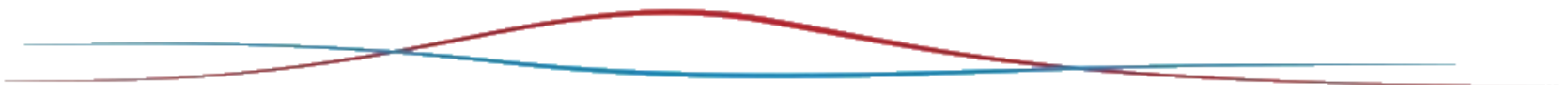




Μέθοδος των πεπερασμένων όγκων ελέγχου σε μη μόνιμες ροές

*Υπολογιστική Ρευστομηχανική
Ενεργειακή Κατεύθυνση
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών*

Γεώργιος Μιχ. Σταυρακάκης
Επίκουρος Καθηγητής





Εισαγωγή

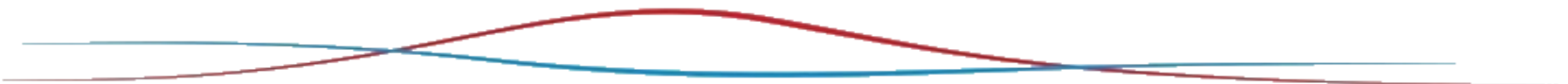
Ισχύει η γενική εξίσωση μεταφοράς:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{u}\varphi - \Gamma \text{grad } \varphi) = S_\varphi$$

Σε μεταβατικές ροές, ο πρώτος όρος (μεταβατικός όρος) του αριστερού σκέλους της γενικής κυβερνούσας εξίσωσης δεν είναι μηδέν. Έτσι, κατά την επίλυση ο μεταβατικός όρος θα πρέπει να διατηρηθεί στη διαδικασία της διακριτοποίησης.

Στη μέθοδο πεπερασμένων όγκων ελέγχου, η ολοκλήρωση για έναν όγκο ελέγχου CV λαμβάνει υπόψη μία πρόσθετη ολοκλήρωση σε ένα πεπερασμένο χρονικό βήμα Δt . Η ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης σε μη μόνιμη κατάσταση θα είναι:

$$\int_{CV} \left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} dt \right) dV + \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_A \vec{n} * (\rho\vec{u}\varphi) dA \right) dt = \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_A \vec{n} * (\Gamma \text{grad } \varphi) dA \right) dt +$$
$$+ \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} S_\varphi dV dt$$

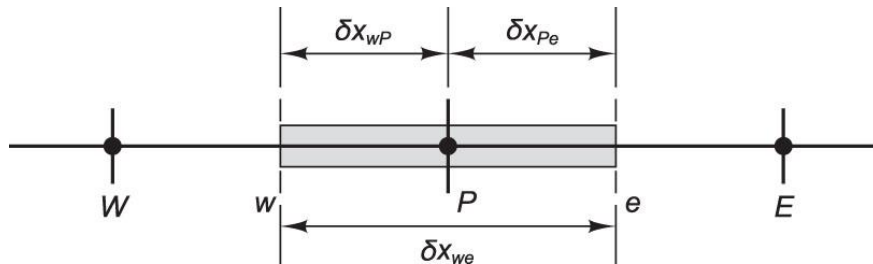


Διακριτοποίηση μεταβατικής μονοδιάστατης διάχυσης

Κυβερνούσα εξίσωση:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S$$

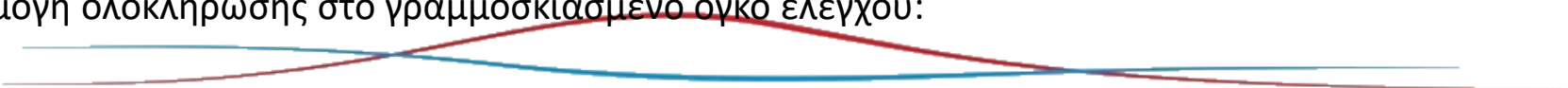
Γεωμετρία χωρικής διακριτοποίησης



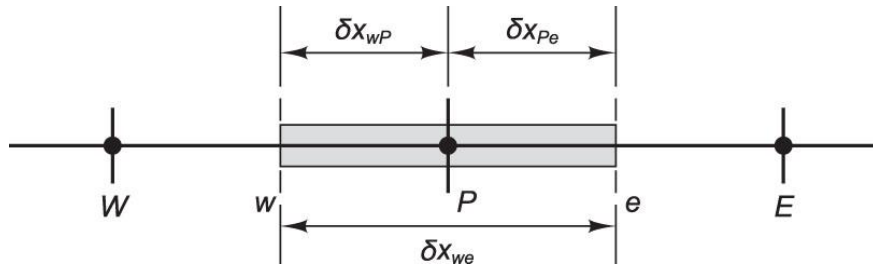
Ολοκληρωτική μορφή της κυβερνούσας εξίσωσης:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\int_{CV} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dV \right) dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} S dV dt$$

Εφαρμογή ολοκλήρωσης στο γραμμοσκιασμένο όγκο ελέγχου:



Διακριτοποίηση μεταβατικής μονοδιάστατης διάχυσης



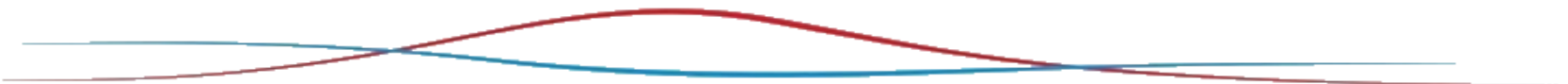
Εφαρμογή ολοκλήρωσης στο γραμμοσκιασμένο όγκο ελέγχου:

$$\int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dt dV = \int_t^{t+\Delta t} \left(\Gamma_e A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma_w A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt$$

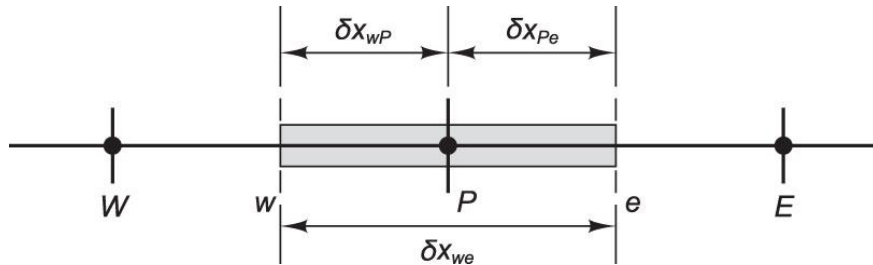
Διακριτοποίηση (όπου άνω δείκτης «ο» συμβολίζει το χρονικό βήμα t):

$$\rho(\phi_P - \phi_P^o) \Delta V = \int_t^{t+\Delta t} \left(\Gamma_e A \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} - \Gamma_w A \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) dt + \bar{S} \Delta V * \Delta t \quad (\text{όπου } \Delta V = A * \Delta x) \Leftrightarrow$$

$$\rho \frac{(\phi_P - \phi_P^o)}{\Delta t} \Delta x = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left(\Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) dt + \bar{S} \Delta x$$



Διακριτοποίηση μεταβατικής μονοδιάστατης διάχυσης

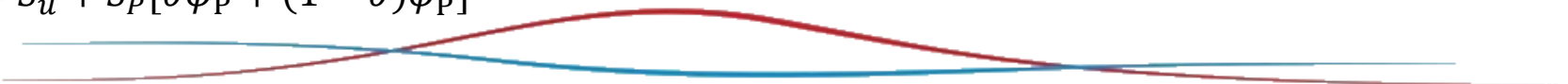


Η χρονική διακριτοποίηση του όρου διάχυσης βασίζεται στην πρακτική της σταθμισμένης τιμής της μεταφερόμενης ποσότητας στο χρονικό βήμα t και $t+\Delta t$, έτσι που σε κάθε χρονικό βήμα η τιμή της ϕ να είναι μία σταθμισμένη ενδιάμεση τιμή μεταξύ 2 διαδοχικών χρονικών βημάτων (το είδαμε στο πεπλεγμένο σχήμα των πεπερασμένων διαφορών). Λαμβάνοντας έναν όρο στάθμισης θ , η διακριτοποιημένη μορφή της διέπουσας εξίσωσης γίνεται:

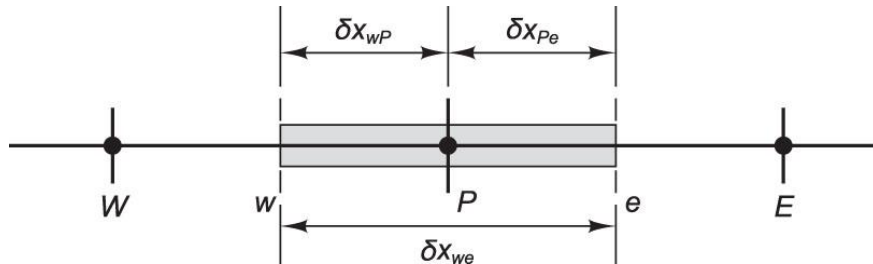
$$\rho \frac{(\phi_P - \phi_P^o)}{\Delta t} \Delta x = \theta \left(\Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) + (1 - \theta) \left(\Gamma_e \frac{\phi_E^o - \phi_P^o}{\Delta x_{PE}} - \Gamma_w \frac{\phi_P^o - \phi_W^o}{\Delta x_{WP}} \right) + \bar{S} \Delta x$$

Με βάση τη γνωστή τεχνική γραμμικοποίησης του όρου πηγής (τελευταίος όρος του 2^{ου} σκέλους της παραπάνω εξίσωσης), η χρονική διακριτοποίησή του δίνει:

$$\bar{S} \Delta x = S_u + S_P [\theta \phi_P + (1 - \theta) \phi_P^o]$$



Διακριτοποίηση μεταβατικής μονοδιάστατης διάχυσης



Έτσι, η τελική γενική μορφή της χωρο-χρονικά διακριτοποιημένης εξίσωσης της μεταβατικής μονοδιάστατης διάχυσης (συμπεριλαμβανομένων των ψευδοπηγών οριακών συνθηκών) θα είναι:

$$\alpha_P \phi_P = \alpha_W [\theta \phi_W + (1 - \theta) \phi_W^o] + \alpha_E [\theta \phi_E + (1 - \theta) \phi_E^o] + [a_P^o - (1 - \theta)(\alpha_E + \alpha_W - S_P - S_{P,BC})] \phi_P^o + S_u + S_{u,BC} \quad (I)$$

Όπου:

$$\alpha_P = \alpha_P^o + \theta(\alpha_E + \alpha_W - S_P - S_{P,BC})$$

$$\alpha_P^o = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t}, \alpha_W = \Gamma_w / \Delta x_{WP}, \alpha_E = \Gamma_e / \Delta x_{PE}$$

Οι συνήθεις μέθοδοι εξειδικεύονται ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου στάθμισης, θ .

Οι ειδικές περιπτώσεις πηγής και ψευδοπηγών στα όρια του πεδίου ροής ($S_{P,BC}$ και $S_{u,BC}$) μεταχειρίζονται όπως έχει ~~δειχθεί~~ σε προηγούμενη ενότητα ανάλογα με τον τύπο της οριακής συνθήκης.



Διακριτοποίηση μεταβατικής μονοδιάστατης διάχυσης

Ρητή μέθοδος (explicit)

$\theta=0$

Η εξίσωση (I) γράφεται (για ενδιάμεσους κόμβους):

$$\alpha_P \varphi_P = \alpha_W \varphi_W^o + \alpha_E \varphi_E^o + [a_P^o - (\alpha_E + \alpha_W - S_P - S_{P,BC})] \varphi_P^o + S_u + S_{u,BC} \quad (II)$$

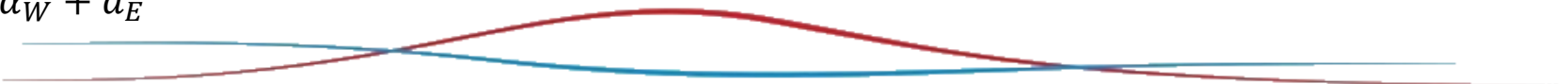
Όπου

$$\alpha_P = \alpha_P^o = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t}, \alpha_W = \Gamma_w / \Delta x_{WP}, \alpha_E = \Gamma_e / \Delta x_{PE}$$

Το δεξιό σκέλος της εξ.(II) περιέχει τιμές μόνο στο προηγούμενο χρονικό βήμα (όπως έχει αναφερθεί και στις πεπερασμένες διαφορές στο ρητό σχήμα η ροή πληροφορίας είναι ευθεία από το προηγούμενο προς το τρέχων χρονικό βήμα). Όπως έχει δειχθεί στο κεφάλαιο των πεπερασμένων διαφορών, το ρητό σχήμα είναι 1^{ης} τάξης ακρίβειας στο χρόνο.

Ευστάθεια: Διασφαλίζεται όταν οι συντελεστές της διακριτοποιημένης εξίσωσης είναι θετικοί. Δηλ. όταν:

$$\alpha_P^o > \alpha_W + \alpha_E$$





Διακριτοποίηση μεταβατικής μονοδιάστατης διάχυσης

Ρητή μέθοδος (explicit)

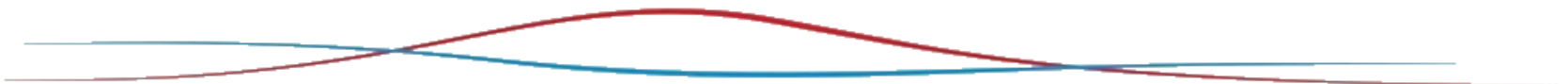
$$\theta=0$$

$$\alpha_P^o > \alpha_W + \alpha_E$$

Στην ειδική περίπτωση ομοιόμορφης χωρικής διακριτοποίησης όπου $\Delta x = \Delta x_{WP} = \Delta x_{PE}$ και ο συντελεστής διάχυσης είναι παντού ίδιος στο πεδίο ροής, η παραπάνω ανισότητα δίνει:

$$\rho \frac{\Delta x}{\Delta t} > \frac{2\Gamma}{\Delta x} \Rightarrow \Delta t < \rho \frac{\Delta x^2}{2\Gamma}$$

Η παραπάνω αποτελεί **συνθήκη ευστάθειας του ρητού σχήματος**. Άρα, κατά την υπολογιστική επίλυση με την ρητή μέθοδο θα πρέπει το χρονικό βήμα διακριτοποίησης να ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη. Είναι φανερό ότι η μέθοδος απαιτεί υψηλό υπολογιστικό χρόνο αφού το χρονικό βήμα θα πρέπει να είναι μικρότερο του τετραγώνου του χωρικού βήματος. Παρόλαυτά, με την προϋπόθεση ότι το χρονικό βήμα επιλέγεται ώστε να ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη η ρητή μέθοδος είναι επαρκής για απλούς υπολογισμούς διάχυσης π.χ. επίλυση της αγωγής θερμότητας.





Διακριτοποίηση μεταβατικής μονοδιάστατης διάχυσης

Μέθοδος Crank-Nicolson

$$\theta=1/2$$

Έχει ήδη αναφερθεί και στις πεπερασμένες διαφορές.

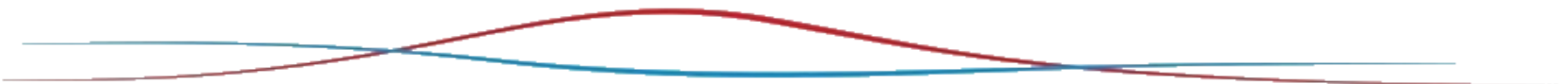
Η εξίσωση (I) γράφεται (για ενδιάμεσους κόμβους):

$$\alpha_P \varphi_P = \alpha_W \frac{\varphi_W + \varphi_W^o}{2} + \alpha_E \frac{\varphi_E + \varphi_E^o}{2} + \left[\alpha_P^o - \frac{1}{2} (\alpha_E + \alpha_W - S_P - S_{P,BC}) \right] \varphi_P^o + S_u + S_{u,BC} \quad (III)$$

Όπου

$$\alpha_P = \alpha_P^o + \frac{1}{2} (\alpha_E + \alpha_W - S_P - S_{P,BC}), \alpha_P^o = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t}, \alpha_W = \Gamma_w / \Delta x_{WP}, \alpha_E = \Gamma_e / \Delta x_{PE}$$

Καθώς στην εξ. (III) ο υπολογισμός βασίζεται και στο προηγούμενο και στο τρέχων χρονικό βήμα, η μέθοδος είναι πεπλεγμένη (άρρητη, implicit) και τα συστήματα εξισώσεων σε όλους τους κόμβους θα πρέπει να επιλύονται σε κάθε χρονικό βήμα.





Διακριτοποίηση μεταβατικής μονοδιάστατης διάχυσης

Μέθοδος Crank-Nicolson

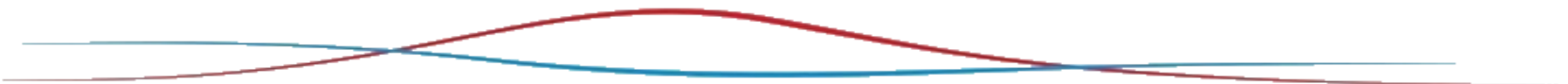
$$\theta=1/2$$

Ευστάθεια: Παρόλο που όλες οι πεπλεγμένες μέθοδοι με $0.5 \leq \theta \leq 1$ είναι ευσταθείς άνευ όρων είναι σημαντικό να διασφαλιστεί και ότι όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί για φραγμένα αποτελέσματα με φυσικό νόημα (βλ. κριτήριο Scarborough). Δηλ. θα πρέπει να ισχύει (συνθήκη φυσικής σημασίας):

$\alpha_P^o > (\alpha_W + \alpha_E)/2 \Rightarrow \Delta t < \rho \frac{\Delta x^2}{\Gamma}$ (Στην ειδική περίπτωση όπου $\Delta x = \Delta x_{WP} = \Delta x_{PE}$ και ο συντελεστής διάχυσης είναι παντού ίδιος στο πεδίο ροής)

Όπως και στη ρητή μέθοδο, το παραπάνω κριτήριο είναι πάλι αρκετά απαιτητικό ως προς την χρονική διακριτοποίηση, όχι όμως τόσο απόλυτο όσο της ρητής μεθόδου.

Καθώς η μέθοδος στηρίζεται στο σχήμα κεντρικών διαφορών, είναι 2^{ης} τάξης ακρίβειας ως προς το χρόνο. Με επαρκώς μικρά χρονικά βήματα είναι δυνατό να επιτευχθεί αρκετά μεγαλύτερη ακρίβεια σε σχέση με τη ρητή μέθοδο. Για λόγους ακρίβειας υπολογισμών, η μέθοδος Crank-Nicolson συνήθως χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με τη μέθοδο κεντρικών διαφορών στο χώρο.





Διακριτοποίηση μεταβατικής μονοδιάστατης διάχυσης

Πλήρως πεπλεγμένη μέθοδος (fully implicit)

$\theta=1$

Έχει ήδη αναφερθεί και στις πεπερασμένες διαφορές.

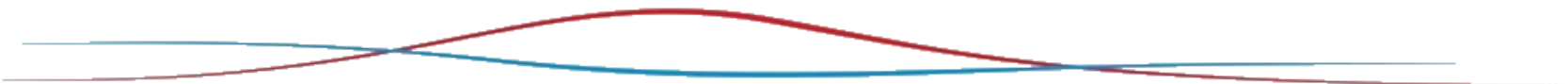
Η εξίσωση (I) γράφεται (για ενδιάμεσους κόμβους):

$$\alpha_P \varphi_P = \alpha_W \varphi_W + \alpha_E \varphi_E + \alpha_P^o \varphi_P^o + S_u + S_{u,BC} \quad (IV)$$

Όπου

$$\alpha_P = \alpha_P^o + (\alpha_E + \alpha_W - S_P - S_{P,BC}), \alpha_P^o = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t}, \alpha_W = \Gamma_w / \Delta x_{WP}, \alpha_E = \Gamma_e / \Delta x_{PE}$$

Ευστάθεια: Όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης (IV) είναι πάντα θετικοί, συνεπώς η μέθοδος είναι ευσταθής άνευ όρων για οποιοδήποτε χρονικό βήμα. ΟΜΩΣ, επειδή η ακρίβεια της μεθόδου ως προς το χρόνο είναι μόνο 1^{ης} τάξης (βλ. και ενότητα πεπερασμένων διαφορών), απαιτούνται πράγματι μικρά χρονικά βήματα ώστε να διασφαλίζεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Η πεπλεγμένη μέθοδος συνίσταται για μη μόνιμες ροές γενικού σκοπού λόγω της απεριόριστης ευστάθειάς της.





Παράδειγμα αγωγής θερμότητας

Μια λεπτή πλάκα βρίσκεται αρχικά σε θερμοκρασία 200 οC. Την χρονική στιγμή αμέσως μετά την $t=0$ η θερμοκρασία στην ανατολική πλευρά της πλάκας ξαφνικά μειώνεται στους 0 οC. Η δυτική πλευρά είναι μονωμένη (δηλ. έχουμε μηδενική ροή θερμότητας-μηδενική κλίση θερμοκρασίας). Να υπολογιστεί η μεταβατική κατανομή της θερμοκρασίας στην πλάκα και να συγκριθεί με την αναλυτική λύση σε χρόνο $t=40s$, $t=80s$, $t=120s$. Το πρόβλημα να επιλυθεί με τη ρητή μέθοδο και με την πλήρως πεπλεγμένη μέθοδο. Δίδονται: Μήκος πλάκας $L=0.02m$, συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας της πλάκας $k=10 W/(mK)$, $\rho \cdot c=10 \cdot 10^6 J/(m^3K)$. (όπου c είναι η ειδική θερμοχωρητικότητα του στερεού)

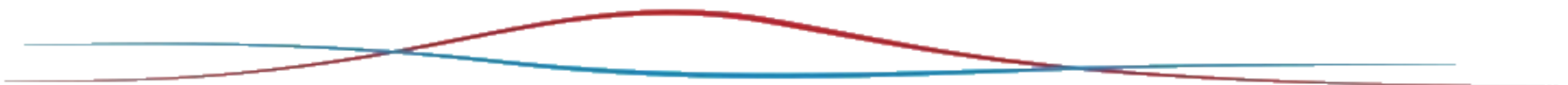
Λύση

Διέπouσα εξίσωση: $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\rho \cdot c} \frac{\partial T}{\partial x} \right)$, ή αλλιώς:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Αρχικές συνθήκες: $t=0$, $T=200$ παντού.

Οριακές συνθήκες την $t>0$: $x=0$ (δυτικό όριο) $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $x=L$ (ανατολικό όριο) $\Rightarrow T=0$



Παράδειγμα αγωγής θερμότητας

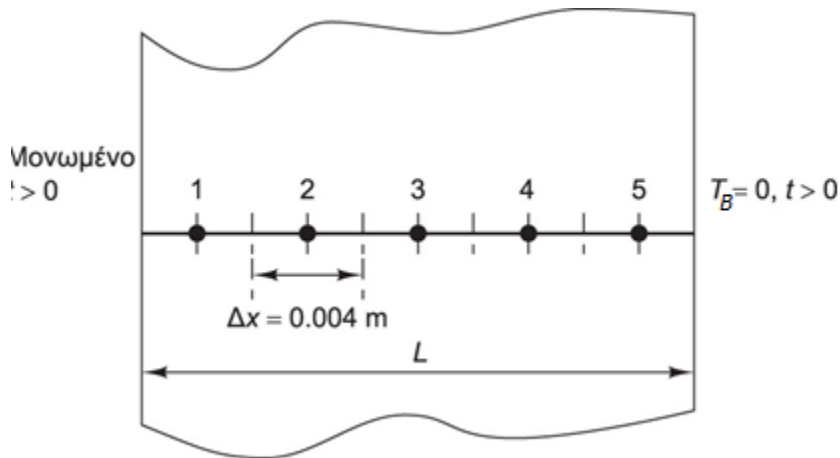
Αναλυτική λύση:

$$\frac{T(x, t)}{200} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \exp(-\alpha \lambda_n^2 t) \cos(\lambda_n x)$$

Όπου n είναι το χρονικό βήμα και

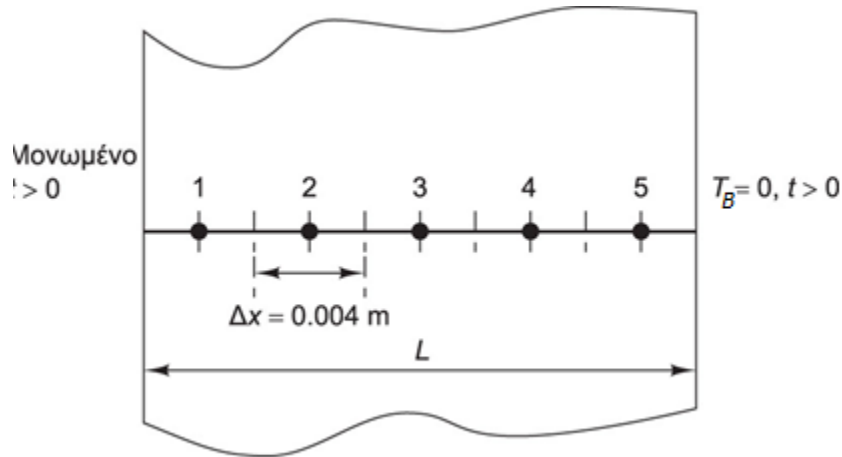
$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \text{ and } \alpha = k/\rho c$$

Με χωρική διακριτοποίηση $\Delta x = 0.004$ m προκύπτει το ακόλουθο πλέγμα:



Παράδειγμα αγωγής θερμότητας

Επίλυση με πεπερασμένους όγκους-Ρητή μέθοδος:

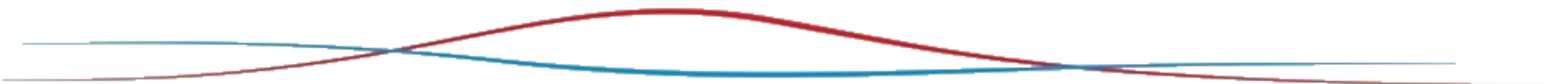


Εφαρμόζεται η εξ. (II) θέτοντας όπου $\rho = \rho_c$ και $\Gamma = k$.

$$\alpha_P T_P = \alpha_W T_W^o + \alpha_E T_E^o + [\alpha_P^o - (\alpha_E + \alpha_W - S_P - S_{P,BC})] T_P^o + S_u + S_{u,BC}$$

Με $\alpha_P = \alpha_P^o = \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Ενδιάμεσοι κόμβοι (2,3,4): $\alpha_W = k/\Delta x$, $\alpha_E = k/\Delta x$, $S_P = 0$, $S_u = 0$, μηδενικοί και οι όροι ψευδοπηγών.





Παράδειγμα αγωγής θερμότητας

Επίλυση με πεπερασμένους όγκους-Ρητή μέθοδος:

Δυτικό όριο (κόμβος 1): Για $t > 0$ το δυτικό όριο είναι μονωμένο δηλ. η ροή θερμότητας και συνεπώς η κλίση θερμοκρασίας μηδενίζεται. Συνεπώς, η διακριτοποιημένη μορφή της εξίσωσης αγωγής στον κόμβο 1 θα είναι:

$$\rho c \frac{(T_P - T_P^o)}{\Delta t} \Delta x = \left[\frac{k}{\Delta x} (T_E^o - T_P^o) \right] - 0$$

Ανατολικό όριο (κόμβος 5): Για $t > 0$ η θερμοκρασία του ανατολικού ορίου είναι σταθερή και ίση με $T_B = 0$. Η διακριτοποιημένη εξίσωση αγωγής δίνει:

$$\rho c \frac{(T_P - T_P^o)}{\Delta t} \Delta x = \left[\frac{k}{\Delta x/2} (T_B - T_P^o) \right] - \left[\frac{k}{\Delta x} (T_P^o - T_W^o) \right]$$

Οπότε, διαμορφώνεται ο παρακάτω Πίνακας συντελεστών του αλγεβρικού συστήματος εξισώσεων:

Node	a_W	a_E	S_u
1	0	$k/\Delta x$	0
2, 3, 4	$k/\Delta x$	$k/\Delta x$	0
5	$k/\Delta x$	0	$\frac{2k}{\Delta x} (T_B - T_P^o)$





Παράδειγμα αγωγής θερμότητας

Επίλυση με πεπερασμένους όγκους-Ρητή μέθοδος:

Ορισμός επιθυμητού χρονικού βήματος:

Η συνθήκη ευστάθειας του ρητού σχήματος είναι:

$$\Delta t < \rho c \frac{\Delta x^2}{2k}, \text{ από όπου προκύπτει ότι το χρονικό βήμα θα πρέπει να είναι } \Delta t < 8 \text{ s.}$$

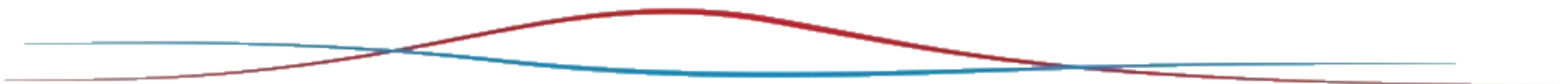
Τελικά επιλύεται το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\text{Node 1:} \quad 200T_P = 25T_E^o + 175T_P^o$$

$$\text{Nodes 2-4:} \quad 200T_P = 25T_W^o + 25T_E^o + 150T_P^o$$

$$\text{Node 5:} \quad 200T_P = 25T_W^o + 125T_P^o$$

Με χρονικό βήμα $\Delta t = 2\text{s}$.





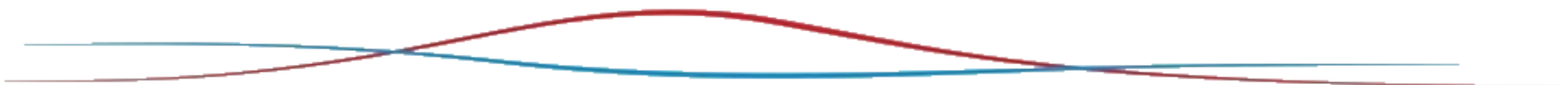
Παράδειγμα αγωγής θερμότητας

Επίλυση με πεπερασμένους όγκους-Ρητή μέθοδος:

Πορεία επίλυσης του συστήματος για τα πρώτα χρονικά βήματα με $\Delta t=2$ s.

Table 8.1 Specimen calculations for the explicit method

<i>Time</i>	<i>Node 1</i>	<i>Node 2</i>	<i>Node 3</i>	<i>Node 4</i>	<i>Node 5</i>
$t = 0$ s	$T_1^0 = 200$	$T_2^0 = 200$	$T_3^0 = 200$	$T_4^0 = 200$	$T_5^0 = 200$
	$200T_1^1 = 25 \times 200$ $+ 175 \times 200$	$200T_2^1 = 25 \times 200$ $+ 25 \times 200$ $+ 150 \times 200$	$200T_3^1 = 25 \times 200$ $+ 25 \times 200$ $+ 150 \times 200$	$200T_4^1 = 25 \times 200$ $+ 25 \times 200$ $+ 150 \times 200$	$200T_5^1 = 25 \times 200$ $+ 125 \times 200$
$t = 2$ s	$T_1^1 = 200$	$T_2^1 = 200$	$T_3^1 = 200$	$T_4^1 = 200$	$T_5^1 = 150$
	$200T_1^2 = 25 \times 200$ $+ 175 \times 200$	$200T_2^2 = 25 \times 200$ $+ 25 \times 200$ $+ 150 \times 200$	$200T_3^2 = 25 \times 200$ $+ 25 \times 200$ $+ 150 \times 200$	$200T_4^2 = 25 \times 200$ $+ 25 \times 150$ $+ 150 \times 200$	$200T_5^2 = 25 \times 200$ $+ 125 \times 150$
$t = 4$ s	$T_1^2 = 200$	$T_2^2 = 200$	$T_3^2 = 200$	$T_4^2 = 193.75$	$T_5^2 = 118.75$
Note: Subscripts denote the node number, superscripts denote the time step					





Παράδειγμα αγωγής θερμότητας

Επίλυση με πεπερασμένους όγκους-Ρητή μέθοδος:

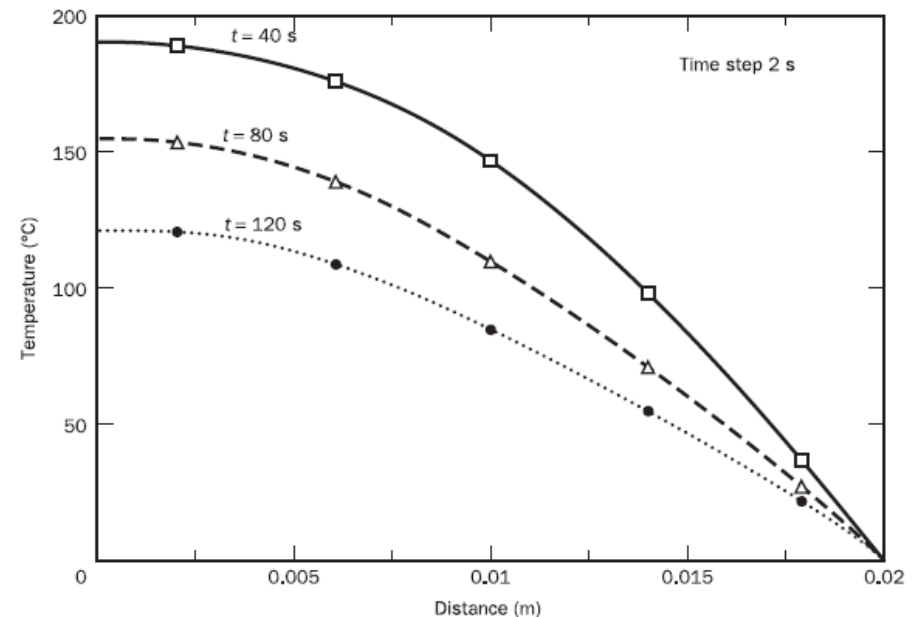
Αποτελέσματα τις ζητούμενες χρονικές στιγμές με $\Delta t = 2$ s.

Node	Time = 40 s			Time = 80 s			Time = 120 s		
	Numerical	Analytical	% error	Numerical	Analytical	% error	Numerical	Analytical	% error
1	188.64	188.39	-0.13	153.33	152.65	-0.43	120.53	119.87	-0.55
2	176.41	175.76	-0.36	139.05	138.36	-0.50	108.82	108.21	-0.56
3	148.29	147.13	-0.79	111.29	110.63	-0.59	86.47	85.96	-0.58
4	100.76	99.50	-1.26	72.06	71.56	-0.69	55.58	55.25	-0.60
5	35.94	35.38	-1.57	24.96	24.77	-0.75	19.16	19.05	-0.59

Γραμμές: Αναλυτική λύση

Σημεία: Αριθμητική λύση

Συμπέρασμα: Πολύ καλή ακρίβεια



Παράδειγμα αγωγής θερμότητας

Επίλυση με πεπερασμένους όγκους-Ρητή μέθοδος:

Αποτελέσματα την $t=40$ s με $\Delta t=8$ s (ίσο με το όριο ευστάθειας).

Γραμμές: Αναλυτική λύση

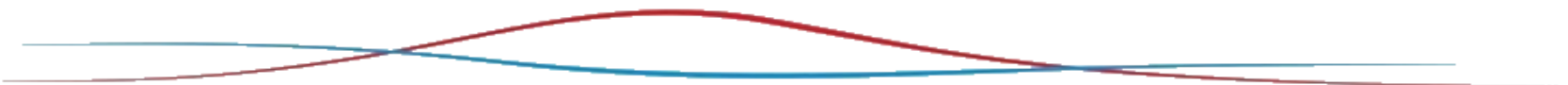
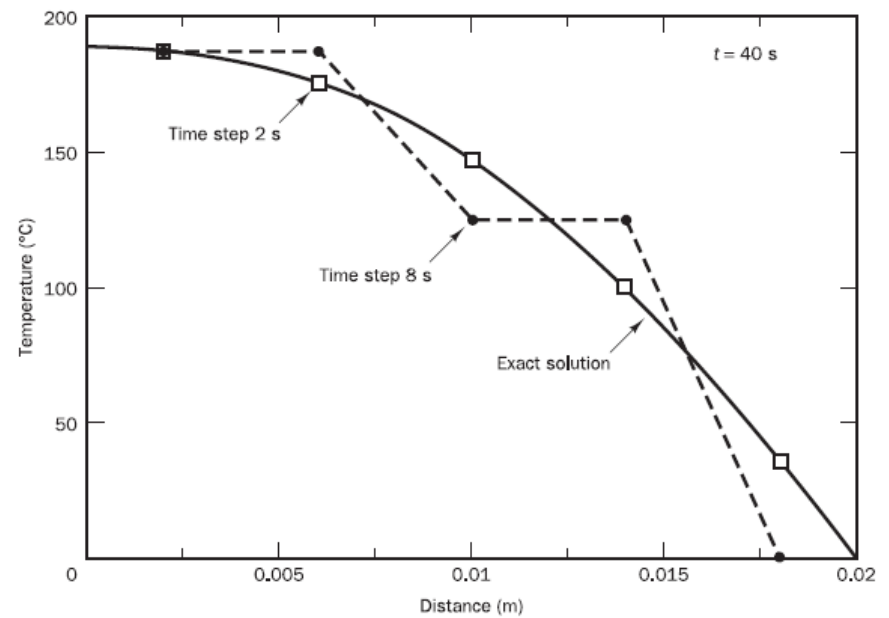
Σημεία: Αριθμητική λύση

Συμπέρασμα:

Με χρονικό βήμα ίσο με το όριο ευστάθειας

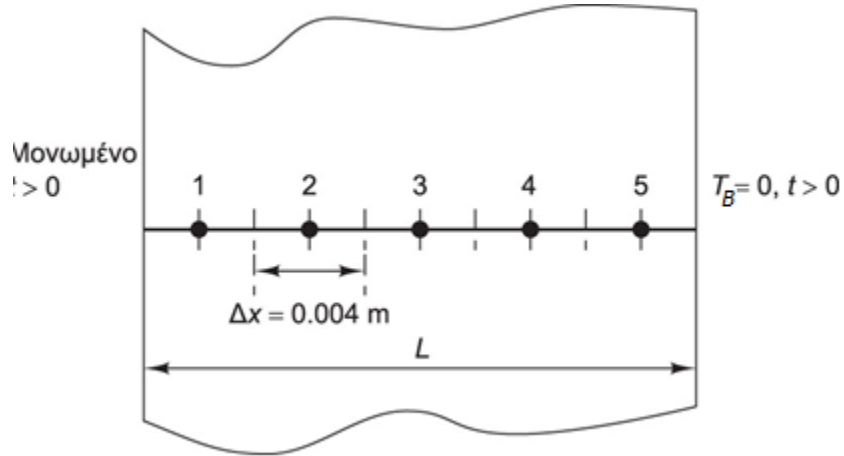
$\Delta t=8$ s δίνει υψηλά σφάλματα και μη ρεαλιστική

Λύση η οποία ταλαντώνεται γύρω από την αναλυτική λύση.



Παράδειγμα αγωγής θερμότητας

Επίλυση με πεπερασμένους όγκους- Πλήρως πεπλεγμένη μέθοδος:

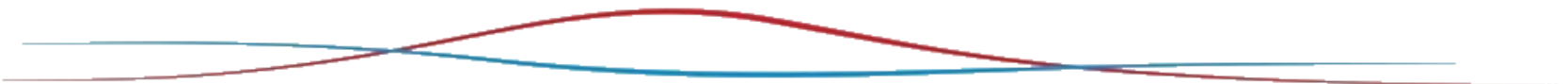


Εφαρμόζεται η εξ. (IV) θέτοντας όπου $\rho = \rho_c$ και $\Gamma = k$.

$$\alpha_P T_P = \alpha_W T_W + \alpha_E T_E + \alpha_P^o T_P^o + S_u + S_{u,BC}$$

$$\alpha_P = \alpha_P^o + (\alpha_E + \alpha_W - S_P - S_{P,BC}), \alpha_P^o = \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Ενδιάμεσοι κόμβοι (2,3,4): $\alpha_W = k/\Delta x$, $\alpha_E = k/\Delta x$, $S_P = 0$, $S_u = 0$ και μηδενικοί όροι ψευδοπηγών.





Παράδειγμα αγωγής θερμότητας

Επίλυση με πεπερασμένους όγκους- Πλήρως πεπλεγμένη μέθοδος:

Δυτικό όριο (κόμβος 1): Για $t > 0$ το δυτικό όριο είναι μονωμένο δηλ. η ροή θερμότητας και συνεπώς η κλίση θερμοκρασίας μηδενίζεται. Συνεπώς, η διακριτοποιημένη μορφή της εξίσωσης αγωγής στον κόμβο 1 θα είναι (όρος διάχυσης στο τρέχων χρονικό βήμα αντί του προηγούμενου χρονικού βήματος που είδαμε στη ρητή μέθοδο):

$$\rho c \frac{(T_P - T_P^o)}{\Delta t} \Delta x = \left[\frac{k}{\Delta x} (T_E - T_P) \right] - 0$$

Ανατολικό όριο (κόμβος 5): Για $t > 0$ η θερμοκρασία του ανατολικού ορίου είναι σταθερή και ίση με $T_B = 0$. Η διακριτοποιημένη εξίσωση αγωγής δίνει (όρος διάχυσης στο τρέχων χρονικό βήμα):

$$\rho c \frac{(T_P - T_P^o)}{\Delta x} \Delta x = \left[\frac{k}{\Delta x/2} (T_B - T_P) \right] - \left[\frac{k}{\Delta x} (T_P - T_W) \right]$$

Οπότε, διαμορφώνεται ο παρακάτω Πίνακας συντελεστών του συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων:

Node	a_W	a_E	S_P	S_u
1	0	$k/\Delta x$	0	0
2, 3, 4	$k/\Delta x$	$k/\Delta x$	0	0
5	$k/\Delta x$	0	$-\frac{2k}{\Delta x}$	$\frac{2k}{\Delta x} T_B$





Παράδειγμα αγωγής θερμότητας

Επίλυση με πεπερασμένους όγκους- Πλήρως πεπλεγμένη μέθοδος:

Ορισμός επιθυμητού χρονικού βήματος:

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Ωστόσο, χάριν επίτευξης της καλύτερης δυνατής ακρίβειας επιλέγεται και εδώ ένα χρονικό βήμα $\Delta t = 2s$.

Τελικά επιλύεται το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\text{Node 1:} \quad 225T_P = 25T_E + 200T_P^\theta$$

$$\text{Nodes 2-4:} \quad 250T_P = 25T_W + 25T_E + 200T_P^\theta$$

$$\text{Node 5:} \quad 275T_P = 25T_W + 200T_P^\theta + 50T_B$$

$$\begin{bmatrix} 225 & -25 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 250 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 250 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 250 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & 275 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200T_1^\theta \\ 200T_2^\theta \\ 200T_3^\theta \\ 200T_4^\theta \\ 200T_5^\theta \end{bmatrix}$$



Παράδειγμα αγωγής θερμότητας

Επίλυση με πεπερασμένους όγκους- Πλήρως πεπλεγμένη μέθοδος:

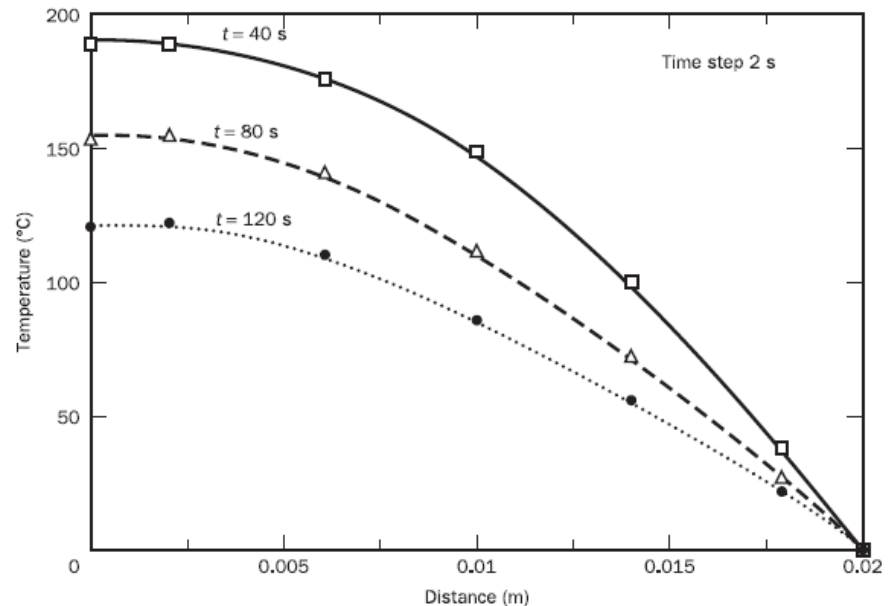
Αποτελέσματα τις ζητούμενες χρονικές στιγμές με $\Delta t = 2$ s.

Node	Time = 40 s			Time = 80 s			Time = 120 s		
	Numerical	Analytical	% error	Numerical	Analytical	% error	Numerical	Analytical	% error
1	187.38	188.38	0.51	153.72	152.65	-0.70	121.52	119.87	-1.42
2	176.28	175.76	-0.29	139.79	138.36	-1.03	109.78	108.21	-1.24
3	150.04	147.13	-1.97	112.38	110.63	-1.57	87.33	85.96	-1.59
4	103.69	99.50	-4.20	73.09	71.56	-2.13	56.20	55.25	-1.71
5	37.51	35.38	-6.02	25.38	24.77	-2.46	19.39	19.05	-1.78

Γραμμές: Αναλυτική λύση

Σημεία: Αριθμητική λύση

Συμπέρασμα: Πολύ καλή ακρίβεια



Παράδειγμα αγωγής θερμότητας

Επίλυση με πεπερασμένους όγκους- Πλήρως πεπλεγμένη μέθοδος:

Αποτελέσματα την $t=40$ s με $\Delta t=8$ s (ίσο με το όριο ευστάθειας της ρητής μεθόδου).

Συμπαγής γραμμή: Αναλυτική λύση

Σημεία: Αριθμητική λύση από τις 2 μεθόδους

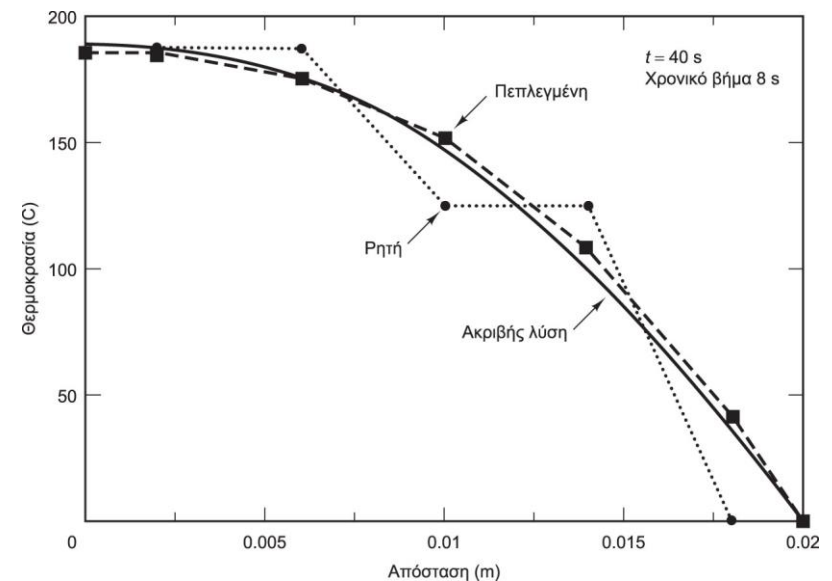
Συμπέρασμα:

Ενώ η ρητή μέθοδος δίνει μη ρεαλιστικές ταλαντώσεις,

Η πεπλεγμένη μέθοδος δίνει ρεαλιστικά αποτελέσματα

Που συμφωνούν με την αναλυτική λύση.

Προκύπτει το πλεονέκτημα της πεπλεγμένης μεθόδου η οποία εμφανίζει ανοχή σε μεγάλα χρονικά βήματα. Ωστόσο τονίζεται ότι η ρεαλιστική λύση προκύπτει πάντα με μικρά χρονικά βήματα.

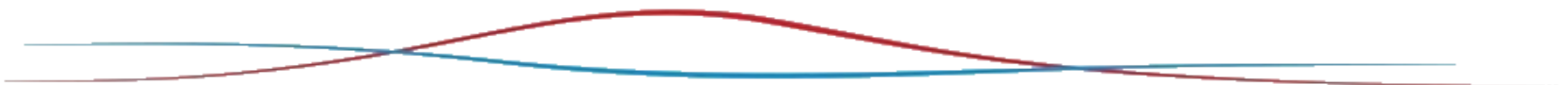


Σύνοψη μεθόδων διακριτοποίησης στο χρόνο

Χαρακτηριστικά βάσει ροής πληροφορίας μεταξύ των χρονικών βημάτων:

- Ρητή μέθοδος: Χρησιμοποιεί μόνο τιμές της ϕ από το προηγούμενο χρονικό βήμα.
- Crank-Nicolson: Χρησιμοποιεί τον μ.ο. τιμών της ϕ από το προηγούμενο και το τρέχων χρονικό βήμα.
- Πεπλεγμένη μέθοδος: Χρησιμοποιεί τιμές της ϕ στο τρέχων χρονικό βήμα.

<i>Scheme</i>	<i>Stability</i>	<i>Accuracy</i>	<i>Positive coefficient criterion</i>
<i>Explicit</i>	Conditionally stable	First-order	$\Delta t < \frac{\rho(\Delta x)^2}{2\Gamma}$
<i>Crank-Nicolson</i>	Unconditionally stable	Second-order	$\Delta t < \frac{\rho(\Delta x)^2}{\Gamma}$
<i>Implicit</i>	Unconditionally stable	First-order	Always positive



Γενίκευση σε τρισδιάστατη μη μόνιμη ροή

Όπως έχει δειχθεί στο Κεφάλαιο των πεπερασμένων όγκων ελέγχου (σε μόνιμη ροή) το υβριδικό σχήμα υπερέχει των άλλων σχημάτων (κεντρικών διαφορών και ανάντη) από άποψη ευστάθειας και ακρίβειας. Δεδομένου επίσης ότι η διακριτοποίηση στο χρόνο πλεονεκτεί με την πλήρως πεπλεγμένη μέθοδο, η διακριτοποιημένη εξίσωση μεταφοράς με συναγωγή και διάχυση γενικεύεται εδώ με όρους του υβριδικού σχήματος στο χώρο και της πλήρους πεπλεγμένης διακριτοποίησης στο χρόνο.

Η γενική εξίσωση μεταφοράς για μη μόνιμη ροή γράφεται:

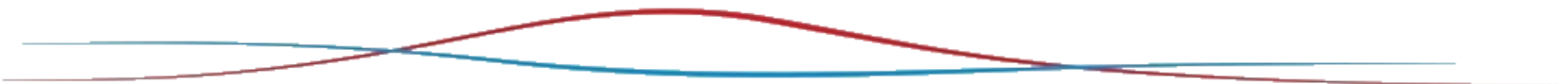
$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N \\ + a_B \phi_B + a_T \phi_T + a_P^o \phi_P^o + S_u$$

Όπου

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + a_P^o + \Delta F - S_P$$

$$a_P^o = \frac{\rho_P^o \Delta V}{\Delta t}$$

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_P \phi_P$$





Γενίκευση σε τρισδιάστατη μη μόνιμη ροή

Συντελεστές της γενικής εξίσωσης μεταφοράς για μη μόνιμη ροή:

	<i>1D flow</i>	<i>2D flow</i>	<i>3D flow</i>
a_W	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$
a_E	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$
a_S	—	$\max \left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right]$
a_N	—	$\max \left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right]$
a_B	—	—	$\max \left[F_b, \left(D_b + \frac{F_b}{2} \right), 0 \right]$
a_T	—	—	$\max \left[-F_t, \left(D_t - \frac{F_t}{2} \right), 0 \right]$
ΔF	$F_e - F_w$	$F_e - F_w + F_n - F_s$	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$

In the above expressions the values of F and D are calculated with the following formulae:

<i>Face</i>	<i>w</i>	<i>e</i>	<i>s</i>	<i>n</i>	<i>b</i>	<i>t</i>
F	$(\rho u)_w A_w$	$(\rho u)_e A_e$	$(\rho v)_s A_s$	$(\rho v)_n A_n$	$(\rho w)_b A_b$	$(\rho w)_t A_t$
D	$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$\frac{\Gamma_s}{\delta y_{SP}} A_s$	$\frac{\Gamma_n}{\delta y_{PN}} A_n$	$\frac{\Gamma_b}{\delta z_{BP}} A_b$	$\frac{\Gamma_t}{\delta z_{PT}} A_t$