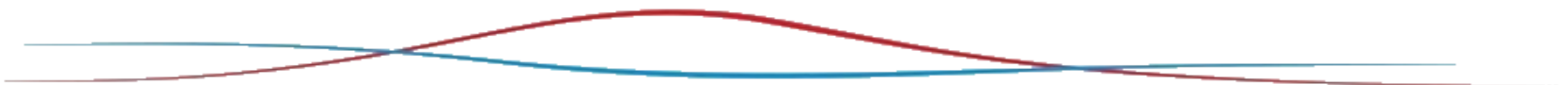




Επίλυση του πεδίου ροής στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων ελέγχου

*Υπολογιστική Ρευστομηχανική
Ενεργειακή Κατεύθυνση
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών*

Γεώργιος Μιχ. Σταυρακάκης
Επίκουρος Καθηγητής



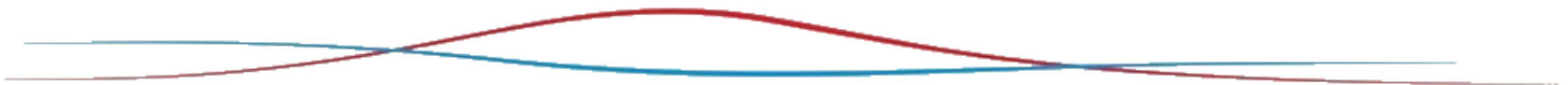


Εισαγωγή

Όπως έχει αναλυθεί στα προηγούμενα, οι διακριτοποιημένες εξισώσεις για τις εξαρτημένες μεταβλητές του πεδίου ροής γραμμένες για όλα τα πλεγματικά σημεία δημιουργούν ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων το οποίο μπορεί να επιλυθεί με χρήση αλγορίθμου επίλυσης συστημάτων.

Ιδίως όσον αφορά τις βαθμωτές ποσότητες (π.χ. θερμοκρασία, χημικό είδος), το σύστημα μπορεί να λυθεί με ένα αλγόριθμο επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Στην περίπτωση όμως των υδροδυναμικών μεταβλητών (Πίεση και ταχύτητα), στις εξισώσεις διατήρησης ορμής εμφανίζεται ένας επιπλέον άγνωστος, η Πίεση. Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα είναι πεπλεγμένο, κι αυτό διότι η Πίεση είναι μεταβλητή ποσότητα που πρέπει να υπολογιστεί, πράγμα που δημιουργεί την ανάγκη εισαγωγής ενός αλγορίθμου επίλυσης του υδροδυναμικού πεδίου ροής.

Σημείωση: Ως υδροδυναμικό πεδίο ορίζεται η κατανομή ταχύτητας και πίεσης του ρευστού στο πεδίο ροής.





Επίλυση του υδροδυναμικού πεδίου

Για την διερεύνηση του χειρισμού του επιπλέον αγνώστου στο σύστημα εξισώσεων του υδροδυναμικού πεδίου, την Πίεση, διατυπώνονται αρχικά οι κυβερνούσες εξισώσεις της ροής στην περίπτωση διδιάστατης ροής:

u-ορμή:

$$\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + S_u \quad (1)$$

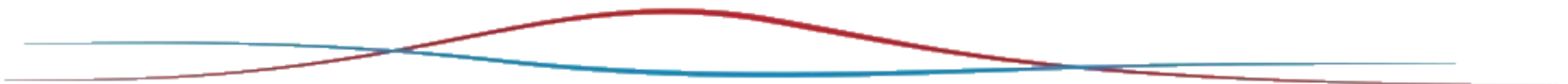
$$\text{Όπου } s_u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

v-ορμή:

$$\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + S_v \quad (2)$$

$$\text{Όπου } s_v = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Παρατηρείται η εμφάνιση της Πίεσης (βαθμίδα πίεσης) ως πρόσθετη άγνωστη μεταβλητή στο σύστημα, η οποία μάλιστα δεν είναι σταθερή αλλά λαμβάνει διαφορετικές τιμές από κόμβο σε κόμβο.



Επίλυση του υδροδυναμικού πεδίου

Διακριτοποίηση και γραμμικοποίηση των όρων πηγής

Με ολοκλήρωση στον υπολογιστικό όγκο ελέγχου, π.χ. για την οριζόντια u συνιστώσα ταχύτητας στο δυτικό μέτωπο του όγκου ελέγχου του κόμβου P , η διακριτοποιημένη εξίσωση της οριζόντιας συνιστώσας ταχύτητας θα είναι:

$$a_P u_P = a_E u_E + a_W u_W + a_S u_S + a_N u_N + A_w (P_W - P_P) + S_{u,P} V_P \quad (3)$$

Όπου εμφανίζεται η Δύναμη από την οριζόντια βαθμίδα πίεσης

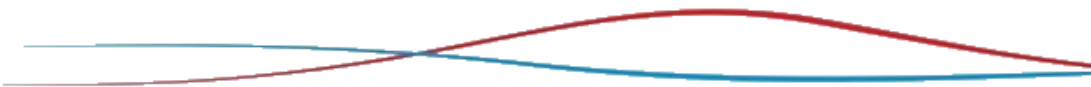
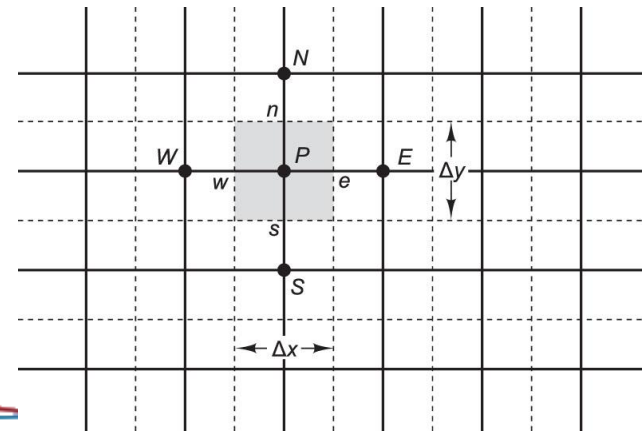
Που επιδρά στον όγκο ελέγχου.

Η γραμμικοποίηση του όρου πηγής δίνει:

$$S_{u,P} V_P = S U_u + S P_u * u_P \quad (4)$$

Συνεπώς, η (3) λόγω της (4) γίνεται:

$$(a_P - S P_u) u_P = \sum_{i=nb} a_i u_i + A_w (P_W - P_P) + S U_u \quad (5)$$

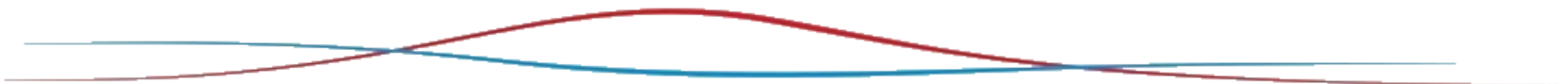


Ο αλγόριθμος SIMPLE

Η επίλυση της εξίσωσης (5) παραπάνω είναι αδύνατη καθώς περιλαμβάνει την πίεση ως επιπλέον άγνωστο (εξίσωση με δύο αγνώστους). Συνεπώς χρειαζόμαστε μία επιπρόσθετη εξίσωση για να «κλείσει» το σύστημα των εξισώσεων. Σε κάθε ροή, μία επιπλέον εξίσωση είναι πάντα η εξίσωση συνέχειας (διατήρηση της μάζας) η οποία θα μπορούσε να αξιοποιηθεί ως η επιπρόσθετη αναγκαία εξίσωση για να «κλείσει» το σύστημα εξισώσεων του υδροδυναμικού πεδίου. ΌΜΩΣ, η εξίσωση συνέχειας δεν περιλαμβάνει την Πίεση.

Ο αλγόριθμός που συχνά χρησιμοποιείται για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος είναι ο αλγόριθμος **SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations)**, Ημιάρρητη μέθοδος για τον χειρισμό συζευγμένων εξισώσεων μέσω της πίεσης) των Patankar & Spalding (1972). Αποτελεί ουσιαστικά μία διαδικασία εκτίμησης-διόρθωσης για τον υπολογισμό της πίεσης στο πεδίο ροής ως εξής:

Δίδεται μία αρχική εκτίμηση της πίεσης, π.χ. P^* , που ο SIMPLE την επικαιροποιεί/διορθώνει (σε κάθε επανάληψη επίλυσης του συστήματος) μέχρι οι ταχύτητες που προκύπτουν να ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας και τις εξισώσεις ορμής.





Ο αλγόριθμος SIMPLE

Διόρθωση της ταχύτητας

Με την αρχική εκτίμηση P^* της πίεσης και u^* της ταχύτητας, το πεδίο ροής μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως εξής:

$$P = P^* + P' \quad (6)$$

$$u = u^* + u' \quad (7)$$

Όπου P , u είναι οι σωστές τιμές των υδροδυναμικών μεταβλητών, και P' , u' είναι η πίεση και ταχύτητα διόρθωσης, οι οποίες διορθώνουν τις αρχικοποιήσεις (αυτές με σύμβολο «*») σε κάθε επανάληψη υπολογισμών, μέχρι να ικανοποιηθεί η εξίσωση συνέχειας και διατήρησης ορμής.

Έτσι, στο πρώτο βήμα υπολογισμών στην εξίσωση (5) θα εμφανίζονται οι αρχικές τιμές των μεταβλητών P^* και u^* , δηλ.:

$$(a_P - SP_u)u_P^* = \sum_{i=nb_s} a_i u_i^* + A_w(P_W^* - P_P^*) + SU_u \quad (8)$$

$$(5)-(8) \Rightarrow a_P u_P' = \sum_{i=nb_s} a_i u_i' + A_w(P_W' - P_P') \quad (9)$$

Υπόθεση SIMPLE: $\sum_{i=nb_s} a_i u_i' \rightarrow 0$.

$$\text{Άρα η (9) γίνεται: } a_P u_P' = A_w(P_W' - P_P') \quad (10)$$



Ο αλγόριθμος SIMPLE

Διόρθωση της ταχύτητας

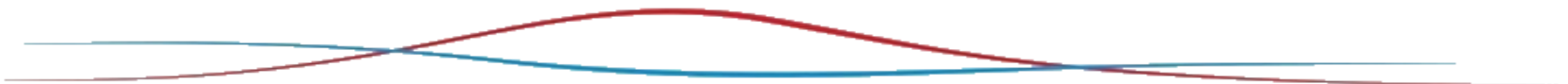
Λόγω της (10), η ταχύτητα του πεδίου ροής θα υπολογίζεται τελικά από τη σχέση:

$$u_P - u_P^* = \frac{A_w}{a_P} (P'_W - P'_P) \Leftrightarrow$$

$$u_P = u_P^* + \frac{A_w}{a_P} (P'_W - P'_P) \quad (11)$$

Δηλ. η ταχύτητα που θα υπολογίζεται σε κάθε κελί θα είναι συνάρτηση μόνο της αρχικής εκτίμησης της ταχύτητας και της διορθωμένης βαθμίδας πίεσης.

Η αναγκαία διορθωμένη βαθμίδα πίεσης θα προέλθει από την διόρθωση πίεσης μέσω της εξίσωσης συνέχειας.



Ο αλγόριθμος SIMPLE

Διόρθωση της πίεσης

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0$$

Διακριτοποίηση με βάση την μέθοδο πεπερασμένων όγκων:

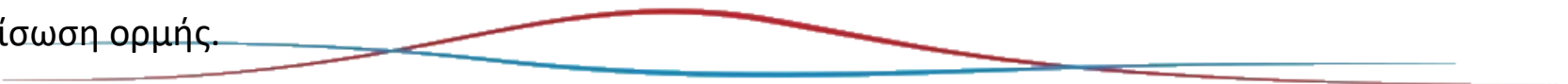
$$\frac{\rho_P - \rho_P^0}{\Delta t} \cdot v_P + (\rho u)_e A_e - (\rho u)_w A_w + (\rho v)_n A_n - (\rho v)_s A_s = 0 \quad (12)$$

Με αντικατάσταση των διορθωμένων ταχυτήτων (από εξ. (11)) σε κάθε μέτωπο, η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$a_P^P P'_P = a_E^P P'_E + a_W^P P'_W + a_N^P P'_N + a_S^P P'_S + S_m \quad (13)$$

Όπου: P' είναι η πίεση διόρθωσης και

$a_j^P = \rho_j A_j \frac{A_j}{a_P}$, με a^P οι συντελεστές της εξίσωσης συνέχειας, J οι υπολογιστικοί κόμβοι (P,E,W,N,S), j είναι τα αντίστοιχα μέτωπα του κελιού (e,w,n,s), και a_P είναι ο συντελεστής του κεντρικού κόμβου από την εξίσωση ορμής.



Ο αλγόριθμος SIMPLE

Διόρθωση της πίεσης

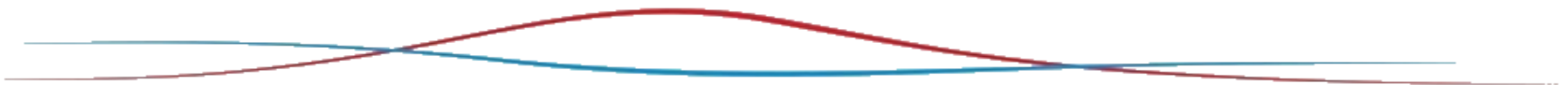
$$a_P^P P_P' = a_E^P P_E' + a_W^P P_W' + a_N^P P_N' + a_S^P P_S' + S_m \quad (13)$$

Όπου:

$$S_m = \frac{\rho_P^0 - \rho_P}{\Delta t} V_P + (\rho u^*)_w A_w - (\rho u^*)_e A_e + (\rho u^*)_n A_n - (\rho u^*)_s A_s$$

$$\text{Και } a_P^P = a_E^P + a_W^P + a_N^P + a_S^P$$

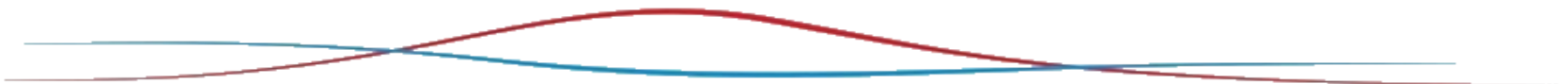
Ο όρος πηγής S_m ταυτίζεται με τη διακριτοποιημένη εξίσωση συνέχειας (12), με αρνητικό πρόσημο και εκφρασμένη σε όρους αρχικής εκτίμησης της ταχύτητας u^* . Άρα, όταν $S_m=0$ η εξίσωση συνέχειας θα ικανοποιείται από τις u ταχύτητες και η μέθοδος θα έχει συγκλίνει. Συνεπώς, ο όρος πηγής παριστάνει έναν όρο μάζας (ψευδοπηγή μάζας) ο οποίος θα πρέπει να μηδενίζεται όταν το πρόβλημα συγκλίνει.



Ο αλγόριθμος SIMPLE

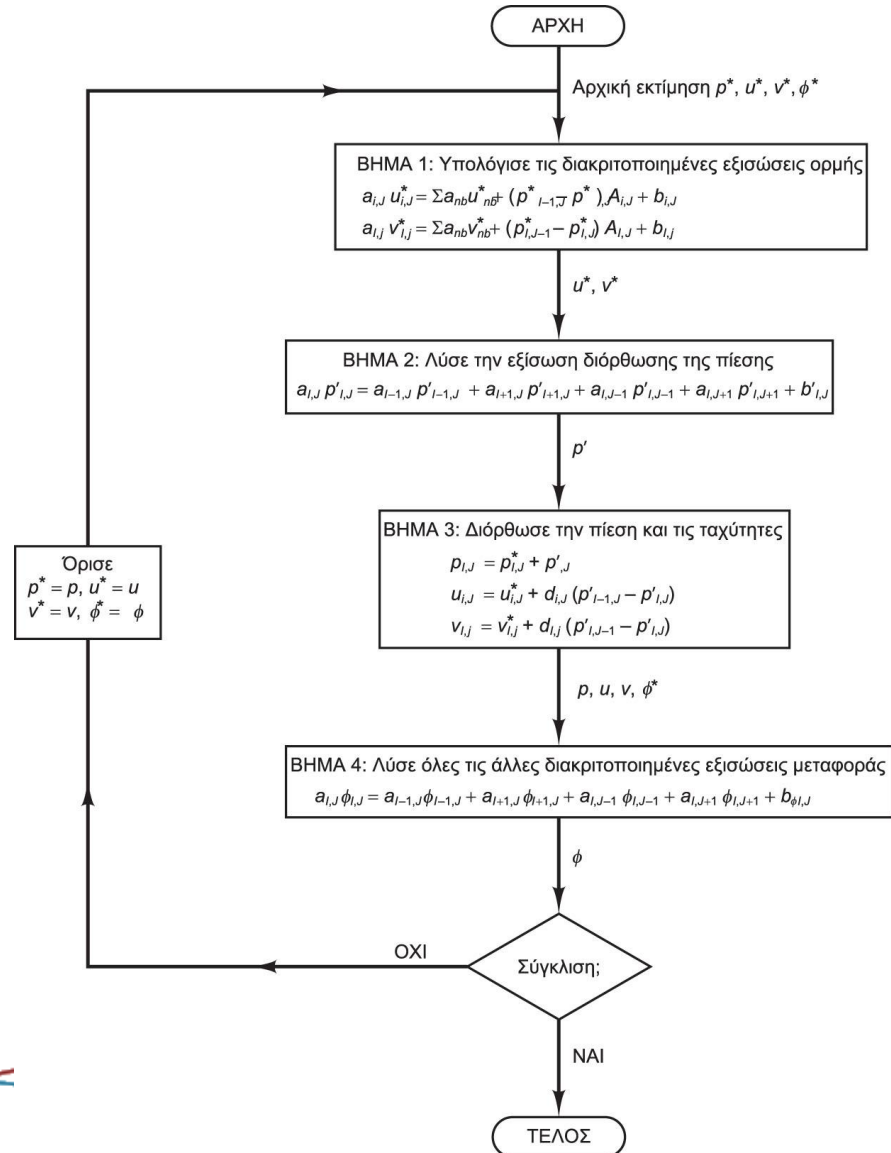
Τα βήματα του αλγόριθμου

1. Αρχική εκτίμηση του πεδίου πίεσης P^*
2. Επίλυση των εξισώσεων ορμής για u^* , v^*
3. Επίλυση εξίσωσης διόρθωσης πίεσης
4. Υπολογισμός σωστής πίεσης από την εξίσωση διόρθωσης πίεσης $P = P^* + P'$
5. Διόρθωση ταχυτήτων
6. Επίλυση των εξισώσεων των λοιπών μεγεθών π.χ. θερμικής ενέργειας, συγκέντρωσης χημικού είδους, κτλ.
7. Επιστροφή στο βήμα 1, τίθεται $P^* = P$ και επαναλαμβάνεται η επίλυση έως την επίτευξη σύγκλισης.



Ο αλγόριθμος SIMPLE

Διάγραμμα λογικών βημάτων



Παραλλαγές του αλγορίθμου SIMPLE

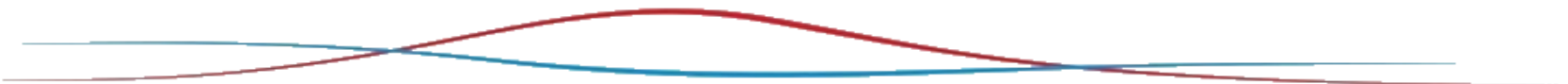
Ο αλγόριθμος SIMPLEX

Στον SIMPLE αγνοείται ο όρος $\sum_{i=nb\varsigma} a_i u'_i$. Η παράλειψη του όρου αυτού έχει επίδραση στις τιμές που λαμβάνει η μεταβλητή P' , η οποία προκύπτει μεγαλύτερη από την αναμενόμενη. Προς αντιμετώπιση των μεταβολών στις τιμές πίεσης από την μία επανάληψη στην επόμενη χρησιμοποιείται υποχαλάρωση με επακόλουθο την ανάγκη εκτέλεσης επιπλέον επαναληπτικών επιλύσεων για την επίτευξη της σύγκλισης (επιβράδυνση της επίλυσης).

Η αγνόηση του προαναφερόμενου όρου δεν είναι απόλυτα συνεπής. Οι Van Doormal et al. (1984) πρότειναν την απάλειψη αυτού και από τα 2 μέλη της εξίσωσης (9), οπότε η τελευταία γράφεται:

$$(a_P - \sum_{i=nb\varsigma} a_i u'_i) u'_P = A_w (P'_W - P'_P) \quad (14)$$

Ο νέος αλγόριθμος, γνωστός ως SIMPLEX (SIMPLE-Consistent) βελτιώνει τον SIMPLE ως προς το ότι η εξίσωση διόρθωσης πίεσης είναι ομαλότερη και δεν εμφανίζει μεγάλες μεταβολές μεταξύ των επαναλήψεων, συνεπώς δεν απαιτεί υποχαλάρωση η επίλυση της εξίσωσης συνέχειας. Η υποχαλάρωση στις εξισώσεις ορμής πλέον μπορεί να γίνεται με μεγαλύτερους συντελεστές συνεπώς επιτυγχάνεται ταχύτερη σύγκλιση.



Υποχαλάρωση και σύγκλιση

Λόγω της μη απόλυτης συνέπειας των αλγορίθμων σύζευξης ταχύτητας-πίεσης, η επαναληπτική διαδικασία απαιτεί υποχαλάρωση. Υποχαλάρωση σημαίνει ότι για το επόμενο βήμα της επαναληπτικής επίλυσης χρησιμοποιείται ένα ποσοστό της λύσης (ταχύτητα ή πίεση) της προηγούμενης επανάληψης ώστε να αποφεύγονται οι μεγάλες μεταβολές, και ενδεχόμενο απόκλισης, από την μία επανάληψη στην επόμενη. Δηλ. στον επόμενο κύκλο λύσης, η νέα εκτίμηση της μεταβλητής θα είναι:

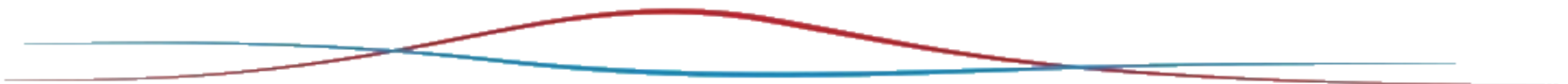
$$u_{new} = (1 - a)u_{old} + a * u_{calculated}$$

$$P_{new} = (1 - a)P_{old} + a * P_{calculated}$$

Όπου a είναι ο συντελεστής υποχαλάρωσης, $0 < a < 1$.

Η αντικατάσταση των υποχαλαρωμένων πεδίων ταχύτητας και πίεσης στις διακριτοποιημένες εξισώσεις ορμής δεν αναμένεται να ικανοποιούν τις εξισώσεις (εκτός αν κατά τύχη η αρχική εκτίμηση είναι η σωστή). Σε κάθε επανάληψη της επίλυσης των εξισώσεων, επιλύεται το **υπόλοιπο (residual)** της εξαρτημένης μεταβλητής, λεκτικά:

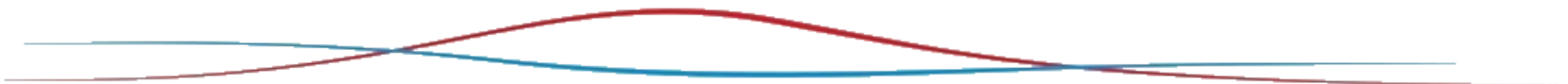
Υπόλοιπο = Αριστερό μέλος – Δεξιό μέλος της εξίσωσης μεταφοράς.





Υποχαλάρωση και σύγκλιση

Αν η επαναληπτική διαδικασία είναι συγκλίνουσα, τότε το Υπόλοιπο θα πρέπει να μειώνεται από επανάληψη σε επανάληψη, ώστε να φανερώνει μία βελτιούμενη ισορροπία μεταξύ των υπολογιζόμενων πεδίων των μεταβλητών. Ιδανικά, η επαναληπτική διαδικασία θα διακοπεί μόνο όταν το Υπόλοιπο προκύψει απόλυτο 0! Στην πράξη όμως, η πεπερασμένη ακρίβεια του αριθμητικού μοντέλου στον Η/Υ δεν επιτρέπει κάτι τέτοιο, ενώ ακόμη και να ήταν εφικτό τότε θα απαιτούνταν πολύ μεγάλος υπολογιστικός χρόνος. Για πρακτικούς σκοπούς, αρκεί να διακόπτεται η επαναληπτική διαδικασία όταν επιτυγχάνεται ικανοποιητική προσέγγιση της ζητούμενης ισορροπίας, δηλ. όταν $\text{Residual} \approx 0$. Για παράδειγμα, η λύση μπορεί να θεωρηθεί αποδεκτή όταν π.χ. $\text{Residual} = 10^{-5}$.





Επίλυση του θερμοροϊκού πεδίου

Στη γενική περίπτωση που η ροή δεν είναι ισοθερμοκρασιακή, στους όρους πηγής της εξίσωσης διατήρησης της ορμής συμπεριλαμβάνεται και ο όρος άνωσης (με απλά λόγια η δύναμη που ωθεί την κίνηση των θερμών στρωμάτων ρευστού προς τα πάνω). Ο όρος άνωσης ορίζεται ως εξής:

$$G_B = -\beta g_i$$

Όπου β είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής (σε K^{-1}):

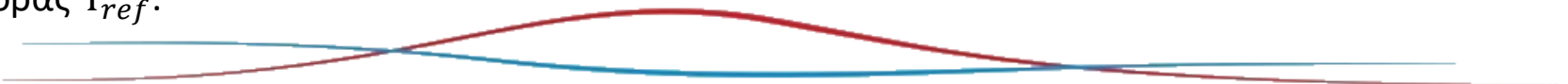
$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$$

Δηλ. εισάγεται η πυκνότητα ως ένας επιπλέον άγνωστος στο πρόβλημα. Για την απλοποίηση της επίλυσης και συνεπώς την εξοικονόμηση υπολογιστικών πόρων, μπορεί να υιοθετηθεί η **προσέγγιση Boussinesq για τον χειρισμό του όρου άνωσης**:

Η διακριτοποίηση της εξίσωσης θερμικής διαστολής δίνει:

$-\beta \rho_{ref} \Delta T = \Delta \rho$, οπότε ο όρος άνωσης γράφεται:

$(\rho - \rho_{ref})g = -\rho_{ref}\beta(T - T_{ref})g$, όπου ρ_{ref} είναι η πυκνότητα του ρευστού στη θερμοκρασία αναφοράς T_{ref} .



Επίλυση του θερμοροϊκού πεδίου

$(\rho - \rho_{ref})g = -\rho_{ref}\beta(T - T_{ref})g$, όπου ρ_{ref} είναι η πυκνότητα του ρευστού στη θερμοκρασία αναφοράς T_{ref} . Από όπου προκύπτει:

$$\rho = \rho_{ref}(1 - \beta\Delta T)$$

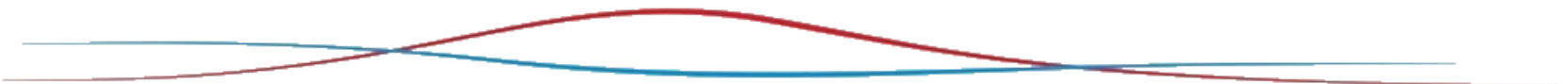
Από την παραπάνω εξίσωση είναι φανερό ότι **όταν $\beta(T - T_{ref}) \ll 1$ επιτυγχάνεται $\rho \approx \rho_{ref}$.**

Άρα, σε μη ισοθερμοκρασιακές ροές **η θερμική διαστολή μπορεί να λαμβάνεται ως:**

$$\beta = 1/T_{ref}$$

Δηλ. έχουμε σταθερό όρο άνωσης και η ροή μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστη.

Η προσέγγιση υιοθετείται πολύ ικανοποιητικά σε ροές ήπιων πηγών θερμότητας με χαμηλές αναμενόμενες θερμοκρασιακές διαφορές. **Όταν δεν ισχύει $\beta(T - T_{ref}) \ll 1$ τότε δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση Boussinesq, και η πυκνότητα μεταχειρίζεται ως μία επιπλέον μεταβλητή στο πρόβλημα επίλυσης δηλ. επιλύεται πρόβλημα συμπιεστής ροής.**





Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης

Η πολυπλοκότητα και το μέγεθος του συνόλου των εξισώσεων εξαρτάται από τις διαστάσεις του προβλήματος (μονοδιάστατο, διδιάστατο ή τρισδιάστατο), τον αριθμό των υπολογιστικών κόμβων του πλέγματος και την πρακτική της διακριτοποίησης. Αν και για την επίλυση του αλγεβρικού συστήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε έγκυρη διαδικασία, οι διαθέσιμοι υπολογιστικοί πόροι θέτουν περιορισμούς ως προς την ταχύτητα της επίλυσης. Οι βασικές κατηγορίες τεχνικών επίλυσης του συστήματος είναι:

- Άμεσες μέθοδοι.
- Έμμεσες ή επαναληπτικές μέθοδοι.

Ένα απλό παράδειγμα άμεσης μεθόδου είναι π.χ. η μέθοδος απαλοιφής του Gauss.

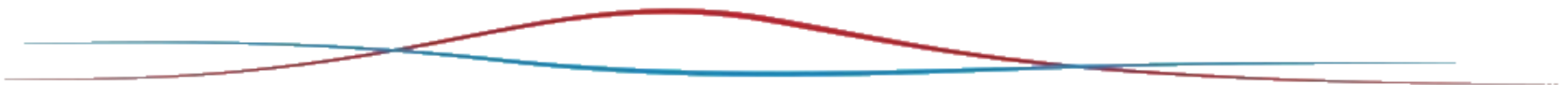
Ο αριθμός των πράξεων υπολογισμών κατά τη λύση ενός συστήματος N εξισώσεων με N αγνώστους μέσω μιας άμεσης μεθόδου είναι της τάξης του N^3 , με απαραίτητη την ταυτόχρονη αποθήκευση όλων των συντελεστών N^2 του συνόλου των εξισώσεων στη μνήμη του Η/Υ.

Από την άλλη μεριά, οι επαναληπτικές μέθοδοι βασίζονται στην επαναλαμβανόμενη εφαρμογή ενός απλού αλγόριθμου που συγκλίνει μετά από έναν αριθμό επαναλήψεων. Όμως, η σύγκλιση δεν είναι πάντα εγγυημένη εκτός αν το σύστημα ικανοποιεί κάποια, συχνά απαιτητικά, κριτήρια. **Το βασικό πλεονέκτημα των επαναληπτικών μεθόδων είναι ότι στη μνήμη του Η/Υ αποθηκεύονται μόνο οι μη μηδενικοί συντελεστές.**



Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης

Όπως είδαμε σε προηγούμενα προβλήματα, συχνά το σύστημα επίλυσης περιλαμβάνει πολλούς μηδενικούς συντελεστές. Πράγματι, η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων δίνει σύστημα εξισώσεων με πλειοψηφική συμμετοχή μηδενικών στοιχείων. Συνεπώς, **η ιδέα μη αναγκαιότητας της αποθήκευσης των μηδενικών συντελεστών στη μνήμη του Η/Υ μπορεί να εξοικονομήσει πολύ υπολογιστικό χρόνο έως την επίτευξη σύγκλισης**. Ειδικά σε προβλήματα CFD, που το περιεχόμενο των συστημάτων σε ρεαλιστικά προβλήματα μπορεί να είναι από 10^5 έως 10^6 εξισώσεις, οι επαναληπτικές μέθοδοι είναι γενικά πολύ πιο οικονομικές από τις άμεσες μεθόδους.



Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης

Διατύπωση του προβλήματος

Με χρήση του Η/Υ προσπαθούμε να λύσουμε ένα σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους της μορφής:

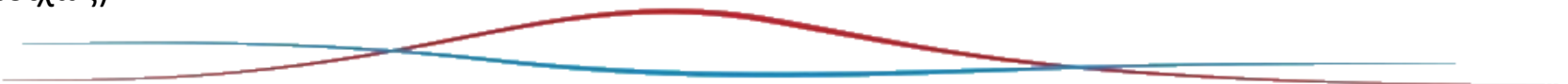
$$A \cdot \Phi = B \quad (15)$$

Όπου $A = a_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, N$) ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, $\Phi = \varphi_i$ ($i = 1, \dots, N$) ο πίνακας-στήλη των αγνώστων μεταβλητών και $B = b_i$ ($i = 1, \dots, N$) ο πίνακας-στήλη των σταθερών όρων.

Στην τεχνική CFD, τα συστήματα που εξετάζονται αφορούν στην μεταβλητή ϕ και το σύστημα που επιλύεται π.χ. σε διδιάστατο πρόβλημα είναι της παρακάτω μορφής:

$$AP_{i,j}\varphi_{i,j} = AE_{i,j}\varphi_{i+1,j} + AW_{i,j}\varphi_{i-1,j} + AN_{i,j}\varphi_{i,j+1} + AS_{i,j}\varphi_{i,j-1} + B_{i,j} \quad (16)$$

Η μορφή των συντελεστών εξαρτώνται από το επιλεγέν σχήμα διακριτοποίησης (π.χ. κεντρικών διαφορών, ανάντη ή υβριδικό σχήμα, ή άλλο ανώτερης τάξης). Συνολικά προκύπτουν $N=(NI-2) \cdot (NJ-2)$ (λόγω των γνωστών οριακών τιμών) εξισώσεις της μορφής (16), με αγνώστους τις τιμές της ϕ στα N εσωτερικά υπολογιστικά σημεία. (NI , NJ είναι τα υπολογιστικά σημεία στην x και στην y διεύθυνση, αντίστοιχως).



Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης

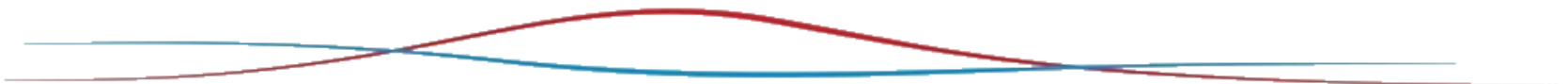
Διαγώνια υπεροχή

Όπως προαναφέρθηκε, οι επαναληπτικές μέθοδοι εκμεταλλεύονται την αραιή μορφή του Πίνακα των συντελεστών (πλειοψηφία μηδενικών συντελεστών) και εμφανίζουν ταχύτερη επίλυση σε σχέση με τις άμεσες μεθόδους. Εισάγεται όμως το πρόβλημα της ανάγκης σύγκλισης της διαδικασίας. Πρέπει να δίδεται ιδιαίτερη προσοχή στις συνθήκες υπό τις οποίες μπορεί να επιτευχθεί σύγκλιση. Μία ικανή (όχι όμως πάντα αναγκαία) συνθήκη σύγκλισης είναι η διαγώνια υπεροχή του πίνακα A των συντελεστών. Ένας πίνακας παρουσιάζει διαγώνια υπεροχή όταν η απόλυτη τιμή του κάθε στοιχείου της κυρίας διαγωνίου του Πίνακα είναι μεγαλύτερη ή ίση από το άθροισμα των απόλυτων τιμών όλων των άλλων στοιχείων της ίδιας γραμμής με την ανισότητα να ισχύει τουλάχιστον για ένα στοιχείο (βλ. συνθήκη ευστάθειας Scarborough), δηλ. όταν:

$$|AP_{i,j}| \geq |AE_{i,j}| + |AW_{i,j}| + |AN_{i,j}| + |AS_{i,j}| \quad (17)$$

Η παραπάνω ιδιότητα ικανοποιείται πάντα όταν:

- Όλοι οι συντελεστές της (16) έχουν θετική τιμή (όχι μόνο ομόσημοι).
- Ο συντελεστής $AP_{i,j}$ ισούται με το άθροισμα των συντελεστών των γειτόνων κόμβων.





Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης

Επίλυση Υπολοίπων (Residuals)

Το σύστημα εξισώσεων (15) μπορεί να αναδιαταχθεί ως ακολούθως:

$$(N+P)*\Phi=B$$

Δηλ. ο Πίνακας A των συντελεστών επιμερίζεται σε έναν πίνακα N (που διαφέρει λίγο από τον A κατά ένα Πίνακα ποσοτήτων P) ο οποίος παραγοντοποιείται εύκολα. Οπότε, το σύστημα εξισώσεων γράφεται:

$$N\Phi=-P\Phi+B \quad (18)$$

Σε κάθε επανάληψη k επιλύεται το παραπάνω σύστημα για τους αγνώστους του Πίνακα Φ του αριστερού σκέλους, ενώ στο δεξιό σκέλος χρησιμοποιούνται οι τιμές του Πίνακα Φ από την προηγούμενη επανάληψη k-1, σε κάθε επανάληψη είναι:

$$N\Phi^k = -P\Phi^{k-1} + B \quad (19)$$

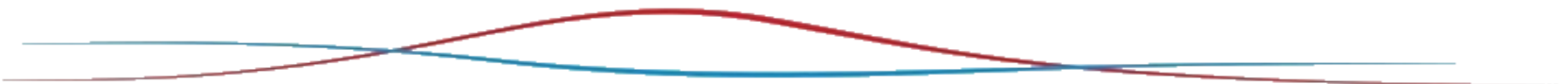
Η παραπάνω, με $P=A-N$ δίνει: $N(\Phi^k - \Phi^{k-1}) = B - A\Phi^{k-1}$, ή διαφορετικά:

$$N\Delta^k = -R^{k-1} \quad (20)$$

Όπου

$\Delta^k = \Phi^k - \Phi^{k-1}$ είναι ο Πίνακας των διορθώσεων στην k επανάληψη και

$R^{k-1} = -B + A\Phi^{k-1}$ είναι ο Πίνακας των υπολοίπων (Residuals) στην k-1 επανάληψη.



Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης

Επίλυση Υπολοίπων (Residuals)

Ο Πίνακας Υπολοίπων θα έχει στοιχεία:

$$r_{i,j}^{k-1} = AP_{i,j}\varphi_{i,j}^{k-1} - AE_{i,j}\varphi_{i+1,j}^{k-1} - AW_{i,j}\varphi_{i-1,j}^{k-1} - AN_{i,j}\varphi_{i,j+1}^{k-1} - AS_{i,j}\varphi_{i,j-1}^{k-1} - B_{i,j} \quad (21)$$

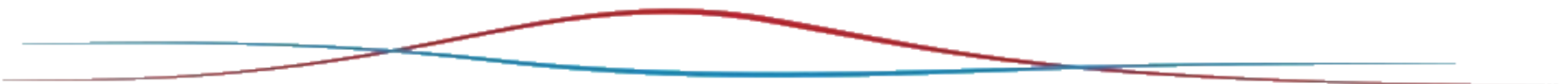
Πορεία επίλυσης:

1. Υπολογισμός του Πίνακα υπολοίπων R^{k-1}
2. Επίλυση του συστήματος (20) ως προς τον Πίνακα διορθώσεων Δ^k
3. Διόρθωση του Πίνακα Φ^k

Για την έναρξη των επαναλήψεων δίδεται μια αρχική λύση Φ^0 . Καθώς τρέχουν οι επαναλήψεις, θα πρέπει για να συμβεί σύγκλιση, τα υπόλοιπα να τείνουν στο μηδέν, δηλ. όταν

$$\sum_{i,j} |R_{i,j}^{k-1}| \leq \varepsilon, \text{ όπου } \varepsilon \text{ είναι ένα προκαθορισμένο κατώφλι σύγκλισης, π.χ. } 10^{-5},$$

Μπορεί να θεωρηθεί επίτευξη σύγκλισης.

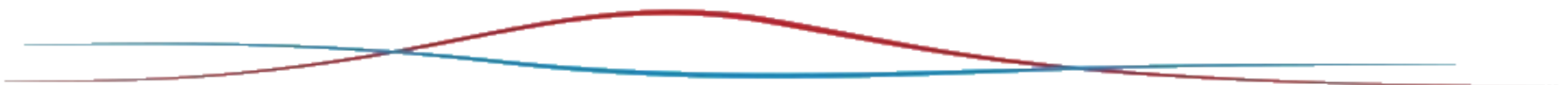




Μέθοδοι επίλυσης σημείο προς σημείο

Οι μέθοδοι επίλυσης σημείο προς σημείο είναι οι πιο απλές επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Εν γένει, διαφέρουν ως προς τον τρόπο με τον οποίο σχηματίζεται το δεξιό σκέλος της εξίσωσης.

Το αρχικό σύστημα αναδιατάσσεται κατά τρόπο ώστε στο αριστερό σκέλος της κάθε εξίσωσης να απομονώνεται ο άγνωστος. Με τον τρόπο αυτό, η επίλυση σε κάθε επανάληψη γίνεται με απλή αντικατάσταση.



Μέθοδοι επίλυσης σημείο προς σημείο

Μέθοδος Jacobi

Απομονώνεται ο άγνωστος στο αριστερό σκέλος, οπότε η (16) για την επανάληψη k δίνει:

$$\varphi_{i,j}^k = \frac{AE_{i,j}\varphi_{i+1,j}^{k-1} + AW_{i,j}\varphi_{i-1,j}^{k-1} + AN_{i,j}\varphi_{i,j+1}^{k-1} + AS_{i,j}\varphi_{i,j-1}^{k-1} + B_{i,j}}{AP_{i,j}} \quad (22)$$

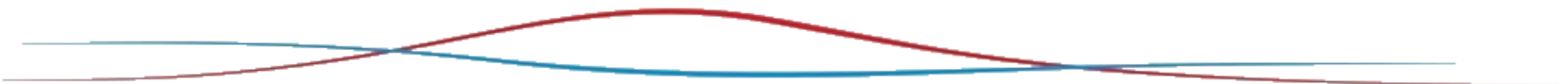
Σε μορφή υπολοίπων, η μέθοδος γράφεται:

$$\delta_{i,j}^k = -\frac{r_{i,j}^{k-1}}{AP_{i,j}} \quad (23)$$

Ο Πίνακας των συντελεστών επιμερίζεται στους Πίνακες:

$$N=D \text{ και } P=L+U$$

Όπου D είναι ο διαγώνιος Πίνακας του A και L, U είναι αντίστοιχα ο κάτω και ο άνω διαγώνιος Πίνακας με μηδενική διαγώνιο.



Μέθοδοι επίλυσης σημείο προς σημείο

Μέθοδος Gauss-Seidel

Αποτελεί προσπάθεια επιτάχυνσης της σύγκλισης της μεθόδου Jacobi. Τώρα, στο δεξιό σκέλος της εξίσωσης, αντί των τιμών της ϕ στην προηγούμενη επανάληψη ($k-1$) χρησιμοποιούνται οι τιμές της τρέχουσας επανάληψης (k) για τις μεταβλητές που έχουν ήδη επιλυθεί. Οπότε για ρητά σχήματα διακριτοποίησης, η (22) γίνεται:

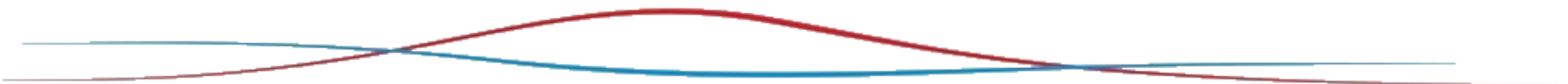
$$\phi_{i,j}^k = \frac{AE_{i,j}\phi_{i+1,j}^{k-1} + AW_{i,j}\phi_{i-1,j}^k + AN_{i,j}\phi_{i,j+1}^{k-1} + AS_{i,j}\phi_{i,j-1}^k + B_{i,j}}{AP_{i,j}} \quad (24)$$

Άρα, η εξίσωση υπολοίπου τώρα γίνεται:

$$\delta_{i,j}^k = \frac{AW_{i,j}\delta_{i-1,j}^k + AS_{i,j}\delta_{i,j-1}^k - r_{i,j}^{k-1}}{AP_{i,j}} \quad (25)$$

Ο Πίνακας των συντελεστών A επιμερίζεται τώρα στους Πίνακες:

$N=D+L$ και $P=U$





Μέθοδοι επίλυσης σημείο προς σημείο

Μέθοδος χαλάρωσης στην Jacobi

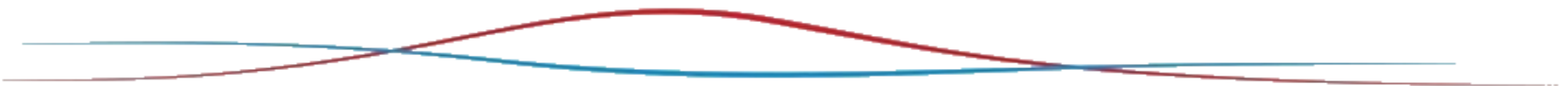
Ο ρυθμός σύγκλισης των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel εξαρτάται από τις ιδιότητες του Πίνακα επανάληψης. Αποδεικνύεται ότι αυτές μπορούν να βελτιωθούν με την εισαγωγή της ονομαζόμενης παραμέτρου χαλάρωσης, α .

Για παράδειγμα, στη μέθοδο Jacobi, η ακολουθία των επαναλήψεων μπορεί να γραφτεί:

$$\delta_{i,j}^k = -\alpha \frac{r_{i,j}^{k-1}}{AP_{i,j}}$$

Η εισαγωγή της παραμέτρου χαλάρωσης δεν επηρεάζει την συγκλίνουσα λύση, αφού όλα τα υπόλοιπα μετά από άπειρες επαναλήψεις θα είναι μηδέν. Δηλ. η παράμετρος χαλάρωσης μεταβάλλει την πορεία επίλυσης χωρίς τροποποίηση της τελικής λύσης. Αυτό σημαίνει ότι η μέθοδος χαλάρωσης μπορεί να πλεονεκτεί αν επιλεγεί η βέλτιστη τιμή χαλάρωσης τέτοια ώστε να ελαχιστοποιείται ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτούνται για την επίτευξη της σύγκλισης.

Αποδεικνύεται ότι η εφαρμογή στη μέθοδο Jacobi δεν έχει ιδιαίτερη επίπτωση και σε πολλά προβλήματα $\alpha=1$ αρκεί για την επίτευξη σύγκλισης σε αποδεκτό χρόνο.





Μέθοδοι επίλυσης σημείο προς σημείο

Μέθοδος χαλάρωσης στην Gauss-Seidel

Στη μέθοδο Gauss-Seidel, η ακολουθία των επαναλήψεων μετά την εφαρμογή του συντελεστή χαλάρωσης τελικά εκφράζεται με όρους τιμών της ϕ στην τρέχουσα επανάληψη να ισούνται με τον σταθμισμένο όρο των τιμών στην προηγούμενη επανάληψη και των τιμών που δίνει η ίδια η Gauss-Seidel, δηλ.:

$$\phi_{i,j}^k = \alpha \frac{AE_{i,j}\phi_{i+1,j}^{k-1} + AW_{i,j}\phi_{i-1,j}^k + AN_{i,j}\phi_{i,j+1}^{k-1} + AS_{i,j}\phi_{i,j-1}^k + B_{i,j}}{AP_{i,j}} + (1 - \alpha)\phi_{i,j}^{k-1}$$

Σε μορφή υπολοίπων η μέθοδος χαλάρωσης στην Gauss-Seidel δίνει:

$$\delta_{i,j}^k = \alpha \frac{AW_{i,j}\delta_{i-1,j}^k + AS_{i,j}\delta_{i,j-1}^k - r_{i,j}^{k-1}}{AP_{i,j}}$$

Και ο Πίνακας συντελεστών είναι:

$A=N+P$, όπου $N=D/\alpha+L$ και $P=(\alpha-1)D/\alpha+U$

Όταν $\alpha > 1$ Υπερχαλάρωση. Όταν $0 < \alpha < 1$ Υποχαλάρωση.

Στην Gauss-Seidel είναι δυνατή η επιλογή τιμής του α που δίνει καλύτερο ρυθμό σύγκλισης σε σχέση με τη βασική μέθοδο.

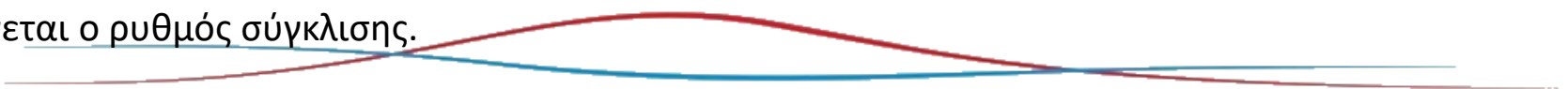


Μέθοδοι επίλυσης γραμμή προς γραμμή

Η μέθοδος στηρίζεται στην αναδιάταξη των αλγεβρικών εξισώσεων του συστήματος κατά τρόπο ώστε να είναι δυνατή η ταυτόχρονη επίλυσή τους κατά μήκος μίας κατακόρυφης ή οριζόντιας γραμμής υπολογιστικών σημείων. Για να γίνει αυτό, οι όροι που περιέχουν τις τιμές της ϕ στα σημεία έξω από τη γραμμή επίλυσης μεταφέρονται στο δεξιό σκέλος των εξισώσεων.

Έτσι, το αρχικό σύστημα μετατρέπεται σε ένα σύνολο τριδιαγώνιων συστημάτων το οποίο μπορεί να επιλυθεί επαναληπτικά. Σε κάθε επανάληψη γίνεται μία σάρωση όλων των κατακόρυφων γραμμών (γραμμών με σταθερό x) η οποία συνήθως ακολουθείται από μία σάρωση όλων των οριζόντιων γραμμών (γραμμών σταθερού y). Στη μορφή αυτή η μέθοδος ονομάζεται Alternating Direction Implicit, ADI) και προτιμάται από άλλες μεθόδους καθώς επιτρέπει την ταχύτερη διασπορά των οριακών συνθηκών σε όλο το πεδίο ροής.

Το πλεονέκτημα αυτών των μεθόδων είναι ότι βασίζονται στην επίλυση διαδοχικών υποσυνόλων ανά γραμμή του συστήματος των εξισώσεων, συνεπώς οι εκατέρωθεν της τρέχουσας γραμμής τιμές της ϕ θεωρούνται προσωρινά γνωστές (η ανάντη τιμή έχει ήδη υπολογιστεί από την επίλυση του υποσυνόλου εξισώσεων στην ανάντη γραμμή, ενώ η κατάντη τιμή λαμβάνει την τιμή της προηγούμενης επανάληψης (Gauss-Seidel)) και μεταφέρονται στο δεξιό μέλος της εξίσωσης. Έτσι, μειώνεται ο αριθμός των εξισώσεων που επιλύονται ανά σάρωση γραμμή-προς-γραμμή και συνεπώς αυξάνεται ο ρυθμός σύγκλισης.



Παρακολούθηση της επίλυσης

Η επίλυση σε Η/Υ παρακολουθείται μέσω της μέσης τιμής του υπολοίπου της εξεταζόμενης μεταβλητής στα πλεγματικά σημεία, δηλ. το μέσο υπόλοιπο (μέσος όρος για όλους του όγκους ελέγχου του υπολογιστικού πεδίου κατά την τρέχουσα επανάληψη). Το μέσο υπόλοιπο συχνά κανονικοποιείται, συνήθως ως προς την εκτίμηση στην πρώτη επανάληψη. Άρα, ο δείκτης παρακολούθησης της πορείας της λύσης είναι:

$$R_{norm}^k = \frac{\bar{r}^k}{\bar{r}^1}$$

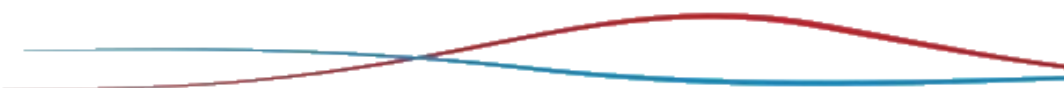
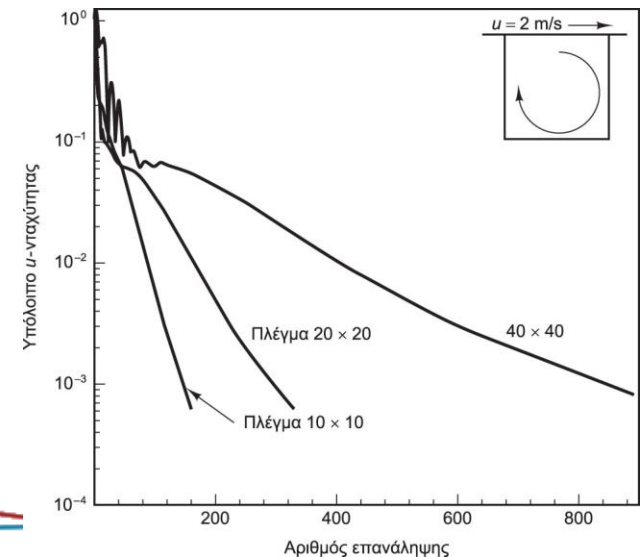
Όπου $\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{\xi=1}^n |r_{\xi}|$, με ξ =τρέχων υπολογιστικός κόμβος, n =πλήθος υπολογιστικών κόμβων του πλέγματος.

Στο διπλανό σχήμα παριστάται η πορεία λύσης

Για διάφορα πλέγματα.

Παρατηρείται η επιβράδυνση της λύσης με πύκνωση

Του πλέγματος λόγω αύξησης της αποθηκευτικής απαίτησης.



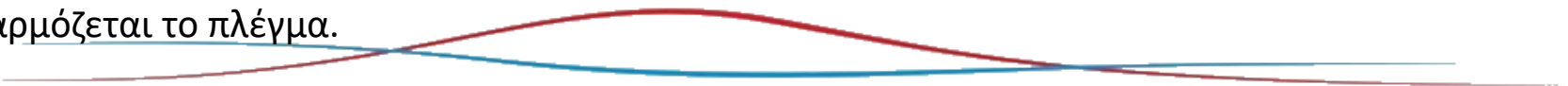


Χωρική διακριτοποίηση - Πλέγματα

Καρτεσιανό δομημένο πλέγμα

Το καρτεσιανό δομημένο πλέγμα ακολουθεί την I, J, K δομή σύμφωνα με την οποία κάθε υπολογιστικό κελί καθορίζεται από τις I, J, K συντεταγμένες του σε ορθοκανονικό σύστημα. Το πλέγμα αυτού του είδους απαρτίζεται από ορθογώνια παραλληλεπίπεδα (**εξάεδρα**) **κελιά**, των οποίων οι ακμές είναι διατεταγμένες παράλληλα στους άξονες του συστήματος συντεταγμένων. Για την γεφύρωση των φαινομένων μεταφοράς κοντά στις περιοχές οριακών συνθηκών με το κυρίως πεδίο ροής είναι εφικτή η **τοπική πύκνωση του πλέγματος**. Η διαδικασία αυτή οδηγεί σε **ανομοιόμορφο πλέγμα**, οπότε προκύπτουν κελιά διαφορετικού μεγέθους σε κάθε περιοχή του υπολογιστικού πεδίου.

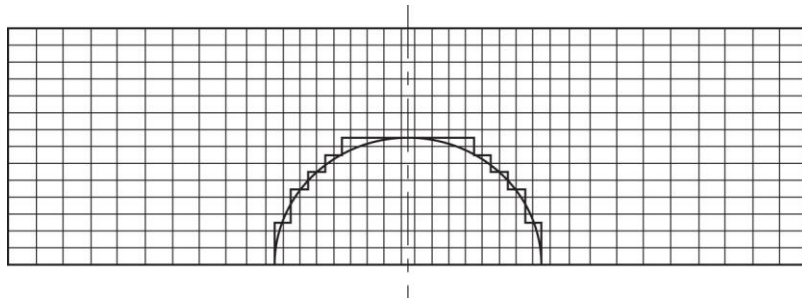
Ένα μειονέκτημα της τεχνικής αυτής είναι η αναπόφευκτη διάδοση του πυκνού πλέγματος κατά μήκος των πλεγματικών γραμμών προς περιοχές όπου δεν απαιτείται μεγάλο πλήθος κελιών, συνεπώς αυξάνεται ο υπολογιστικός φόρτος. Ένας τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος είναι σε πρώτη φάση η επίλυση με αραιό πλέγμα και στη συνέχεια η «εμφύτευση» πυκνού πλέγματος στις κρίσιμες περιοχές (embedded grid method). Ένα δεύτερο μειονέκτημα του καρτεσιανού δομημένου πλέγματος είναι η ανέφικτη προσαρμογή σε κεκλιμένες και καμπύλες επιφάνειες. Οι γεωμετρικές αυτές ανωμαλίες μπορούν να προσομοιωθούν με χρήση της μεθόδου «porosities» σύμφωνα με την οποία οι ανώμαλες επιφάνειες κλιμακώνονται με χρήση εμποδίων μηδενικού πορώδους ώστε να προσαρμόζεται το πλέγμα.



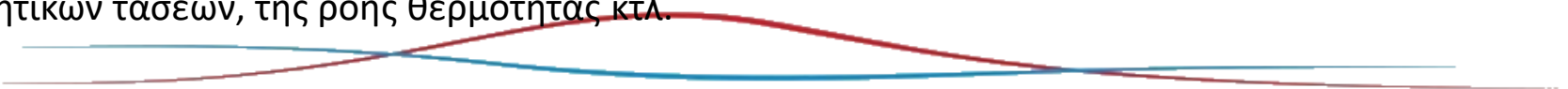
Χωρική διακριτοποίηση - Πλέγματα

Παράδειγμα της τεχνικής του πορώδους στο δομημένο πλέγμα

Πολλά προβλήματα ρευστομηχανικής εμπεριέχουν πολύπλοκη γεωμετρία που δεν προσαρμόζεται με ακρίβεια στις καρτεσιανές συντεταγμένες. Όταν το όριο της ροής δεν συμπίπτει με τις γραμμές των συντεταγμένων ενός δομημένου πλέγματος, μπορεί να γίνει μία προσέγγιση της γεωμετρίας με καρτεσιανές συντεταγμένες με συνακόλουθη πύκνωση του πλέγματος. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της συμμετρικής ροής γύρω από έναν κύλινδρο, το πεδίο ροής μπορεί σχετικά ικανοποιητικά να διακριτοποιηθεί ως ακολούθως:



Υιοθετείται μία βηματική προσέγγιση επιβολής διαδοχικών κατακόρυφων και οριζόντιων στερεών ορίων (ορίων μηδενικού πορώδους). Η προσπάθεια καλύτερης αναπαράστασης του πεδίου μπορεί να οδηγήσει σε πολύ πυκνό πλέγμα και συνεπώς, προκύπτει σπατάλη υπολογιστικών πόρων. Επίσης, η βηματική αναπαράσταση του λείου τοίχου ενέχει σημαντικά σφάλματα π.χ. στον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων, της ροής θερμότητας κτλ.

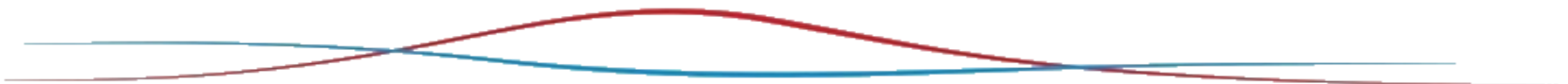


Χωρική διακριτοποίηση - Πλέγματα

Συνεπώς, οι μέθοδοι CFD που βασίζονται σε καρτεσιανά ή κυλινδρικά συστήματα συντεταγμένων εμφανίζουν περιορισμούς σε μη κανονικές γεωμετρίες, οι οποίες όμως συναντώνται σε πολλά προβλήματα σχεδιασμού (π.χ. κτίρια, ΜΕΚ, κλιβάνους, αντιδραστήρες, ανάγλυφα γης, κτλ.).

Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούν να αξιοποιηθούν τρεις κατηγορίες πλεγμάτων:

- Δομημένες καμπυλόγραμμες διατάξεις πλέγματος – Σωματόδετο πλέγμα (body-fitted grid): Βασίζεται στην προσαρμογή του πλέγματος επάνω σε καμπύλα λεία όρια. Αποδεικνύεται μη αποδοτικό σε πολύπλοκες γεωμετρίες.
- Μη δομημένο πλέγμα (unstructured grid): Τα υπολογιστικά κελιά είναι συνήθως τετράεδρα ώστε να παρέχουν ευελιξία στην προσαρμογή σε πολύπλοκες γεωμετρίες.
- Μεικτά πλέγματα: Ξεχωριστή διακριτοποίηση διαφορετικών τμημάτων του πεδίου ροής, όπου σε κάποια μπορεί να έχουμε δομημένο πλέγμα ενώ σε άλλα μη δομημένο πλέγμα, όμως διασυνδεδεμένα μεταξύ τους.



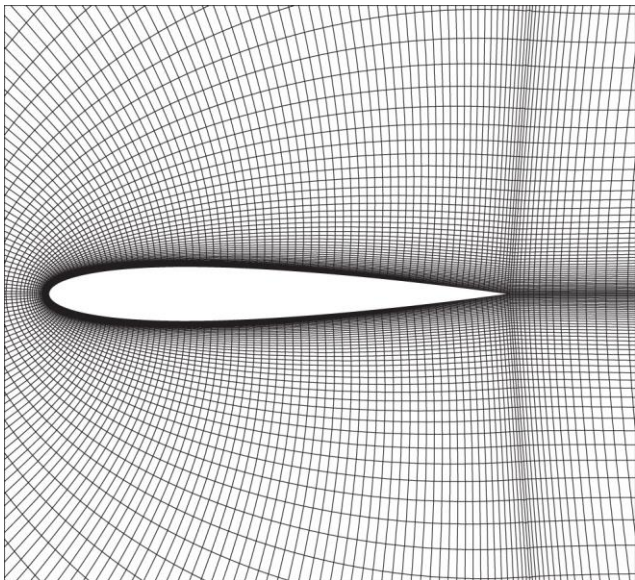
Χωρική διακριτοποίηση - Πλέγματα

Σωματόδετο πλέγμα

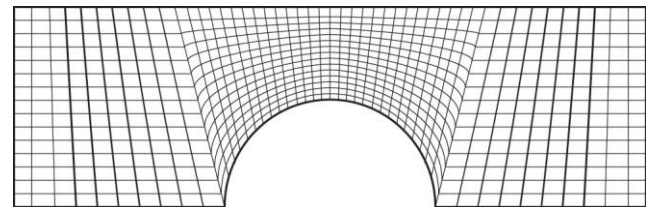
Συναντώνται δύο είδη συστημάτων συντεταγμένων:

1. Ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Οι ακμές των κελιών (πλεγματικές γραμμές) είναι μεταξύ τους κάθετες.
2. Μη ορθογώνιες συντεταγμένες. Οι πλεγματικές γραμμές δεν είναι μεταξύ τους κάθετες.

Ορθογωνικό σωματόδετο



Μη Ορθογωνικό σωματόδετο

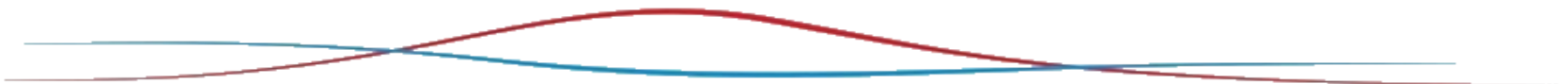




Χωρική διακριτοποίηση - Πλέγματα

Σωματόδετο πλέγμα

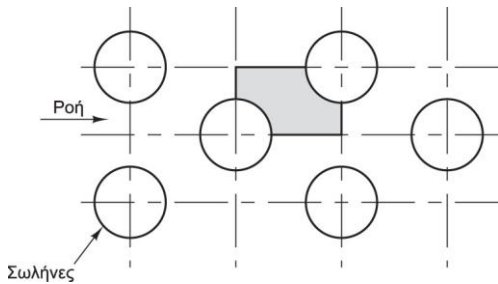
Και στους δύο τύπους πλεγμάτων όλα τα όρια συμπίπτουν με γραμμές συντεταγμένων, με αποτέλεσμα οι γεωμετρικές λεπτομέρειες να μπορούν να ενσωματώνονται με ακρίβεια χωρίς να υπάρχει ανάγκη για βηματικές προσεγγίσεις. Επιπλέον το πλέγμα μπορεί να πυκνωθεί εύκολα ώστε να συλλαμβάνει σημαντικά χαρακτηριστικά της ροής όπως π.χ. περιοχές με μεγάλες κλίσεις όπως είναι τα οριακά στρώματα κοντά στα στερεά όρια.



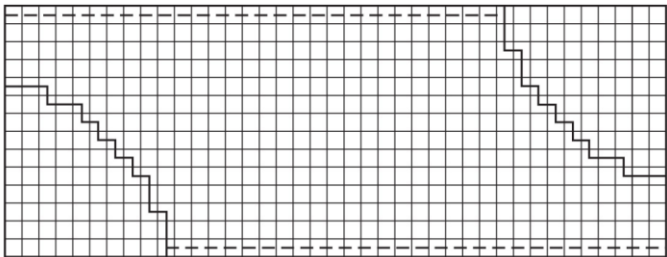
Χωρική διακριτοποίηση - Πλέγματα

Καρτεσιανό έναντι σωματόδετου πλέγματος

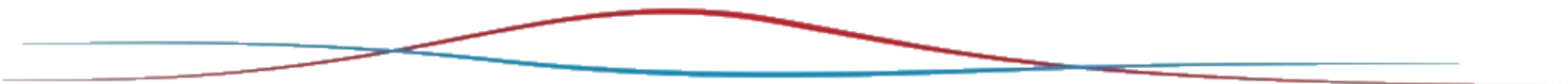
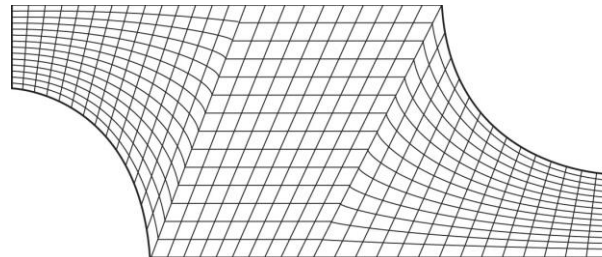
Το πρόβλημα - Ροή γύρω από διάταξη σωλήνων σε εναλλάκτη θερμότητας.



Καρτεσιανό πλέγμα (τεχνική πορώδους)



Σωματόδετο πλέγμα (προσαρμογή στη γεωμετρία)

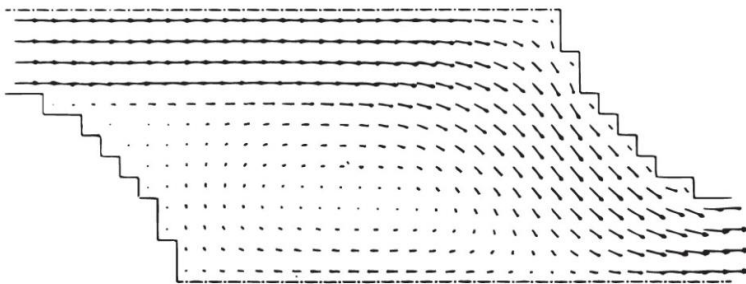


Χωρική διακριτοποίηση - Πλέγματα

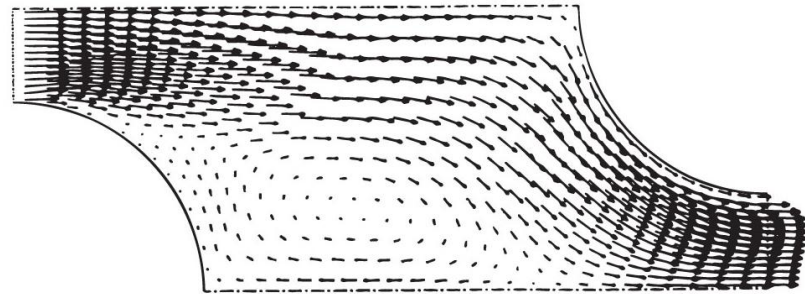
Καρτεσιανό έναντι σωματόδετου πλέγματος

Η λύση - Ροή γύρω από διάταξη σωλήνων σε εναλλάκτη θερμότητας.

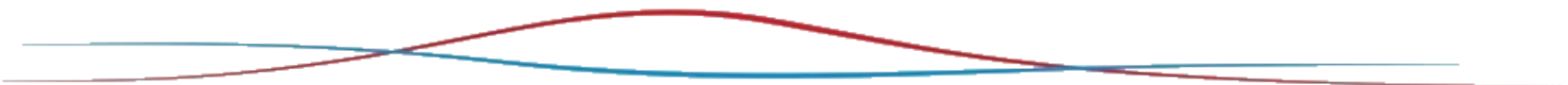
Καρτεσιανό πλέγμα (τεχνική πορώδους)



Σωματόδετο πλέγμα (προσαρμογή στη γεωμετρία)



Η λύση με το σωματόδετο πλέγμα φαίνεται ότι παρουσιάζει πολύ βελτιωμένη περιγραφή της ροής στις περιοχές με μεγάλη καμπυλότητα κοντά στην είσοδο και στην έξοδο. Επίσης, οι υπολογιστικοί πόροι αξιοποιούνται τώρα αποδοτικότερα, οπότε η αναγκαία λεπτομέρεια του πεδίου ροής μπορεί να παραχθεί με αραιότερο πλέγμα, άρα μικρότερο υπολογιστικό κόστος, σε σχέση με το καρτεσιανό δομημένο πλέγμα.

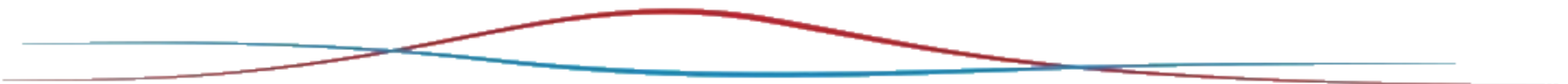


Χωρική διακριτοποίηση - Πλέγματα

Καρτεσιανό έναντι σωματόδετου πλέγματος

Μία δυσκολία των σωματόδετων πλεγμάτων είναι ότι οι διέπουσες εξισώσεις που επιλύονται είναι πολύ πιο πολύπλοκες σε σχέση με αυτές των καρτεσιανών πλεγμάτων. Η κύρια διαφορά από τα καρτεσιανά πλέγματα είναι ότι εφαρμόζονται συμπίπτοντα (collocated) συστήματα πλέγματος για τα διανυσματικά μεγέθη (βλ. 3^η διάλεξη τελευταία άσκηση με κεκλιμένη ροή όπου απαιτήθηκαν βοηθητικοί υπολογιστικοί κόμβοι), πράγμα που ενέχει πρόσθετες ταξινομήσεις αποθήκευσης. Για τα συμπίπτοντα (μη μετατοπισμένα) συστήματα απαιτούνται ειδικές διαδικασίες ώστε να διασφαλίζεται η σύζευξη πίεσης αλλά και να αποφεύγονται ταλαντώσεις της πίεσης.

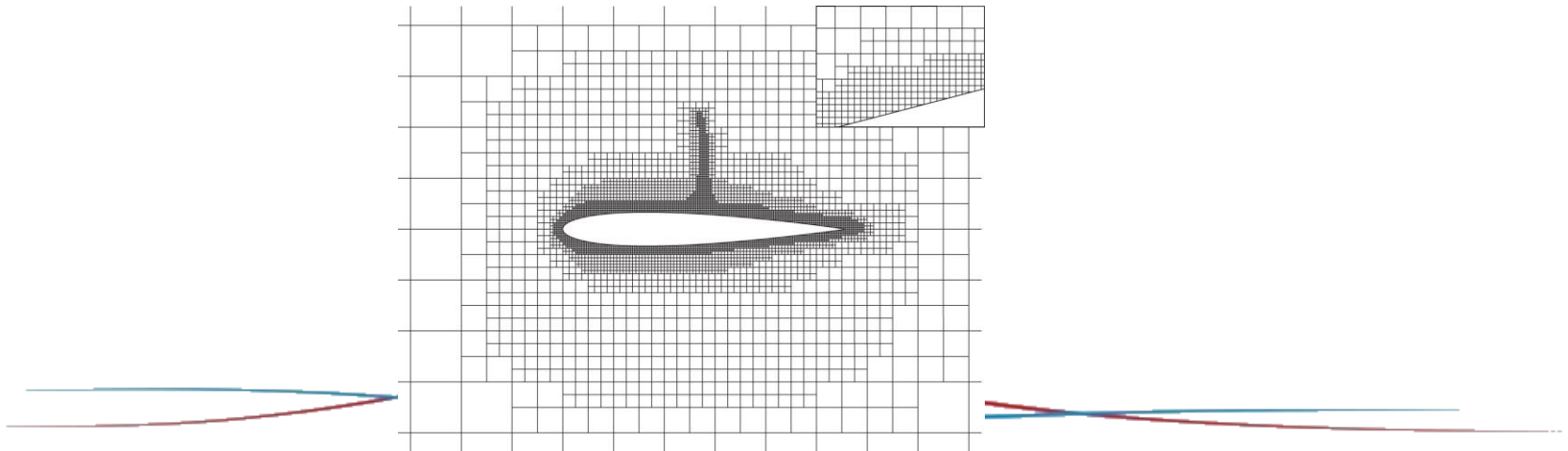
Παρά τη μεγαλύτερη πολυπλοκότητα, τα σωματόδετα εξακολουθούν να είναι δομημένα πλέγματα, οπότε η πύκνωση πάλι επεκτείνεται σε περιοχές που δεν απαιτείται. Από την άλλη μεριά, η γένεση του σωματόδετου πλέγματος είναι μερικές φορές δύσκολη και χρονοβόρα, ενώ ενδέχεται να προκύψουν στρεβλές πλεγματικές γραμμές που προκαλούν αφύσικες τοπικές μεταβολές. Σε πολύπλοκες τρισδιάστατες γεωμετρίες με εσωτερικά αντικείμενα η γένεση σωματόδετου πλέγματος είναι κάποιες φορές αδύνατη.



Χωρική διακριτοποίηση - Πλέγματα

Δομημένα πλέγματα στοιχείων (block-structured grids)

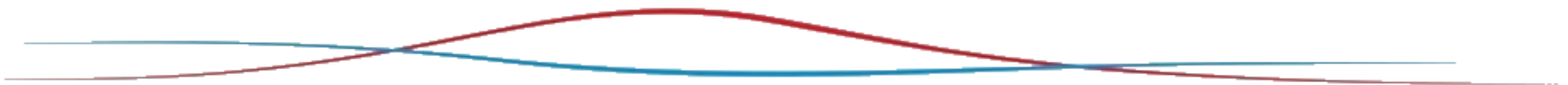
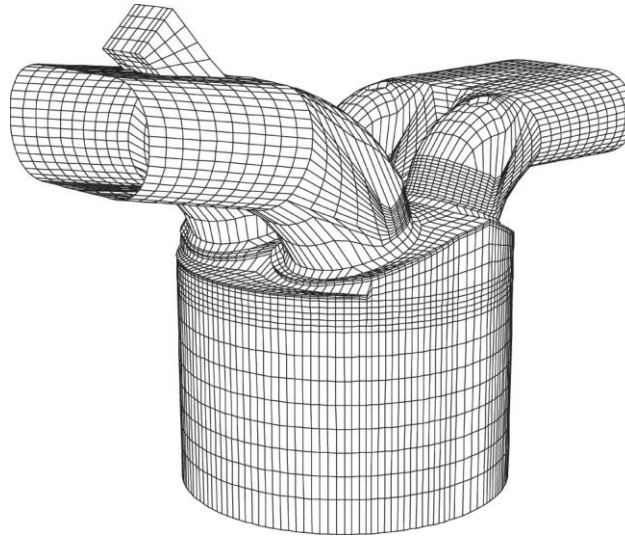
Το πεδίο ροής χωρίζεται σε επιμέρους περιοχές κάθε μία από τις οποίες διαθέτει ένα δομημένο πλέγμα. Η δομή του πλέγματος ανά περιοχή μπορεί να είναι διαφορετική ενώ είναι δυνατή η χρήση διαφορετικών συστημάτων συντεταγμένων. Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει την πύκνωση σε περιοχές που αναμένονται μεγάλες μεταβολές, χωρίς την προέκταση της πύκνωσης αλλού που δεν έχουμε μεγάλες μεταβολές. Οι διεπιφάνειες μεταξύ των γειτονικών περιοχών/στοιχείων μπορεί να έχουν πλέγματα που να συνδέονται ακριβώς (κόμβο με κόμβο) μεταξύ τους ή και όχι, και αντιμετωπίζονται κατά συντηρητικό τρόπο ώστε η ενοποίησή τους να προκύπτει με όρους οριακών συνθηκών που προέκυψαν από τις τελικές επαναλήψεις επίλυσης ξεχωριστά ανά περιοχή. Για παράδειγμα, το πρόβλημα αεροτομής μπορεί να λυθεί με το παρακάτω πλέγμα στοιχείων:



Χωρική διακριτοποίηση - Πλέγματα

Δομημένα πλέγματα στοιχείων (block-structured grids)

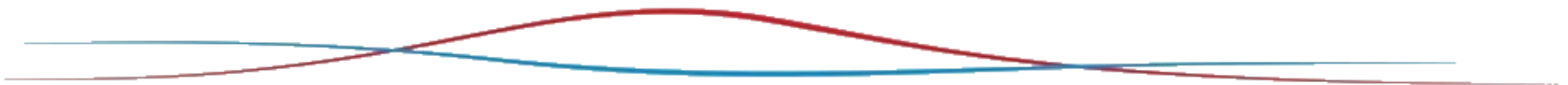
Αυτού του είδους τα πλέγματα είναι χρήσιμα στον χειρισμό πολύπλοκων γεωμετριών που περιέχουν γεωμετρικά υπο-στοιχεία π.χ. παρακάτω σε ένα πρόβλημα κινητήρα όπου μεταχειρίζονται ξεχωριστά οι περιοχές θυρίδα εισαγωγής, βαλβίδα και κύλινδρος.



Χωρική διακριτοποίηση - Πλέγματα

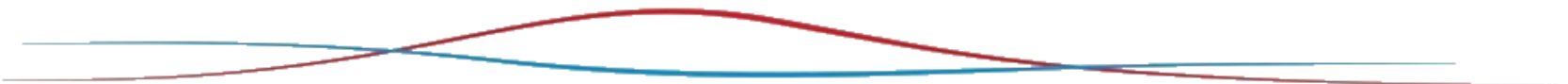
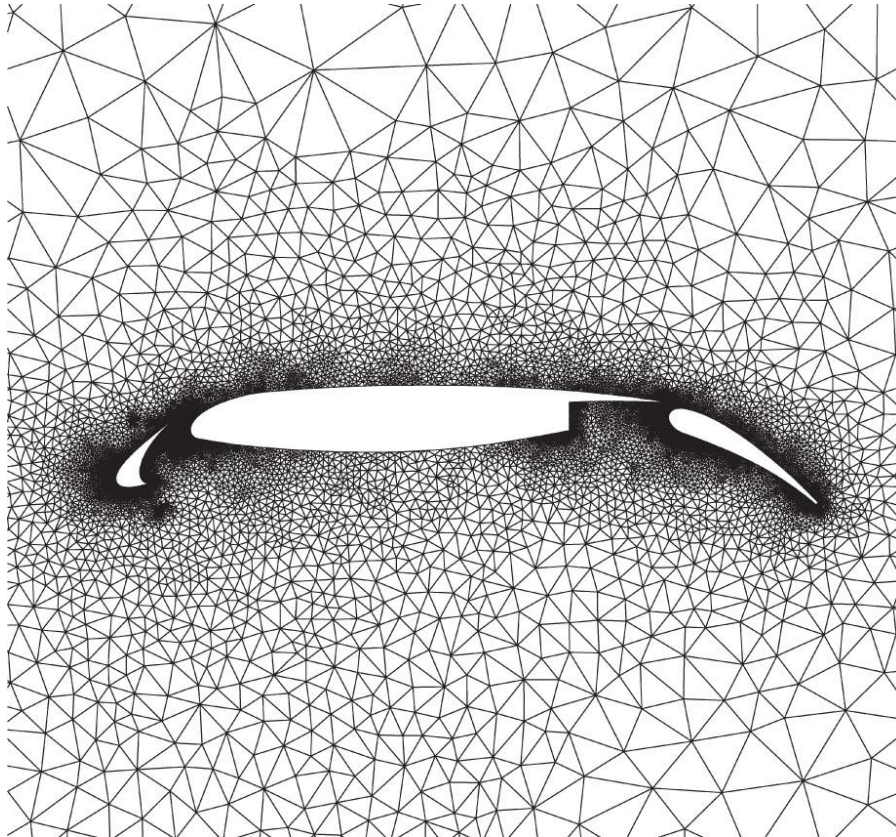
Μη δομημένα πλέγματα

Σε αντίθεση με το δομημένο πλέγμα που περιλαμβάνει τοπολογικά όμοια κελιά διατεταγμένα σε γραμμές και στήλες, το μη δομημένο πλέγμα εφαρμόζει κελιά διαφορετικής τοπολογίας, συνήθως τετράεδρα. Το σημαντικότερο πλεονέκτημα αυτού του τύπου πλέγματος είναι η μη διάδοση του πυκνού πλέγματος μακριά από κρίσιμες περιοχές, όπως συμβαίνει στο δομημένο πλέγμα, πράγμα που συμβάλλει στην μείωση του υπολογιστικού κόστους. Παρ' όλα αυτά, η κατάσταση αυτή αντισταθμίζεται από το γεγονός ότι λόγω της διαφορετικής τοπολογίας η υπολογιστική μνήμη διαχειρίζεται το πλήθος των κόμβων, τις φυσικές συντεταγμένες τους και τη διασύνδεσή τους, με αποτέλεσμα την σημαντική κατανάλωση μνήμης σε κάθε κελί καθώς και την πολυπλοκότητα γένεσης τέτοιων πλεγμάτων. Σήμερα, υπάρχουν εμπορικά υπολογιστικά εργαλεία γένεσης μη δομημένου πλέγματος με αυτοματοποιημένο τρόπο. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι η εφαρμογή ενός μη δομημένου πλέγματος είναι και η καλύτερη τεχνική για την προσομοίωση της ροής. Για παράδειγμα, έχει διαπιστωθεί ότι η λύση που προκύπτει από δομημένα πλέγματα είναι πιο ακριβής σε σχέση με αυτή που προκύπτει από μη δομημένα (τετράεδρα κελιά), τουλάχιστον όσον αφορά τη ροή αέρα γύρω από συμπαγή εμπόδια.



Χωρική διακριτοποίηση - Πλέγματα

Μη δομημένα πλέγματα



Χωρική διακριτοποίηση - Πλέγματα

Μη δομημένα πλέγματα

Σε υπολογισμούς τρισδιάστατων ροών, συχνά υιοθετούνται μεικτά πλέγματα, παρομοίως της τεχνικής block-structured, όπου μία περιοχή μεταχειρίζεται με δομημένο και μία άλλη με μη δομημένο πλέγμα, στο πλαίσιο αξιοποίησης των πλεονεκτημάτων της κάθε μεθόδου ως προς την ακρίβεια και την ταχύτητα επίλυσης. Για παράδειγμα, το παρακάτω 2D πρόβλημα διάταξης σωληνώσεων όπου χρησιμοποιούνται τετράπλευρα κελιά (δομημένο σωματόδετο) κοντά στα στερεά τοιχώματα, προκειμένου να παρέχεται καλύτερη ανάλυση των επιδράσεων των ιξωδών δυνάμεων οριακού στρώματος, και τρίγωνα κελιά στις απομακρυσμένες περιοχές για εξοικονόμηση υπολογιστικών πόρων.

