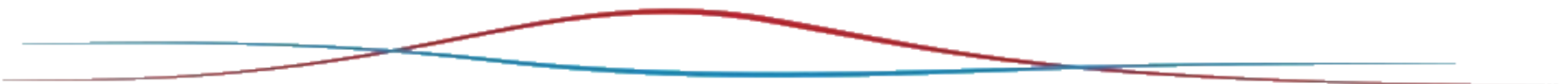
Διερεύνηση του Σ.Α. (με αντικατάσταση της δεύτερης χρονικής παραγώγου από την τελευταία σχέση στην προηγούμενη διαφάνεια):

$$\Sigma A = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_j^n \frac{\Delta t}{2} - u \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j^n \frac{\Delta x}{2} + OAT$$

$$\Sigma A = \left(u^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j^n \frac{\Delta t}{2} - u \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j^n \frac{\Delta x}{2} + OAT = -u \left(\frac{\Delta x - u\Delta t}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j^n + OAT$$

Οπότε η εξίσωση μεταφοράς γίνεται:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = u \frac{\Delta x - u\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j^n + OAT$$



Ευστάθεια αριθμητικού σχήματος – Εξίσωση συναγωγής

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u \frac{\Delta x - u \Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_j + O(\Delta t)$$

Περιπτώσεις:

$\Delta x - u \Delta t > 0 \Rightarrow Cr < 1$, Εμφανίζεται ένας όρος αριθμητικής διάχυσης που τείνει να εξομαλύνει την κατανομή της φ , τηρώντας όμως την ομαλότητα δίνοντας ρεαλιστικά αποτελέσματα.

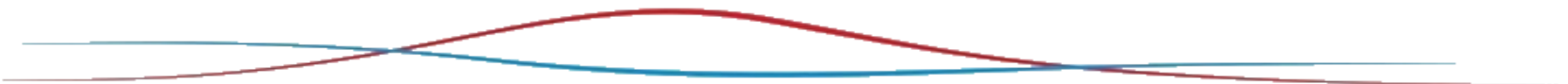
$\Delta x - u \Delta t = 0 \Rightarrow Cr = 1$, Η προσέγγιση γίνεται ακριβής.

$\Delta x - u \Delta t < 0 \Rightarrow Cr > 1$, Εμφανίζεται ένας όρος «αντιδιάχυσης» που αυξάνει τις διαταραχές και το σχήμα είναι ασταθές.

Συνεπώς, το FTBS είναι ευσταθές όταν ισχύει η συνθήκη CFL (Courant-Friedrichs-Lewy):

$$Cr \leq 1$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις ένα ρητό σχήμα είναι ευσταθές όταν όλοι οι συντελεστές των όρων φ στα διάφορα χρονικά και χωρικά σημεία είναι ≥ 0 . Για παράδειγμα, η προαναφερόμενη συνθήκη διασφαλίζει θετικούς συντελεστές των όρων της φ στην εξίσωση FTBS-Συναγωγή.



Σύγκλιση αριθμητικού σχήματος

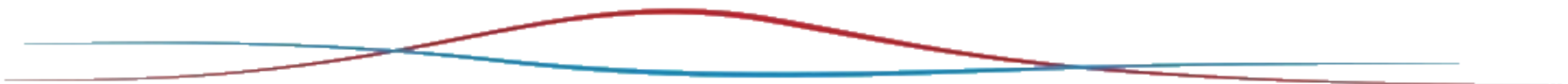
Ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών συγκλίνει όταν η ακολουθία των λύσεων που προκύπτει για συνεχώς μειούμενα Δx και Δt , τείνει στην πραγματική λύση της εξίσωσης μερικών παραγώγων.

ΌΜΩΣ, αυτό δεν σημαίνει ότι η πύκνωση του πλέγματος θα οδηγήσει αναγκαστικά στην βελτίωση της αριθμητικής λύσης. Για παράδειγμα, σε ένα σχήμα που είναι ευσταθές υπό όρους (π.χ. $Cr \leq 1$ για το FTBS), τότε η μορφή του χωρο-χρονικού πλέγματος υπόκειται σε περιορισμούς (που μπορεί να μην επιτρέπουν την οσοδήποτε πύκνωση) για να επιτευχθεί η ευστάθεια.

Δεν πρέπει να συγχέεται η σύγκλιση με τη συνέπεια. Η πρώτη αφορά τη σχέση μεταξύ των λύσεων της μερικής διαφορικής εξίσωσης και της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών, ενώ η δεύτερη τη σχέση μεταξύ καθεαυτών των μορφών των εξισώσεων.

Σχέση Συνέπειας-Ευστάθειας-Σύγκλισης/ Θεώρημα Lax:

Η ευστάθεια αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση ενός συνεπούς αριθμητικού σχήματος.

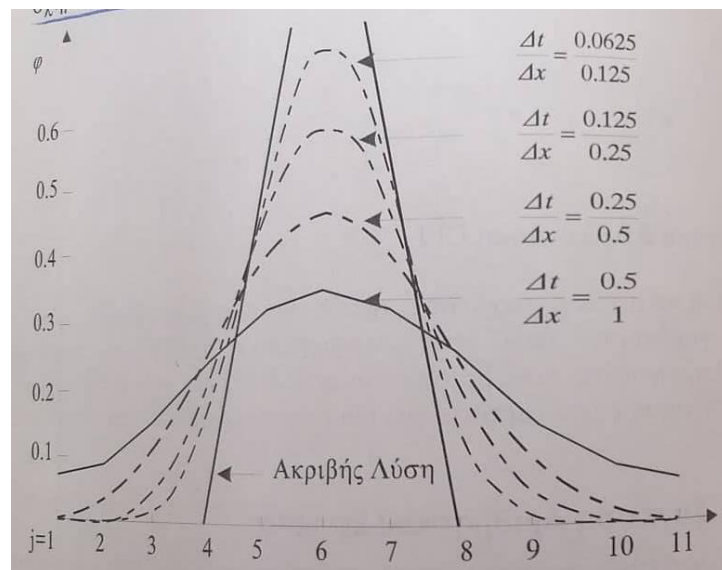


Σχέση μεταξύ ευστάθειας και σύγκλισης

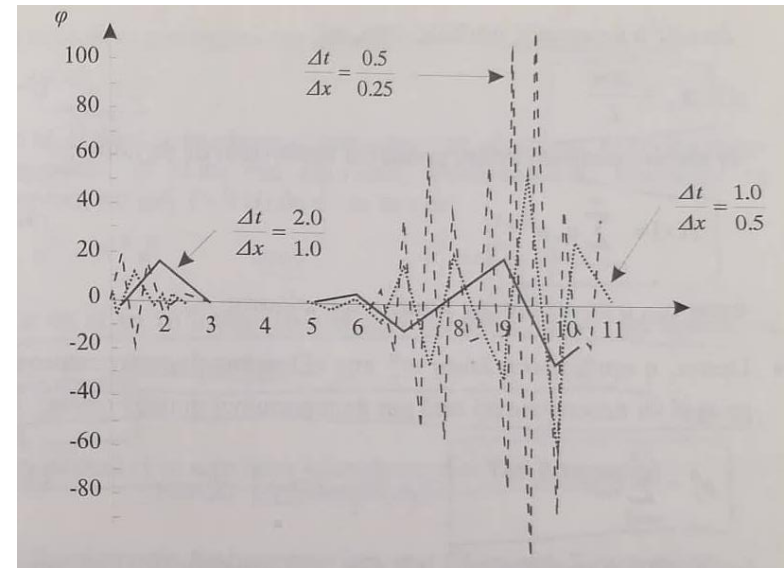
Όπως προαναφέρθηκε η πύκνωση του πλέγματος με σκοπό τη σύγκλιση (δηλ. την εύρεση λύσης αποδεκτής ακρίβειας) θα πρέπει να γίνεται κατά τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι όροι ευστάθειας του σχήματος. **Αν δεν τηρηθεί η συνθήκη ευστάθειας, η πύκνωση θα οδηγήσει σε αποτυχία της επίλυσης (απόκλιση).**

Παράδειγμα στο FTBS

Πύκνωση με $Cr=0.5$ (ΣΥΓΚΛΙΣΗ)



Πύκνωση με $Cr=2$ (ΑΠΟΚΛΙΣΗ)





Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

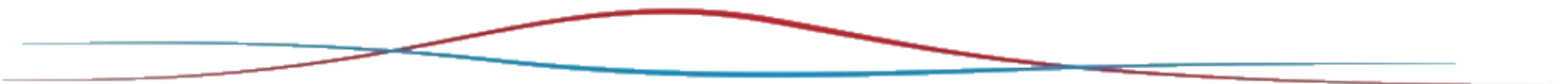
Μερική διαφορική εξίσωση διατήρησης με διάχυση:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad a \geq 0$$

Όπου a είναι ο λεγόμενος συντελεστής διάχυσης.

Η εξίσωση περιγράφει τη μεταφορά με διάχυση της ποσότητας ϕ σε μία διεύθυνση του χώρου x στο χρόνο t . Ενδεικτικά φαινόμενα:

- Αγωγή θερμότητας σε στερεά σώματα.
- Διάχυση συστατικού σε στάσιμο μέσο.
- Κ.α.





Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Σχήμα FTCS

Εφαρμογή σχήματος **Forward in Time Central in Space** (δηλ. κατάντη στο χρόνο και κεντρικές διαφορές στον χώρο) στην εξίσωση διάχυσης.

Χρονική παράγωγος:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n}{\Delta t}$$

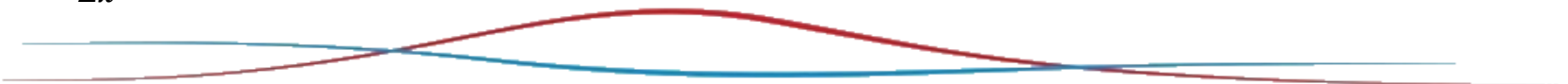
Χωρική παράγωγος 2ης τάξης:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Οπότε η διακριτοποιημένη εξίσωση διάχυσης είναι:

$$\frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n}{\Delta t} = a \frac{\varphi_{j-1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j+1}^n}{\Delta x^2} \Rightarrow \varphi_j^{n+1} = (1 - 2\gamma)\varphi_j^n + \gamma(\varphi_{j-1}^n + \varphi_{j+1}^n)$$

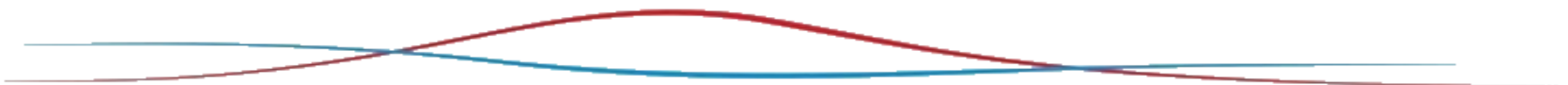
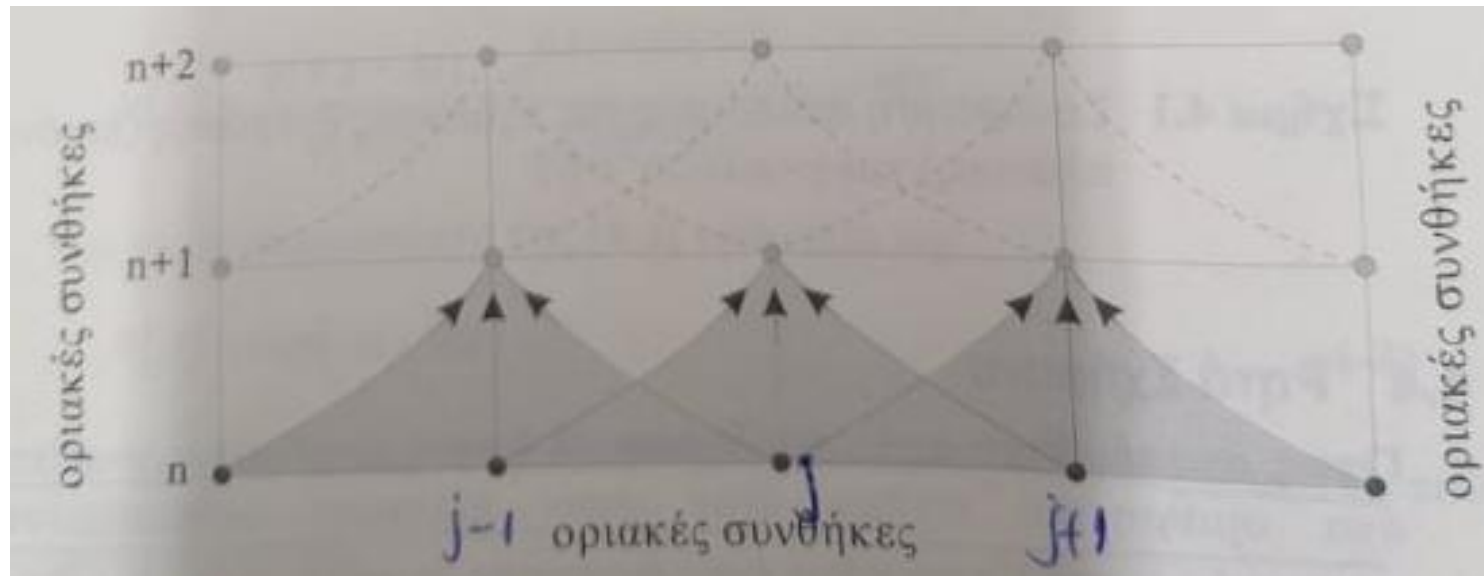
Όπου $\gamma = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}$ αδιάστατος, είναι ο συντελεστής διαχυτότητας ή ο αριθμός διάχυσης.



Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Σχήμα FTCS

Το σχήμα είναι **PHTO (explicit)**, καθώς επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό της μεταφερόμενης ποσότητας από πληροφορίες της προηγούμενης χρονικής στιγμής.





Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Σχήμα FTCS

Για την ανάλυση του Σ.Α. της εξίσωσης καθαρής διάχυσης αρκεί να αντικαταστήσουμε στην διακριτοποιημένη εξίσωση διάχυσης τα αναπτύγματα Taylor των φ_j^{n+1} , φ_{j-1}^n και φ_{j+1}^n .

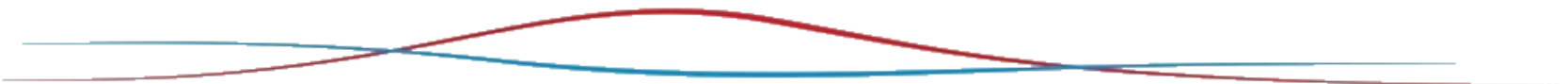
Προκύπτει:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \underbrace{a \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \frac{\Delta x^2}{12} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2}}_{\text{Σ.Α.}} + O(\Delta t^2)$$

Άρα το Σχήμα είναι πρώτης τάξης στο χρόνο και δεύτερης τάξης στο χώρο, $O(\Delta t, \Delta x^2)$.

Συνέπεια:

Είναι προφανές ότι καθώς $\Delta t \rightarrow 0$ και $\Delta x \rightarrow 0$, το Σ.Α. μηδενίζεται και η εξίσωση μετατρέπεται στην αρχική εξίσωση μερικών παραγώγων, άρα το σχήμα είναι συνεπές άνευ όρων.





Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Σχήμα FTCS

Σύγκλιση/ακρίβεια και ευστάθεια

Σύγκλιση προς την ακριβή λύση θα συμβεί όταν $\Sigma.A.=0$, δηλ. όταν:

$$a \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \frac{\Delta x^2}{12} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{a^2}{6\gamma} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \quad (1)$$

Όμως, με χρονική παραγωγή της εξίσωσης διάχυσης προκύπτει:

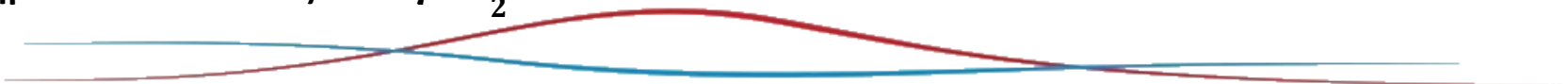
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = a^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \quad (2)$$

Άρα, η (1) μέσω της (2) γίνεται:

$$a^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \frac{a^2}{6\gamma} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}$$

Και ισχύει όταν $\gamma=1/6$ (Συνθήκη ακριβούς λύσης του FTCS)

Το Σχήμα είναι ευσταθές όταν $\gamma \leq \frac{1}{2}$.



Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Πεπλεγμένο Σχήμα

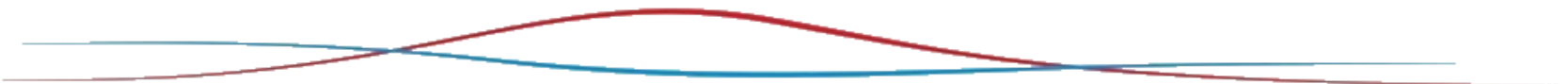
Η ικανοποίηση του κριτηρίου ευστάθειας $\gamma \leq 0.50$ με δεδομένη την τιμή του χωρικού βήματος Δx , απαιτεί να επιλεγεί μία σχετικά μικρή τιμή του χρονικού βήματος, Δt με αποτέλεσμα ο υπολογιστικός χρόνος για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης της διάχυσης να είναι μεγάλος έως και κάποιες φορές απαγορευτικός.

Για το λόγο αυτό συχνά επιλέγονται τα πεπλεγμένα αριθμητικά σχήματα. Το πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα είναι της μορφής:

$$\frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n}{\Delta t} = a \left[\Theta \left(\frac{\varphi_{j+1}^{n+1} - 2\varphi_j^{n+1} + \varphi_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + (1 - \Theta) \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) \right]$$

Δηλ. ο όρος διάχυσης μπορεί να εκφραστεί ως το σταθμισμένο άθροισμα της διακριτοποιημένης χωρικής παραγώγου 2^{ης} τάξης στο τρέχων και στο προηγούμενο χρονικό σημείο. Όπου Θ (κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1) είναι ο συντελεστής βαρύτητας.

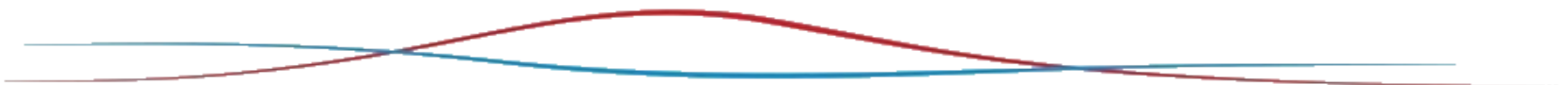
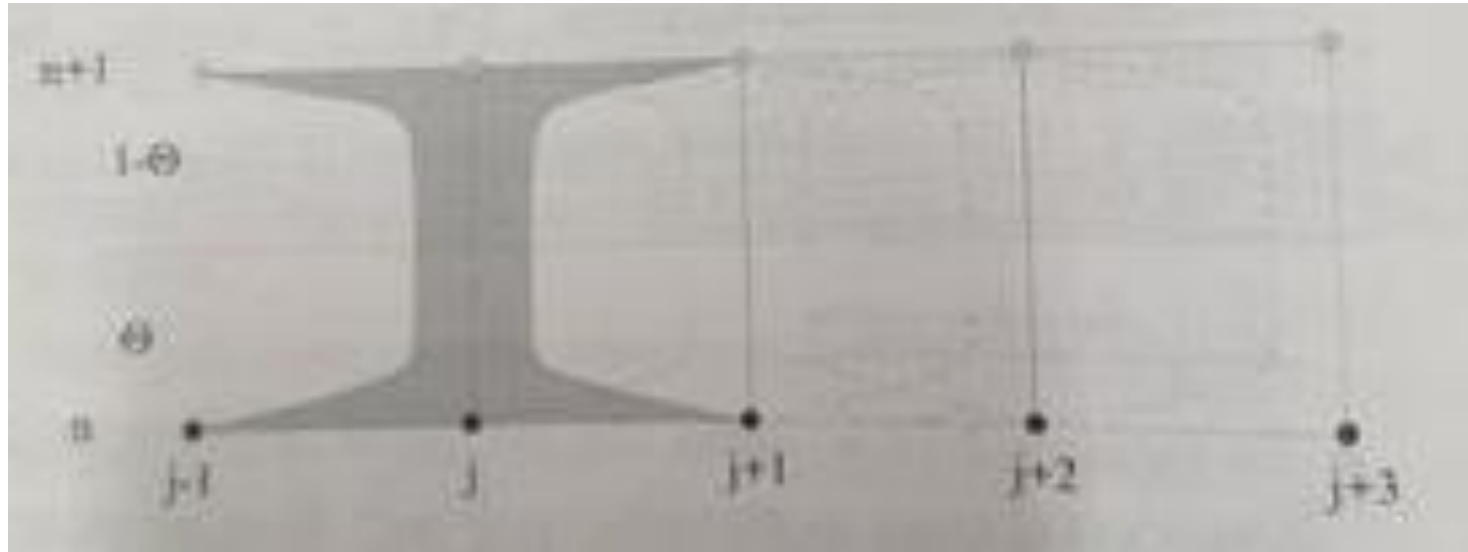
Είναι φανερό ότι (για $\Theta \neq 0$) η λύση δεν προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο χρονικό βήμα, συνεπώς **το πεπλεγμένο σχήμα είναι άρρητο (implicit).**



Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Πεπλεγμένο Σχήμα

Ροή πληροφορίας



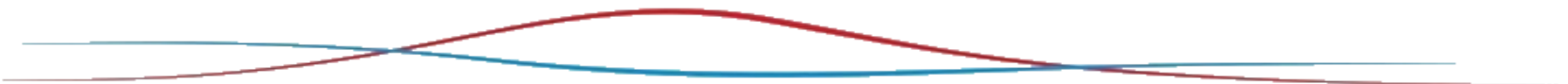
Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Πεπλεγμένο Σχήμα

Για μεγάλες τιμές του συντελεστή Θ (κοντά στην μονάδα) το βάρος της διακριτοποίησης προσεγγίζει το χρονικό επίπεδο $(n+1)$ και το σχήμα καλείται πλήρως πεπλεγμένο, ενώ για μικρές τιμές του συντελεστή Θ (κοντά στο μηδέν) το βάρος της διακριτοποίησης προσεγγίζει το χρονικό επίπεδο n και είναι ισοδύναμο με το σχήμα FTCS.

Διακρίνονται οι περιπτώσεις:

- $\Theta=0$, ισοδύναμο με το **ρητό σχήμα FTCS**
- $\Theta=0.5$, ίδια συνεισφορά των διαδοχικών χρονικών επιπέδων (τρέχον $(n+1)$ και προηγούμενο (n)) στη λύση (**Σχήμα Crank-Nicholson**)
- $\Theta=1$, συνεισφορά μόνο από το τρέχον χρονικό επίπεδο (**πλήρως πεπλεγμένο σχήμα**).



Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Πεπλεγμένο Σχήμα

Με αξιοποίηση του συντελεστή διαχυτότητας, η γενική εξίσωση του πεπλεγμένου σχήματος αναδιατάσσεται ως ακολούθως:

$$AP_j \varphi_j^{n+1} = AE_j \varphi_{j+1}^{n+1} + AW_j \varphi_{j-1}^{n+1} + S_j$$

Όπου

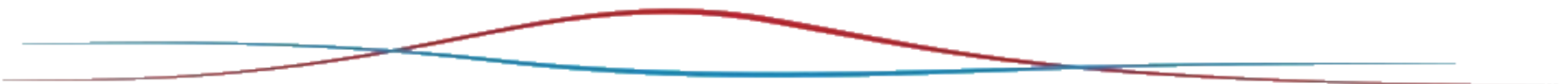
$$AE_j = \gamma \Theta \text{ (Συνεισφορά από Ανατολικά)}$$

$$AP_j = 1 + 2\gamma \Theta \text{ (Συνεισφορά από κεντρικά)}$$

$$AW_j = \gamma \Theta \text{ (Συνεισφορά από δυτικά), και}$$

$$S_j = \gamma(1 - \Theta)\varphi_{j+1}^n + [1 - 2\gamma(1 - \Theta)]\varphi_j^n + \gamma(1 - \Theta)\varphi_{j-1}^n$$

Η παραπάνω εκφράζει τη σχέση μεταξύ τριών διαδοχικών στο χώρο τιμών της ϕ στο τρέχον $(n+1)$ και στο προηγούμενο (n) χρονικό επίπεδο.





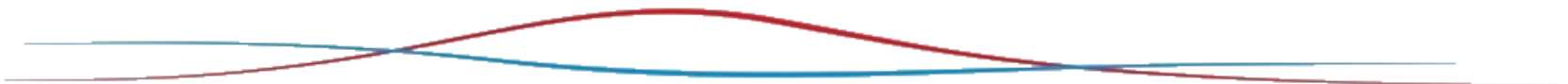
Η εξίσωση καθαής διάχυσης

Πεπλεγμένο Σχήμα – Ακρίβεια και συνέπεια

Τάξη ακρίβειας: Στη γενική περίπτωση το Σ.Α. είναι τάξης $O(\Delta t, \Delta x^2)$.

Όταν $\Theta=0.5$ (Crank-Nicholson) τότε το σχήμα πλεονεκτεί σε ακρίβεια αφού το Σ.Α. είναι τάξης $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Το Crank-Nicholson είναι ευρέως διαδεδομένο λόγω της υψηλής ακρίβειας.

Ως προς τη συνέπεια, το γενικό πεπλεγμένο σχήμα είναι συνεπές άνευ όρων.



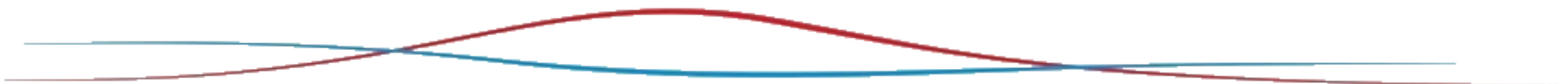


Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Πεπλεγμένο Σχήμα – Ευστάθεια

Είναι ευσταθές άνευ όρων στο διάστημα $0.5 \leq \Theta \leq 1$.

Είναι ευσταθές στο διάστημα $0 \leq \Theta < 0.5$ όταν και μόνο όταν ισχύει $\Delta t < \frac{\Delta x^2}{2a(1-2\Theta)}$

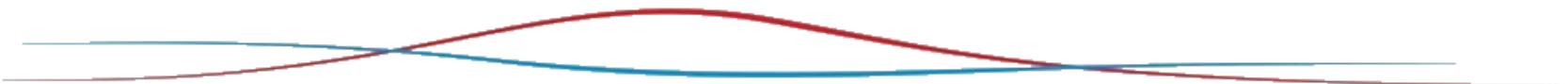




Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Άσκηση 1 – Ανάπτυξη σχήματος διακριτοποίησης

Να διακριτοποιηθεί η εξίσωση καθαρής διάχυσης με ένα σχήμα Central in Time Central in Space (CTCS). Να δοθεί η τάξη ακρίβειας του σχήματος.





Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Άσκηση 1 – Ανάπτυξη σχήματος διακριτοποίησης

Να διακριτοποιηθεί η εξίσωση καθαρής διάχυσης με ένα σχήμα Central in Time Central in Space (CTCS). Να δοθεί η τάξη ακρίβειας του σχήματος.

Λύση

Ανάντη στο χρόνο:

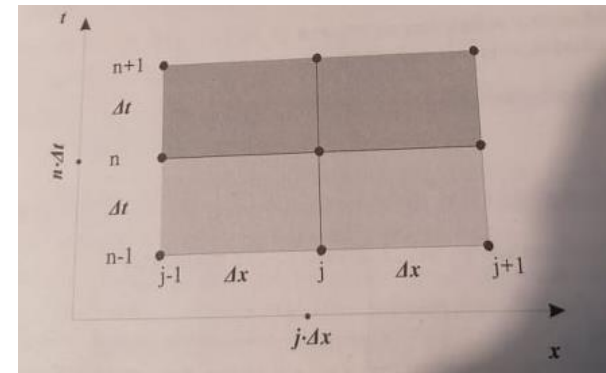
$$\varphi_j^{n-1} = \varphi_j^n - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_j^n \Delta t + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_j^n \frac{\Delta t^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} \right)_j^n \frac{\Delta t^3}{6} + O(\Delta t^4)$$

Κατάντη στο χρόνο:

$$\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_j^n \Delta t + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_j^n \frac{\Delta t^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} \right)_j^n \frac{\Delta t^3}{6} + O(\Delta t^4)$$

Αφαίρεση κατά μέλη (Κεντρική διαφορά στο χρόνο – 1^η παράγωγος):

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_j^n = \frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^{n-1}}{2\Delta t} - \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} \right)_j^n \frac{\Delta t^2}{6} + O(\Delta t^4) \quad (1)$$





Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Άσκηση 1 – Ανάπτυξη σχήματος διακριτοποίησης

Να διακριτοποιηθεί η εξίσωση καθαρής διάχυσης με ένα σχήμα Central in Time Central in Space (CTCS). Να δοθεί η τάξη ακρίβειας του σχήματος.

Λύση

Κατάντη στο χώρο:

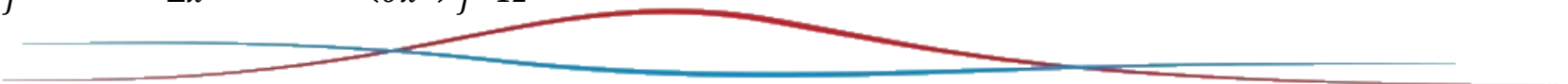
$$\varphi_{j+1}^n = \varphi_j^n + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_j^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_j^n \frac{\Delta x^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_j^n \frac{\Delta x^3}{6} + \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right)_j^n \frac{\Delta x^4}{24} + OAT$$

Ανάντη στο χώρο:

$$\varphi_{j-1}^n = \varphi_j^n - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_j^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_j^n \frac{\Delta x^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_j^n \frac{\Delta x^3}{6} + \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right)_j^n \frac{\Delta x^4}{24} + OAT$$

Πρόσθεση κατά μέλη (Κεντρική διαφορά στο χώρο – 2^η παράγωγος):

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_j^n = \frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_{j-1}^n - 2\varphi_j^n}{\Delta x^2} - \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right)_j^n \frac{\Delta x^2}{12} + OAT \quad (2)$$





Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Άσκηση 1 – Ανάπτυξη σχήματος διακριτοποίησης

Να διακριτοποιηθεί η εξίσωση καθαρής διάχυσης με ένα σχήμα Central in Time Central in Space (CTCS). Να δοθεί η τάξη ακρίβειας του σχήματος.

Λύση

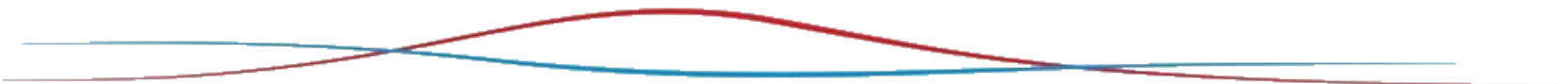
Αντικατάσταση των (1) και (2) στην εξίσωση διάχυσης:

$$\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^{n-1} + 2\gamma(\varphi_{j+1}^n + \varphi_{j-1}^n - 2\varphi_j^n)$$

Όπου $\gamma = \alpha \Delta t / \Delta x^2$.

Τάξη ακρίβειας (βλ. αναπτύγματα παραγώγων προηγουμένως): $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$.

Το σχήμα λέγεται Leapfrog και παρά την υψηλή του ακρίβεια αποδεικνύεται ότι είναι ασταθές για κάθε γ !





Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Άσκηση 2 (υπολογιστική) – Εφαρμογή FTCS σε πρόβλημα διάχυσης συστατικού σε αγωγό

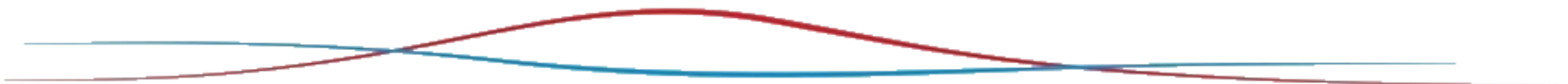
Σε αγωγό μήκους $L=1$ m εισέρχεται χημικό είδος με αρχική κατανομή συγκέντρωσης σύμφωνα με τη σχέση:

$$C(x,0) = 4x(1-x) \quad (1)$$

Το οποίο διαχέεται με συντελεστή μοριακής διάχυσης $D = 1 \text{ m}^2/\text{s}$. Να προσδιοριστεί η κατανομή της συγκέντρωσης του χημικού είδους κατά μήκος του αγωγού με εφαρμογή του αριθμητικού σχήματος διακριτοποίησης FTCS, σε διαφορετικές χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια της μοριακής διάχυσης του χημικού είδους, για δύο συντελεστές διαχυτότητας:

1. $\gamma = 0.45$ (να δοθεί το γράφημα κατανομής συγκέντρωσης τις χρονικές στιγμές $t=0\text{s}$, $t=0.02\text{s}$, $t=0.2\text{s}$)
2. $\gamma = 0.55$ (να δοθεί το γράφημα κατανομής συγκέντρωσης τις χρονικές στιγμές $t=0\text{s}$, $t=0.01\text{s}$, $t=0.02\text{s}$)

Να υιοθετηθεί βήμα χωρικής διακριτοποίησης του πεδίου ροής $\Delta x=0.025$ m. Δίδονται οι οριακές συνθήκες: $C(0,t)=C(L,t)=0$.





Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Άσκηση 2 (υπολογιστική) – Εφαρμογή FTCS σε πρόβλημα διάχυσης συστατικού σε αγωγό

Λύση

Καταρχήν η ροή κυβερνάται από την εξίσωση καθαρής διάχυσης:

$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$, η οποία με βάση το FTCS διακριτοποιείται ως ακολούθως:

$$C_j^{n+1} = (1 - 2\gamma)C_j^n + \gamma(C_{j-1}^n + C_{j+1}^n) \quad (2), \text{ όπου } C \text{ είναι η συγκέντρωση του χημικού είδους.}$$

Χωρική διακριτοποίηση: Ο αγωγός διακριτοποιείται σε διαστήματα βήματος $\Delta x = 0.025 \text{ m}$, δηλ. σε $Nx = L/\Delta x = 40$ διαστήματα και $Nj = L/\Delta x + 1 = 41$ πλεγματικά σημεία.

Χρονική διακριτοποίηση (ανά περίπτωση):

$$1. \quad \gamma = 0.45 \Rightarrow \Delta t = \frac{\gamma \Delta x^2}{D} = 0.000281 \text{ s}$$

$$2. \quad \gamma = 0.55 \Rightarrow \Delta t = \frac{\gamma \Delta x^2}{D} = 0.00034 \text{ s}$$

Η υπόλοιπη λύση περιγράφεται στο συνοδευτικό excel “διάχυση συστατικού σε αγωγό”.





Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

Άσκηση 2 (υπολογιστική) – Εφαρμογή FTCS σε πρόβλημα διάχυσης συστατικού σε αγωγό Λύση

Η υπόλοιπη λύση περιγράφεται στο συνοδευτικό excel “διάχυση συστατικού σε αγωγό”.

Καταστρώνεται Πίνακας excel με:

- 41 στήλες, μία στήλη για κάθε σημείο του χωρικού πλέγματος.
- Γραμμές όσες είναι τα σημεία του χρονικού πλέγματος που προκύπτουν για κάθε γ .

Ενδιάμεσα κελιά του Πίνακα:

- **Οριακές συνθήκες:** Για κάθε χρονικό βήμα, στο χωρικό σημείο 1 (0m) και στο σημείο 41 (1m) τίθεται $C=0$.
- **Αρχική συνθήκη:** Στο χρονικό βήμα 1 (χρονική στιγμή 0 s) και για κάθε χωρικό σημείο εφαρμόζεται η εξίσωση αρχικής κατανομής της συγκέντρωσης (εξίσωση (1)).
- **Στα επόμενα χρονικά βήματα και στα χωρικά σημεία (στήλες) 2 έως 40 εφαρμόζεται το FTCS (εξίσωση (2)) και προκύπτει αυτόματα η κατανομή της συγκέντρωσης σε κάθε χρονικό βήμα.**

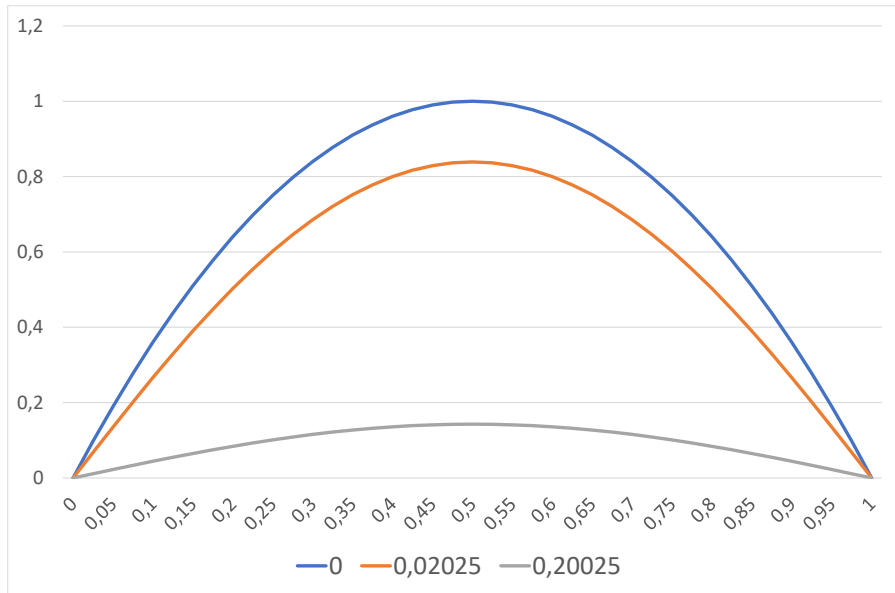


Η εξίσωση καθαρής διάχυσης

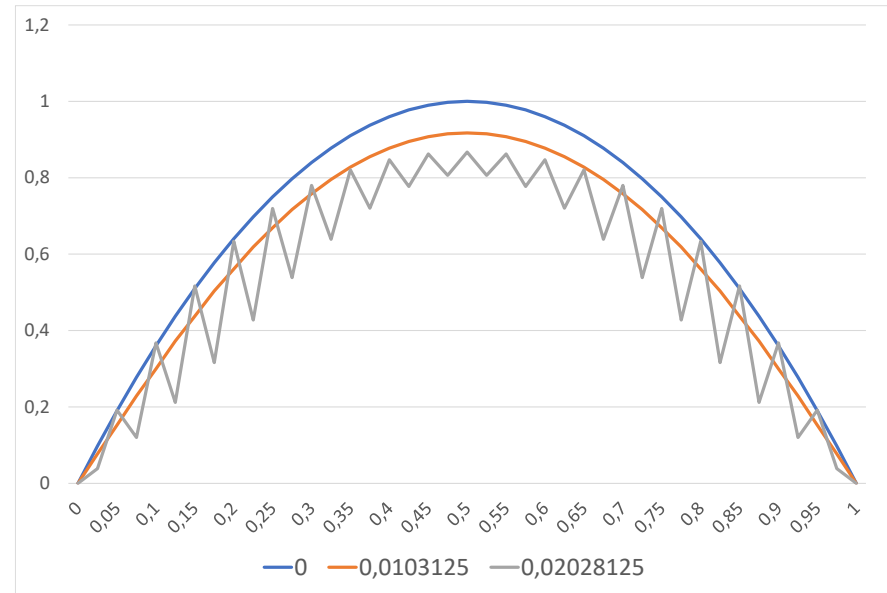
Άσκηση 2 (υπολογιστική) – Εφαρμογή FTCS σε πρόβλημα διάχυσης συστατικού σε αγωγό

Λύση

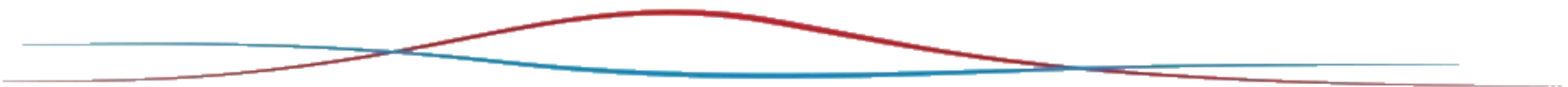
$\gamma=0.45$



$\gamma=0.55$



Παρατηρείται η αστάθεια της λύσης για $\gamma>0.5!!!$



Η εξίσωση συναγωγής - διάχυσης

Εξίσωση (ασυμπίεστο ρευστό, απουσία πηγής):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \text{ όπου } u \text{ είναι η ταχύτητα και } a \text{ είναι ο συντελεστής διάχυσης της ποσότητας } \phi.$$

Η εξίσωση έχει λύση την $\phi(x,t)$ που πρέπει να ικανοποιεί μία αρχική συνθήκη $\phi(x,0)=F(x)$ και τις οριακές συνθήκες (π.χ. Dirichlet ή Neumann) στα όρια του πεδίου ροής $x=0$ και $x=L$.

Διακριτοποίηση με το σχήμα FTCS

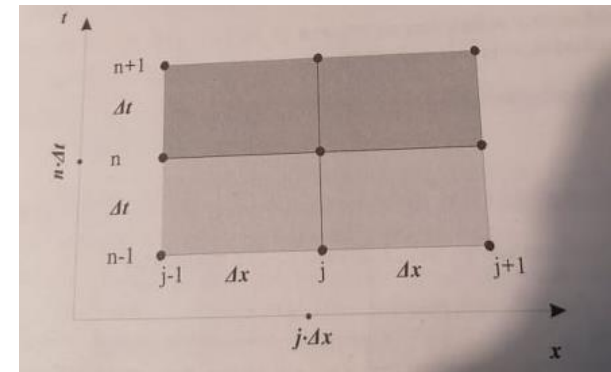
Κατάντη στο χρόνο:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_j^n = \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \frac{\Delta t}{2} + O(\Delta t^3)$$

Κεντρικές στο χώρο:

$$1^{\text{ης}} \text{ τάξης: } \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_j^n = \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x} - \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_j^n \frac{\Delta x^2}{6} + O(\Delta x^4)$$

$$2^{\text{ης}} \text{ τάξης: } \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j^n = \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right)_j^n \frac{\Delta x^2}{12} + O(\Delta x^4)$$



Η εξίσωση συναγωγής - διάχυσης

Διακριτοποίηση με το σχήμα FTCS

Αντικατάσταση στην εξίσωση διάχυσης:

$$\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n - \frac{Cr}{2} (\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n) + \gamma (\varphi_{j+1}^n + \varphi_{j-1}^n - 2\varphi_j^n)$$

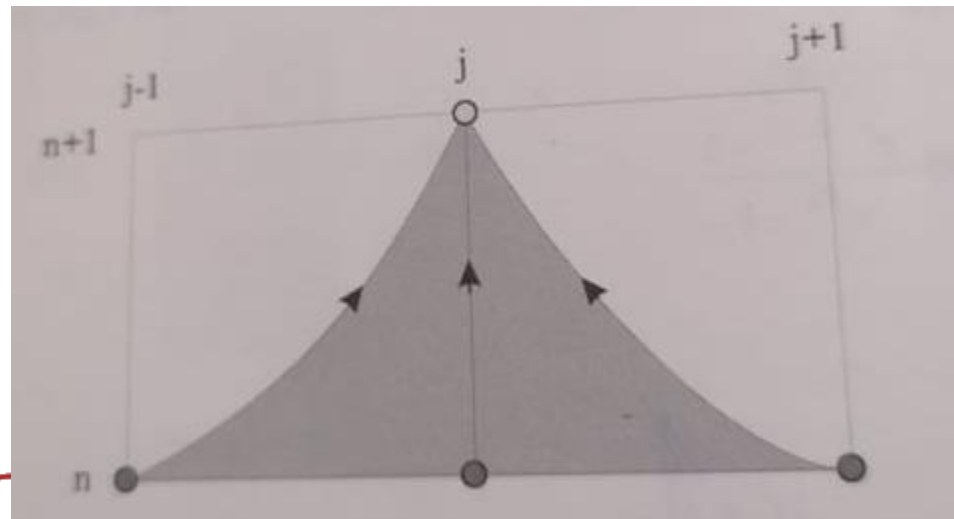
Όπου:

$$Cr = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \text{ (αριθμός Courant), και } \gamma = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \text{ (αριθμός διάχυσης)}$$

Το σχήμα είναι ΡΗΤΟ (explicit).

Άμεση ροή πληροφορίας από το

Προηγούμενο χρονικό επίπεδο.





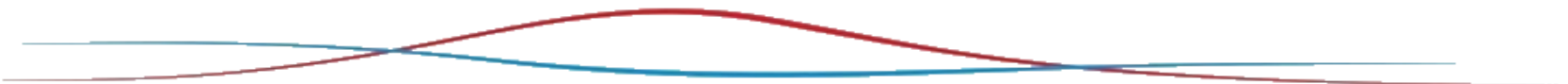
Η εξίσωση συναγωγής - διάχυσης

Συνέπεια σχήματος FTCS

Όπως γίνεται φανερό από τα αναπτύγματα Taylor, το Σ.Α. του σχήματος είναι ανάλογο της 1^{ης} δύναμης του χρονικού βήματος Δt και της 2^{ης} δύναμης του χωρικού βήματος Δx^2 .

Συνεπώς το Σχήμα εμφανίζει 1^{ης} τάξης ακρίβεια στο χρόνο και 2^{ης} τάξης ακρίβεια στον χώρο, $O(\Delta t, \Delta x^2)$.

Για $\Delta x \rightarrow 0$ και $\Delta t \rightarrow 0$, το Σ.Α. μηδενίζεται και η μερική διαφορική εξίσωση που προκύπτει είναι η ίδια με αυτήν της εξίσωσης συναγωγής-διάχυσης, άρα το σχήμα FTCS είναι συνεπές άνευ όρων με τη ΜΔΕ της εξίσωσης συναγωγής-διάχυσης.





Η εξίσωση συναγωγής - διάχυσης

Ευστάθεια σχήματος FTCS

Το σχήμα FTCS της εξίσωσης συναγωγής – διάχυσης είναι ευσταθές υπό τον όρο:

$$Cr \leq 2\gamma \leq 1 \quad (1)$$

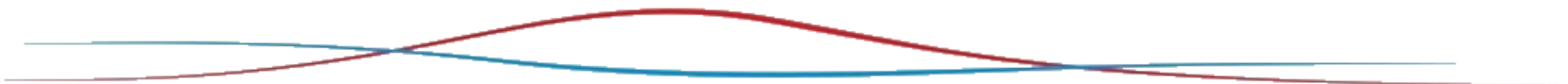
Ορίζεται ο αριθμός Peclet: $Pe = u \cdot \Delta x / \alpha$ ή $Pe = Cr / \gamma$.

Με αξιοποίηση του Pe , η διακριτοποιημένη εξίσωση FTCS Συναγωγής-διάχυσης γράφεται:

$$\varphi_j^{n+1} = \frac{\gamma}{2} (2 + Pe) \varphi_{j-1}^n + \frac{\gamma}{2} (2 - Pe) \varphi_{j+1}^n + (1 - 2\gamma) \varphi_j^n$$

Υπενθυμίζεται ότι για να είναι το ρητό σχήμα ευσταθές θα πρέπει όλοι οι συντελεστές να είναι ≥ 0 , άρα θα πρέπει (για $u > 0$): $Pe \leq 2$ και $\gamma \leq 1/2$, που με αντικατάσταση $Pe = Cr/\gamma$ επιστρέφεται η συνθήκη ευστάθειας (1).

Στην περίπτωση που $Pe > 2$ τότε η συνεισφορά του όρου φ_{j+1}^n είναι αρνητική (αντιδιάχυση), πράγμα που δεν επιδέχεται φυσική ερμηνεία.



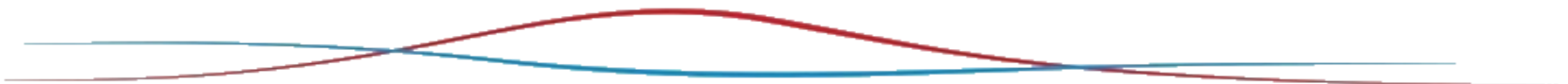


Η εξίσωση συναγωγής - διάχυσης

Άσκηση 3 – Σχήμα Κατάντη στο χρόνο, Ανάντη συναγωγής και Κεντρικές διάχυσης (Σχήμα Ανάντη-Κεντρικές Διαφορές)

Να διακριτοποιηθεί η εξίσωση συναγωγής-διάχυσης με ένα σχήμα Κατάντη διαφορές στο χρόνο, Ανάντη διαφορές στον όρο συναγωγής και Κεντρικές διαφορές στον όρο διάχυσης.

Να δοθεί η τάξη ακρίβειας.



Η εξίσωση συναγωγής - διάχυσης

Άσκηση 3 – Σχήμα Κατάντη στο χρόνο, Ανάντη συναγωγής και Κεντρικές διάχυσης (Σχήμα Ανάντη-Κεντρικές Διαφορές)

Να διακριτοποιηθεί η εξίσωση συναγωγής-διάχυσης με ένα σχήμα Κατάντη διαφορές στο χρόνο, Ανάντη διαφορές στον όρο συναγωγής και Κεντρικές διαφορές στον όρο διάχυσης.

Να δοθεί η τάξη ακρίβειας.

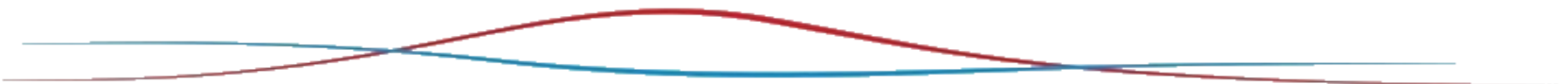
Λύση

$$\text{Κατάντη στο χρόνο: } \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_j^n = \frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n}{\Delta t} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_j^n \frac{\Delta t}{2} - \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} \right)_j^n \frac{\Delta t^2}{6} + O(\Delta t)$$

$$\text{Ανάντη στο χώρο: } \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_j^n = \frac{\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n}{\Delta x} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_j^n \frac{\Delta x}{2} - \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_j^n \frac{\Delta x^2}{6} + O(\Delta x)$$

$$\text{Κεντρικές διαφορές στο χώρο: } \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_j^n = \frac{\varphi_{j-1}^n + \varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Τάξη ακρίβειας: $O(\Delta t, \Delta x)$.





Η εξίσωση συναγωγής - διάχυσης

Άσκηση 3 – Σχήμα Κατάντη στο χρόνο, Ανάντη συναγωγής και Κεντρικές διάχυσης (Σχήμα Ανάντη-Κεντρικές Διαφορές)

Να διακριτοποιηθεί η εξίσωση συναγωγής-διάχυσης με ένα σχήμα Κατάντη διαφορές στο χρόνο, Ανάντη διαφορές στον όρο συναγωγής και Κεντρικές διαφορές στον όρο διάχυσης.

Να δοθεί η τάξη ακρίβειας.

Λύση

Αντικατάσταση στην εξίσωση συναγωγής-διάχυσης (με $\Sigma.A. \rightarrow 0$):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Rightarrow \phi_j^{n+1} = (1 - Cr - 2\gamma)\phi_j^n + (\gamma + Cr)\phi_{j-1}^n + \gamma\phi_{j+1}^n$$

ΡΗΤΟ ΣΧΗΜΑ.

