

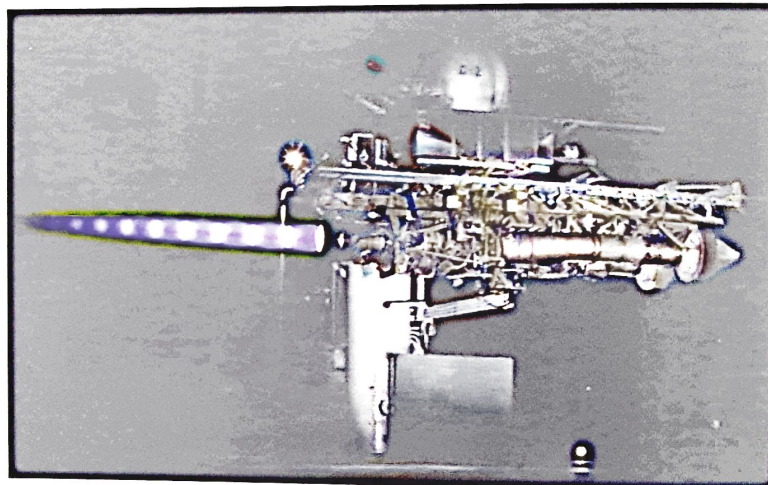
όπου $\nu(M)$ είναι μια γωνία που καλείται και **συνάρτηση Prandtl-Meyer**:

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} \right) \tan^{-1} \left(\sqrt{M^2 - 1} \right)$$

Η $\nu(M)$ είναι γωνία, [°] ή [rad] και η φυσική σημασία της είναι ότι μέσω της γωνίας αυτής πρέπει αποτονωθεί η ροή, ξεκινώντας από $\nu=0$ για $M=1$, ώστε να φτάσει σε υπερηχητικό αριθμό Mach, $M>1$. Για να βρούμε τον M_2 για γνωστές τιμές των M_1 , γ , και θ , υπολογίζουμε τη $\nu(M_1)$ από τη σχέση (3-53), τη $\nu(M_2)$ από την (3-52), και στη συνέχεια τη $\nu(M_2)$ από την (3-53), προσέχοντας ότι το τελευταίο βήμα απαιτεί την επίλυση μιας πεπλεγμένης εξίσωσης του M_2 .

Από τη στιγμή που δεν υπάρχει μετάδοση θερμότητας ή μεταφορά έργου, και η ροή μέσω του κύματος αποτόνωσης μπορεί να προσεγγιστεί ως ισεντροπική, οι T_0 και P_0 διατηρούνται σταθερές, και για να υπολογίσουμε τις άλλες ροϊκές ιδιότητες κατόπιν του κύματος αποτόνωσης, όπως οι T_2 , ρ_2 , και P_2 , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις της ισεντροπικής ροής που βρήκαμε προηγουμένως.

Πολύπλοκες αλληλεπιδράσεις κυμάτων κρούσης και κυμάτων αποτόνωσης, δημιουργούνται στην υπερηχητική ροή δέσμης ενός «υπερεκτονωμένου» ακροφυσίου. Τέτοιου είδους μοτίβα ροής γίνονται ορατά κατά την έξοδο των καυσαερίων από τον κινητήρα ενός αεροσκάφους που χρησιμοποιεί αεριοστρόβιλο με μετάκαυση και ονομάζονται «διαμαντία» ή «ουρά της τίγρης». (Σχήμα 3.16).



Σχήμα 3.16: Σχηματισμός διαμαντιών στην έξοδο αεριοστρόβιλου που λειτουργεί με μετάκαυση

3.3.4 Ροή σε Αγωγούς με Μετάδοση Θερμότητας και χωρίς Τριβή (Ροή Rayleigh)

Οι ροές που αναλύσαμε σε προηγούμενες Παραγράφους ήταν **ισεντροπικές** ροές, (δηλαδή αντιστρεπτά και αδιαβατικές ροές) επειδή δεν περιλαμβάνουν μετάδοση θερμότητας και μη-αντιστρεπτά φαινόμενα ροής: (τριβή). Όμως στην πράξη πολλές συμπιεστές ροές περιλαμβάνουν χημικές αντιδράσεις όπως καύση, πυρηνικές αντιδράσεις, εξάτμιση, συμπύκνωση καθώς μετάδοση θερμότητας από και προς τα τοιχώματα του αγωγού. Αυτού του είδους τα προβλήματα ροής είναι δύσκολο να αναλυθούν με ακρίβεια καθώς μπορεί να περιλαμβάνουν σημαντικές μεταβολές χημικής σύστασης και μετατροπή της λανθάνουσας, χημικής, και πυρηνικής ενέργειας σε θερμική μεταβολές που για παράδειγμα συμβαίνουν στους θαλάμους καύσης αεριοστρόβιλων, πυραύλων και αυλωθητών.

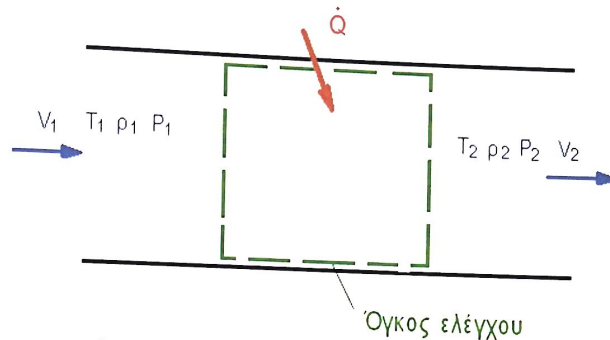
Κρίσιμη παράμετρος σχεδιασμού του θαλάμου καύσης είναι η ροή Rayleigh. Τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά τέτοιων πολύπλοκων ροών μπορούν να υπολογιστούν με απλή ανάλυση μοντελοποιώντας τη δημιουργία και την απορρόφηση θερμικής ενέργειας ως μετάδοση θερμότητας ίδιου ρυθμού μέσω των τοιχωμάτων του αγωγού και αγνοώντας αλλαγές στη χημική σύσταση της ροής. Ακόμα όμως και τα φαινόμενα τριβής, μεταβλητή διατομή αγωγού, και πολυδιάστατη ανάλυση αφού η ροή μπορεί να περιλαμβάνει

Θεωρώντας ότι ο θάλαμος καύσης έχει σταθερή διατομή σε όλο το μήκος του οι κανόνες της ροής Rayleigh βοηθούν ώστε η διεργασία της καύσης εντός του θαλάμου να γίνει βέλτιστη. Το μοντέλο της ροής

ροής Rayleigh έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- άτριβη ροή,
- μη αδιαβατική ροή,
- ροή σε αγωγό σταθερής διατομής,
- ροή στην οποία προστίθεται θερμότητα,
- η παροχή καυσίμου θεωρείται αμελητέα,
- και ισχύει και για συμπιεσμένες και για ασυμπίεστες ροές.

Θεωρούμε λοιπόν μία ροή μόνιμη, μονοδιάστατη, με σταθερές ειδικές θερμότητες, και αμελητέα τριβής αγωγού (ροή Rayleigh), (Σχήμα 3.17).



Σχήμα 3.17: Όγκος ελέγχου για ροή σε αγωγό σταθερής διατομής με μετάδοση θερμότητας και αμελητέα τριβή.

Οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας, της ορμής, και της ενέργειας για τον όγκο ελέγχου που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.17 γράφονται ως ακολούθως:

Εξίσωση της συνέχειας:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad \left| \quad \Rightarrow \rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n} \right. \quad (3-54)$$

$$A_1 = A_2$$

Εξίσωση της x-ορμής:

Επειδή τα φαινόμενα τριβής είναι αμελητέα, δεν υπάρχουν διατμητικές δυνάμεις και, υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν εξωτερικές και σωματόδετες δυνάμεις, η εξίσωση της ορμής:

$$(2-123) \Rightarrow \sum \vec{F} = \sum_{out} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{in} \beta \dot{m} \vec{V}, \quad \beta \approx 1 \quad (3-55)$$

στην x-κατεύθυνση της ροής εκφυλίζεται στο ισοζύγιο μεταξύ δυνάμεων στατικής πίεσης και μεταφοράς ορμής. Σημειώνοντας ότι μελετάμε τυρβώδεις ροές υψηλής ταχύτητας με αμελητέα τριβή, ο συντελεστής διόρθωσης του ρυθμού ροής της ορμής είναι προσεγγιστικά 1 ($\beta \approx 1$) και, επομένως, μπορεί να αμεληθεί. Τότε:

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 \Rightarrow \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \Rightarrow P_1 - P_2 = (\rho_2 V_2) V_2 - (\rho_1 V_1) V_1 \Rightarrow P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (3-56)$$

Εξίσωση της ενέργειας:

Ο όγκος ελέγχου δεν περιλαμβάνει διατμητικό, τεχνικό, ή άλλο έργο, και η μεταβολή δυναμικής ενέργειας είναι αμελητέα. Εάν ο ρυθμός μετάδοσης θερμότητας είναι \dot{Q} και η μετάδοση θερμότητας ανά μονάδα μάζας ρευστού είναι $q = \dot{Q}/\dot{m}$, το ισοζύγιο ενέργειας της μόνιμης ροής, θα είναι:

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \Rightarrow \dot{Q} + \dot{m} \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) = \dot{m} \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) \Rightarrow q + h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad \Rightarrow$$

Για τέλειο αέριο σταθερών ειδικών θερμοτήτων: $\Delta h = c_p \Delta T$

$$\Rightarrow q = c_p (T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \Rightarrow q = h_{o2} - h_{o1} = c_p (T_{o2} - T_{o1}) \quad (3-57)$$

$T_{oi} = T_i + \frac{1}{2} V_i^2$

Άρα, στη διάρκεια μιας ροής Rayleigh η ενθαλπία ανακοπής h_o και η θερμοκρασία ανακοπής T_o .

μεταβάλλονται ως εξής:

- όταν θερμότητα μεταδίδεται στο ρευστό και οι δύο αυξάνονται (το q είναι θετικό),
- όταν θερμότητα μεταδίδεται από το ρευστό και οι δύο μειώνονται, (το q είναι αρνητική).

Μεταβολή εντροπίας:

Θεωρώντας αμελητέα τα φαινόμενα τριβής (αντιστρεψιμότητες), η εντροπία ενός συστήματος αλλάζει μόνο εξαιτίας της μετάδοσης θερμότητας ως εξής:

- αυξάνεται με την πρόσδοση θερμότητας, και
- μειώνεται με την απώλεια θερμότητας.

Επειδή η εντροπία είναι ιδιότητα της ροής, αποτελεί καταστατική συνάρτηση, ενώ η μεταβολή της εντροπίας ενός ιδανικού αερίου σταθερών ειδικών θερμοτήτων από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 δίνεται από τη σχέση {Πολυζάκης [86]}:

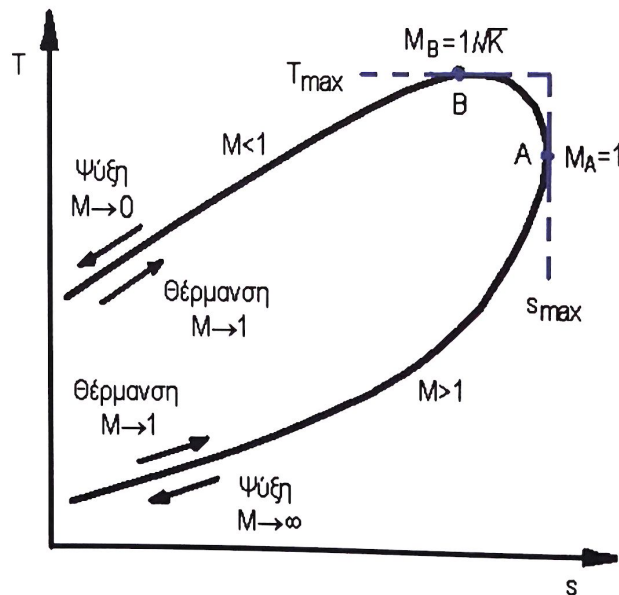
$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (3-58)$$

Καταστατική εξίσωση ιδανικού αερίου:

$$R = \frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2} \quad (3-59)$$

Προφανώς, υπάρχει άπειρος αριθμός πιθανών κατάντη καταστάσεων 2 που αντιστοιχούν σε γνωστή ανάντη κατάσταση 1. Ένας πρακτικός τρόπος προσδιορισμού των κατάντη καταστάσεων είναι η υπόθεση διαφόρων τιμών της T_2 , και ο υπολογισμός των υπόλοιπων ιδιοτήτων συμπεριλαμβανομένης της μετάδοσης θερμότητας q για κάθε T_2 από τις σχέσεις (3-54) ως (3-59).

Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 3.18, η γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων σε ένα διάγραμμα T-s δίνει μια καμπύλη που περνά από τη γνωστή κατάσταση εισόδου.



Σχήμα 3.18: Διάγραμμα T-s για ροή σε αγωγό σταθερής διατομής με μετάδοση θερμότητας και αμελητέα τριβή (ροή Rayleigh)

Η αναπαράσταση της ροής Rayleigh σε διάγραμμα T-s καλείται **γραμμή Rayleigh** βάσει της οποίας αλλά και τα αποτελέσματα των υπολογισμών, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Όλες οι καταστάσεις που ικανοποιούν τις εξισώσεις διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας καθώς και τις εκφράσεις των ροϊκών ιδιοτήτων ανήκουν στη γραμμή Rayleigh. Άρα, για μια γνωστή κατάσταση εισόδου (αρχική), δε μπορεί να υπάρξει κατάντη κατάσταση ροής ρευστού εκτός της γραμμής Rayleigh σε διάγραμμα T-s. Επιπρόσθετα, η γραμμή Rayleigh αποτελεί το γεωμετρικό τόπο των φυσικών εφικτών κατάντη καταστάσεων που αντιστοιχούν σε μια αρχική κατάσταση.
- Με την πρόσδοση θερμότητας η εντροπία αυξάνεται συνεπώς, καθώς στο ρευστό μεταδίδεται θερμότητα.

κινούμαστε προς τα δεξιά πάνω στην καμπύλη. Στο σημείο A ο αριθμός Mach είναι $M=1$, και αποτελεί το σημείο μέγιστης εντροπίας. Οι καταστάσεις ροής που αντιστοιχούν στο άνω τμήμα της γραμμής Rayleigh καμπύλης, κάτω από το σημείο A, είναι υποηχητικές ενώ, οι καταστάσεις που αντιστοιχούν στο κάτω τμήμα της Mach, μια διεργασία κινείται προς τα δεξιά με την προσθήκη θερμότητας και προς τα αριστερά με την αποβολή.

- Στις υποηχητικές ροές η θέρμανση αυξάνει τον αριθμό Mach, ενώ στις υπερηχητικές τον μειώνει. Ο αριθμός Mach της ροής προσεγγίζει την τιμή $M=1$ και στις δύο περιπτώσεις (από 0 στις υποηχητικές και από άπειρο στις υπερηχητικές ροές) στη διάρκεια της θέρμανσης.
- Από το ενεργειακό ισοζύγιο $q = c_p (T_{o2} - T_{o1})$ προκύπτει ότι η θέρμανση αυξάνει την τιμή της θερμοκρασίας ανακοπής T_o και στις υποηχητικές και στις υπερηχητικές ροές, ενώ η ψύξη τη μειώνει. Η μέγιστη τιμή της T_o εμφανίζεται για $M=1$. Το τελευταίο ισχύει και για τη στατική θερμοκρασία εκτός από μια μικρή περιοχή αριθμών Mach $1/\sqrt{\gamma} < M < 1$ της υποηχητικής ροής. Στην υποηχητική ροή, τόσο η θερμοκρασία όσο και ο αριθμός Mach αυξάνονται με τη θέρμανση, αλλά η T φτάνει μια μέγιστη τιμή T_{max} για $M=1/\sqrt{\gamma}$ (που ισούται με 0.845 για αέρα) και στη συνέχεια μειώνεται. Εκ πρώτης όψης φαίνεται παράλογο ενώ προσδίδεται θερμότητα σ' ένα ρευστό η θερμοκρασία του μειώνεται, αλλά αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι σ' αυτήν την περιοχή τιμών παρατηρείται μεγάλη αύξηση της ταχύτητας του ρευστού και η θερμοκρασία μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση: $T_o = T + V^2/2c_p$. Παρατηρείστε ακόμα ότι, η αποβολή θερμότητας στο διάστημα $1/\sqrt{\gamma} < M < 1$ προκαλεί αύξηση της θερμοκρασίας του ρευστού.
- Από την εξίσωση της ορμής $P + \rho V^2 = \text{σταθερό}$, όπου $K = \rho V^2 = \text{σταθερό}$ (από την εξίσωση της συνέχειας), προκύπτει ότι η ταχύτητα και η στατική πίεση παρουσιάζουν αντίθετες τάσεις. Άρα, με την πρόσδοση θερμότητας, η στατική πίεση μειώνεται στην υποηχητική (εφόσον η ταχύτητα και ο αριθμός Mach αυξάνονται) και αυξάνεται στην υπερηχητική ροή (εφόσον η ταχύτητα και ο αριθμός Mach μειώνονται).
- Από την εξίσωση της συνέχειας $\rho V = \text{σταθερό}$ προκύπτει ότι η πυκνότητα και η ταχύτητα είναι αντιστρόφως ανάλογες. Άρα, η πυκνότητα μειώνεται με τη μετάδοση θερμότητας στο ρευστό στην υποηχητική ροή (εφόσον η ταχύτητα και ο αριθμός Mach αυξάνονται), και αυξάνεται με την πρόσδοση θερμότητας στην υπερηχητική (εφόσον η ταχύτητα και ο αριθμός Mach μειώνονται).
- Στο αριστερό μισό του Σχήματος 3.18, το κάτω τμήμα της γραμμής Rayleigh είναι πιο απότομο από το πάνω τμήμα (s συναρτήσεως του T). Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή της εντροπίας που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη αλλαγή θερμοκρασίας (και, άρα, σε συγκεκριμένη μετάδοση θερμότητας) είναι μεγαλύτερη στην υπερηχητική ροή.

Στον Πίνακα 3.2 παρουσιάζονται συνοπτικά και κωδικοποιημένα τα αποτελέσματα της θέρμανσης και της ψύξης στις ιδιότητες της ροής Rayleigh. Από τον Πίνακα 3.2 προκύπτουν τα εξής επιπλέον συμπεράσματα:

- Η θέρμανση και η ψύξη έχουν αντίθετο αποτέλεσμα στις περισσότερες ροϊκές ιδιότητες.
- Η πίεση ανακοπής μειώνεται με τη θέρμανση και αυξάνεται με τη ψύξη ανεξάρτητα αν η ροή είναι υποηχητική ή υπερηχητική.

Πίνακα 3.2: Η επίδραση της θέρμανσης και της ψύξης στις ιδιότητες της ροής Rayleigh.

Ιδιότητα	Θέρμανση		Ψύξη	
	Υποηχητική ροή	Υπερηχητική ροή	Υποηχητική ροή	Υπερηχητική ροή
V	↑	↓	↓	↑
M	↑	↓	↓	↑
T_o	↑	↑	↓	↓
T	↑ για $M < 1/\gamma^{1/2}$ ↓ για $M > 1/\gamma^{1/2}$	↑	↓ για $M < 1/\gamma^{1/2}$ ↑ για $M > 1/\gamma^{1/2}$	↓
ρ	↓	↑	↑	↓
P_o	↓	↓	↑	↓
P	↓	↑	↑	↓
s	↑	↑	↓	↓

Σχέσεις ιδιοτήτων ροής Rayleigh

Οι ιδιότητες της ροής στην ηχητική κατάσταση είναι συνήθως εύκολο να υπολογιστούν γι' αυτό η κρίσιμη κατάσταση που αντιστοιχεί σε $M=1$ χρησιμοποιείται ως σύνθημα αναφοράς στις συμπιεστές ροές. Όπου κατάσταση που αντιστοιχεί σε $M=1$ χρησιμοποιείται ως σύνθημα αναφοράς στις συμπιεστές ροές. Όπου υπάρχει ο αστερίσκος (*) είναι οι ιδιότητες στραγγαλισμού, δηλαδή τα σημεία όπου η ροή γίνεται ηχητική

($M=1$). Η κατάσταση 1 είναι μια τυχαία κατάσταση, οι σχέσεις για τις ιδιότητες της ροής αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{(\gamma+1)M^2 [2 + (\gamma-1)M^2]}{(1 + \gamma M^2)^2} \quad (3-60)$$

$$\frac{P_o}{P_o^*} = \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2} \left[\frac{2 + (\gamma-1)M^2}{\gamma+1} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (3-61)$$

$$\frac{T}{T^*} = \left[\frac{M(1+\gamma)}{1+\gamma M^2} \right]^2 \quad (3-62)$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \quad (3-63)$$

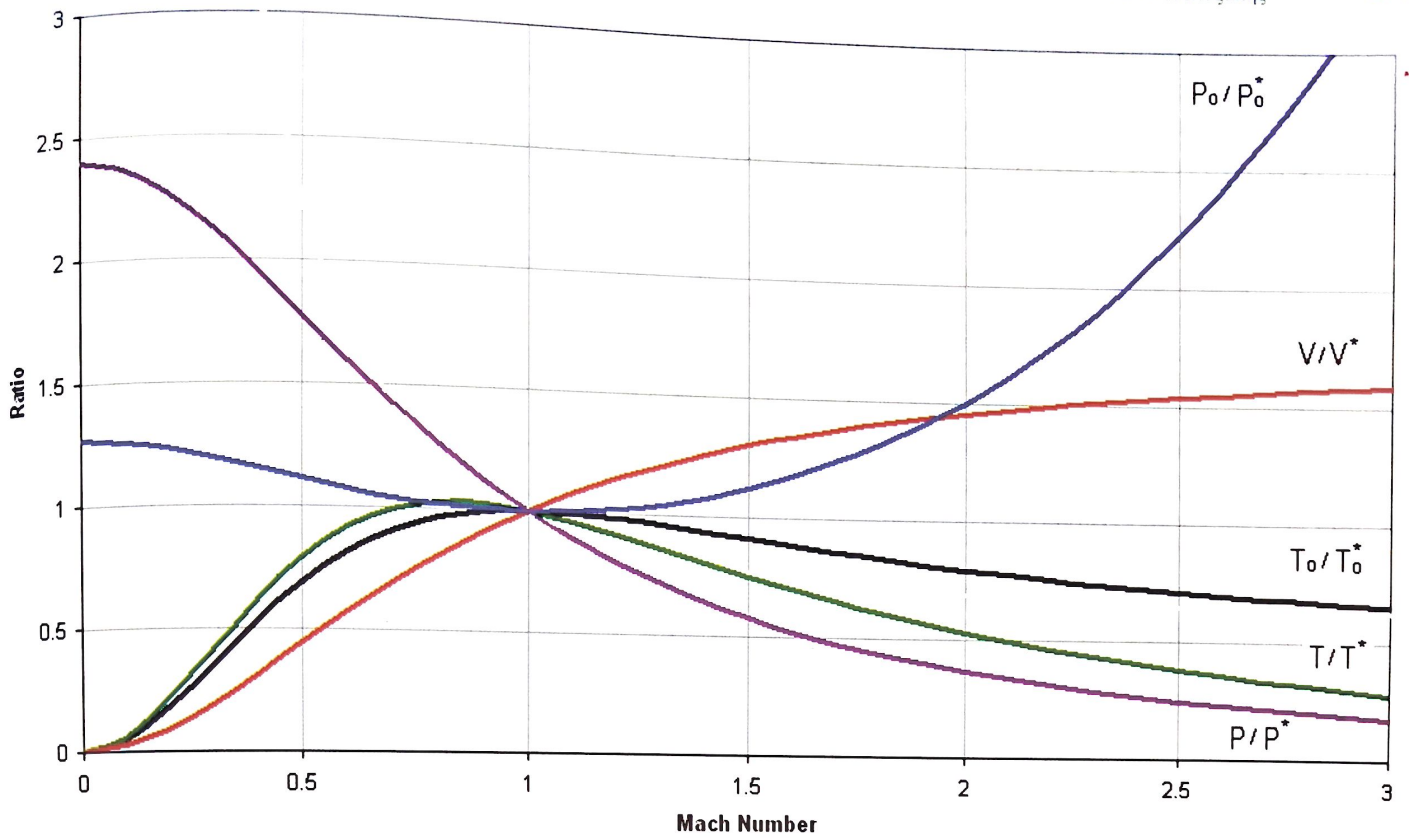
$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(\gamma+1)M^2}{1+\gamma M^2} \quad (3-64)$$

Στον Πίνακα 3.3 παρουσιάζονται διάφοροι λόγοι ροϊκών ιδιοτήτων διαμέσου ασυνεπειών για ιδανικά αέρια με $\gamma=1.4$.

Πίνακας 3.3: Ροϊκές συναρτήσεις Rayleigh ιδανικού αερίου με $\gamma=1.4$, {Cengel [93]}

M	T _o /T _o *	P _o /P _o *	T/T*	P/P*	V/V*
0.0	0.0000	1.2679	0.0000	2.4000	0.0000
0.1	0.0468	1.2591	0.0560	2.3669	0.0237
0.2	0.1736	1.2346	0.2066	2.2727	0.0909
0.3	0.3469	1.1985	0.4089	2.1314	0.1918
0.4	0.5290	1.1566	0.6151	1.9608	0.3137
0.5	0.6914	1.1141	0.7901	1.7778	0.4444
0.6	0.8189	1.0753	0.9167	1.5957	0.5745
0.7	0.9085	1.0431	0.9929	1.4235	0.6975
0.8	0.9639	1.0193	1.0255	1.2658	0.8101
0.9	0.9921	1.0049	1.0245	1.1246	0.9110
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.2	0.9787	1.0194	0.9118	0.7958	1.1459
1.4	0.9343	1.0777	0.8054	0.6410	1.2564
1.6	0.8842	1.1756	0.7017	0.5236	1.3403
1.8	0.8363	1.3159	0.6089	0.4335	1.4046
2.0	0.7934	1.5031	0.5289	0.3636	1.4545
2.2	0.7561	1.7434	0.4611	0.3086	1.4938
2.4	0.7242	2.0451	0.4038	0.2648	1.5252
2.6	0.6970	2.4177	0.3556	0.2294	1.5505
2.8	0.6738	2.8731	0.3149	0.2004	1.5711
3.0	0.6540	3.4245	0.2803	0.1765	1.5882

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις συντάσσεται το παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 3.19), όπου παρατηρείται πως ότι ταχύτητα και να έχει το ρευστό ο ολική πίεση θα μειώνεται και η ολική θερμοκρασία θα αυξάνεται με την προσθήκη θερμότητας.



Σχήμα 3.19: Διάγραμμα Ιδιοτήτων ρευστού σε ροή Rayleigh, [Καρτάνος [82]]

3.3.4.1 Φραγμένη ροή Rayleigh

Η υποηχητική ροή Rayleigh στο εσωτερικό αγωγού μπορεί να επιταχυνθεί στην ηχητική ταχύτητα ($M=1$) με θέρμανση. Παρατηρώντας τη γραμμή Rayleigh διαπιστώνουμε ότι το ρευστό στην κρίσιμη κατάσταση $M=1$ δε μπορεί να επιταχυνθεί σε υπερηχητικές ταχύτητες με επιπλέον θέρμανση. Επομένως, η ροή είναι φραγμένη. Η κατάσταση αυτή είναι ανάλογη της αδυναμίας επιτάχυνσης ενός ρευστού σε υπερηχητικές ταχύτητες σε συγκλίνον ακροφύσιο επεκτείνοντας απλά το τμήμα της συγκλίνουσας ροής. Εάν συνεχίσουμε να θερμαίνουμε το ρευστό, η κρίσιμη κατάσταση μετακινείται απλά κατάντη ενώ, εφόσον η πυκνότητα του ρευστού στην κρίσιμη κατάσταση θα είναι πλέον μικρότερη, ο ρυθμός ροής θα μειωθεί. Άρα, για γνωστή κατάσταση εισόδου, η αντίστοιχη κρίσιμη κατάσταση προσδιορίζει τη μέγιστη εφικτή μετάδοση θερμότητας μόνιμης ροής. Αυτό σημαίνει ότι

$$q_{\max} = h_o^* - h_{o1} = c_p (T_o^* - T_{o1}) \quad (3-65)$$

Επιπλέον μετάδοση θερμότητας προκαλεί φραγμό και, συνεπώς, αλλαγή της κατάστασης εισόδου (π.χ., η ταχύτητα εισόδου θα μειωθεί) ενώ, η ροή παύει να ακολουθεί την ίδια γραμμή Rayleigh. Ψύξη της υποηχητικής ροής Rayleigh μειώνει την ταχύτητα και, καθώς η θερμοκρασία προσεγγίζει το απόλυτο μηδέν ο αριθμός Mach τείνει να μηδενιστεί. Η θερμοκρασία ανακοπής T_o είναι μέγιστη στην κρίσιμη κατάσταση $M=1$.

Στην υπερηχητική ροή Rayleigh, η θέρμανση μειώνει την ταχύτητα της ροής. Πρόσθετη θέρμανση απλά μειώνει τη θερμοκρασία και μετακινεί το σημείο κρίσιμης κατάστασης κατάντη, οδηγώντας σε μείωση της παροχής μάζας του ρευστού. Φαινομενικά, μια υπερηχητική ροή Rayleigh μπορεί να ψυχθεί απεριόριστα, αλλά αποδεικνύεται ότι υπάρχει κάποιο όριο. Λαμβάνοντας το όριο της σχέσης (3-60) καθώς ο αριθμός Mach τείνει στο άπειρο, παίρνουμε:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{T_o}{T_o^*} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \quad (3-66)$$

όπου για $\gamma=1.4$ είναι $\frac{T_o}{T_o^*} = 0.49$.

Άρα, εάν για παράδειγμα η κρίσιμη θερμοκρασία ανακοπής είναι 1,000K, η ροή Rayleigh του αέρα δε μπορεί να ψυχθεί κάτω από τους 490K. Η φυσική σημασία αυτού είναι ότι η ταχύτητα της ροής φτάνει στο άπειρο καθώς η θερμοκρασία προσεγγίζει τους 490K (αδύνατο). Όταν η υπερηχητική ροή δε μπορεί να

συντηρηθεί, ένα κάθετο κύμα κρούσης τη μετατρέπει σε υποηχητική.

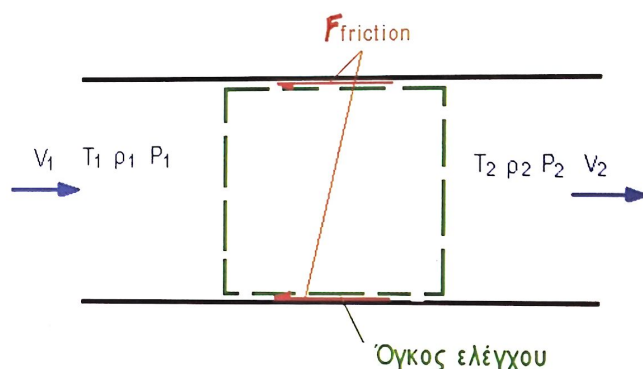
3.3.5 Αδιαβατική Ροή σε Αγωγούς με Τριβή (Ροή Fanno)

Η τριβή τοιχώματος που σχετίζεται με ροές υψηλών ταχυτήτων μέσω μικρού μήκους συσκευών μεγάλης εμβαδού εγκάρσιας διατομής, όπως τα μεγάλα ακροφύσια, είναι συχνά αμελητέα και, επομένως, η ροή διαμέσου τέτοιων συσκευών μπορεί να προσεγγιστεί ως ατριβής. Αλλά η τριβή είναι σημαντική και θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη όταν μελετάμε ροές μέσω επιμήκων τμημάτων ροής, όπως μεγάλου μήκους αγωγούς ειδικότερα όταν το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής τους είναι μικρό.

Θεωρώντας ότι ο θάλαμος καύσης έχει σταθερή διατομή σε όλο το μήκος του, το μοντέλο της ροής Fanno έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- ροή με σημαντική τριβή τοιχώματος
- ροή με αμελητέα μετάδοση θερμότητας (αδιαβατική)
- ροή ενός ιδανικού αερίου σταθερών ειδικών θερμοτήτων θεωρείται μόνιμη, μονοδιάστατη

Οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας για τον ο όγκο ελέγχου που φαίνεται στο Σχήμα 3.20 είναι οι ακόλουθες:



Σχήμα 3.20: Όγκος ελέγχου για αδιαβατική ροή σε αγωγό σταθερής διατομής με τριβή

Εξίσωση της συνέχειας:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad \left| \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n} \\ A_1 = A_2 = A \end{array} \right. \quad (3-67)$$

Εξίσωση της x-ορμής:

Ονομάζουμε $F_{friction}$ τη δύναμη τριβής που ασκείται στο ρευστό από την εσωτερική επιφάνεια του αγωγού. Εάν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν άλλες εξωτερικές και σωματόδετες δυνάμεις, η εξίσωση της ορμής γράφεται:

$$(2-123) \Rightarrow \sum \vec{F} = \sum_{out} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{in} \beta \dot{m} \vec{V}, \quad \beta \approx 1 \quad (3-68)$$

και θεωρώντας ότι:

- παρά την τριβή στα τοιχώματα
- την ανομοιομορφία των προφίλ της ταχύτητας,
- η ροή είναι συνήθως πλήρως διαμορφωμένη και τυρβώδης

ισχύει για τον συντελεστή διόρθωσης του ρυθμού ροής της ορμής β : $\beta \approx 1$, τότε από τη σχέση (3-68), προκύπτει:

$$\begin{aligned} P_1 A_1 - P_2 A_2 - F_{friction} &= \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \Rightarrow P_1 - P_2 - \frac{F_{friction}}{A} = (\rho_2 V_2) V_2 - (\rho_1 V_1) V_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 + \frac{F_{friction}}{A} \end{aligned} \quad (3-69)$$

Εξίσωση της ενέργειας:

Ο όγκος ελέγχου δε περιλαμβάνει διεργασίες μετάδοσης θερμότητας ή έργου και οι μεταβολές δυναμικής ενέργειας είναι αμελητέες. Για την περίπτωση αυτή, το ενεργειακό ισοζύγιο στη μόνιμη κατάσταση γράφεται:

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \Rightarrow h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \Rightarrow h_{o1} = h_{o2} \Rightarrow h_o = h + \frac{V^2}{2} = \text{constant}$$

Για τέλειο αέριο σταθερών ειδικών θερμοτήτων: $\Delta h = c_p \Delta T$

$$\Rightarrow T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = T_2 + \frac{V_2^2}{2c_p} \Rightarrow T_{o1} = T_{o2} \Rightarrow T_o = T + \frac{V^2}{2c_p} \quad (3-70)$$

Επειδή η ροή είναι αδιαβατική και χωρίς έργο: $h_o = \text{σταθερό!}$

Άρα, η ενθαλπία ανακοπής h_o και η θερμοκρασία ανακοπής T_o παραμένουν σταθερές σε μια ροή Fanno.

Μεταβολή εντροπίας:

Όταν δεν υπάρχει μετάδοση θερμότητας, η εντροπία ενός συστήματος μπορεί να αλλάξει μόνο από μη-αντιστρεπτά φαινόμενα όπως η τριβή, αποτέλεσμα των οποίων είναι πάντοτε η αύξηση της εντροπίας. Άρα, σε ροή Fanno, η εντροπία του ρευστού πρέπει να αυξάνεται. Σε αυτήν την περίπτωση, η μεταβολή στην εντροπία είναι ισοδύναμη με την αύξηση ή την παραγωγή εντροπίας και η μεταβολή της και, για ένα ιδανικό αέριο σταθερών ειδικών θερμοτήτων από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 δίνεται από τη σχέση {Πολυζάκης [86]}:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} > 0 \quad (3-71)$$

Καταστατική εξίσωση ιδανικού αερίου:

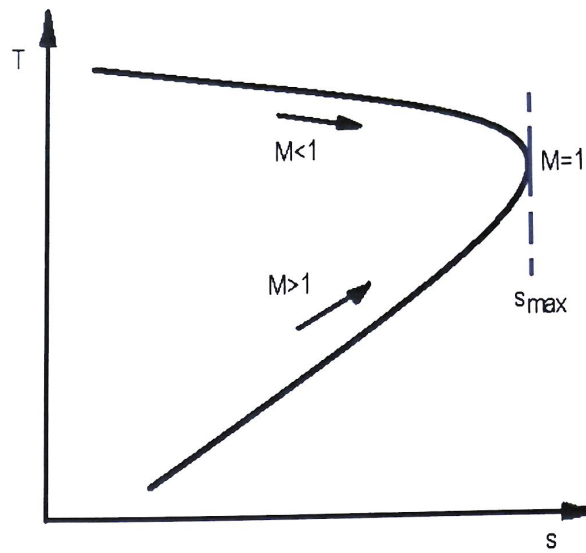
Με τη βοήθεια της καταστατικής εξίσωση ιδανικού αερίου αποδεικνύεται ότι οι καταστάσεις 1 και 2 σχετίζονται μεταξύ τους σύμφωνα με τη σχέση:

$$R = \frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2} \quad (3-72)$$

Έστω αέριο γνωστών ιδιοτήτων R , γ , και c_p που ρέει σε αγωγό σταθερού εμβαδού εγκάρσιας διατομής A . Όταν η κατάσταση εισόδου 1 είναι δεδομένη, οι ιδιότητες στην είσοδο P_1 , T_1 , ρ_1 , V_1 , και s_1 είναι γνωστές. Τότε οι πέντε ιδιότητες εξόδου P_2 , T_2 , ρ_2 , V_2 , και s_2 μπορούν να προσδιοριστούν από τις σχέσεις (3-67) ως (3-72) για οποιαδήποτε τιμή της μετάδοσης θερμότητας q . Από τις δεδομένες P_1 , T_1 και P_1 , T_1 υπολογίζεται επίσης ο αριθμός Mach στην είσοδο και την έξοδο από τη σχέση:

$$M = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{\gamma RT}} \quad (3-73)$$

Είναι φανερό ότι, υπάρχει άπειρο πλήθος δυνατών κατάντη καταστάσεων 2 που αντιστοιχούν σε γνωστή ανάντη κατάσταση 1. Ένας πρακτικός τρόπος προσδιορισμού των παραπάνω κατάντη καταστάσεων είναι υποθέτοντας διάφορες τιμές της T_2 , και υπολογίζοντας όλες τις άλλες ιδιότητες, συμπεριλαμβανομένης της δύναμης τριβής, για κάθε τέτοια τιμή της T_2 από τις σχέσεις (3-67) ως (3-72). Σχεδιάζοντας το αποτέλεσμα σε διάγραμμα T - s παίρνουμε μια καμπύλη που περνά από την κατάσταση εισόδου, όπως απεικονίζεται και στο (Σχήμα 3.21).



Σχήμα 3.21: Διάγραμμα T-s για αδιαβατική ροή με τριβή σε αγωγό σταθερής διατομής (ροή Fanno)

Η καμπύλη που αναπαριστά τη ροή Fanno σε διάγραμμα T-s καλείται **γραμμή Fanno** βάσει της οποίας αλλά και τα αποτελέσματα των υπολογισμών, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Όλες οι καταστάσεις που ικανοποιούν τις εξισώσεις διατήρησης της μάζας, της ορμής, και της ενέργειας καθώς και τις σχέσεις ιδιοτήτων της ροής, ανήκουν στη γραμμή Fanno. Άρα, για μια γνωστή κατάσταση εισόδου (αρχική), δε μπορεί να υπάρξει ροή ρευστού κατάντη κατάσταση εκτός της γραμμής Fanno σε διάγραμμα T-s. Επιπρόσθετα, η γραμμή Fanno αποτελεί το γεωμετρικό τόπο όλων των πιθανών κατάντη καταστάσεων που αντιστοιχούν σε μια αρχική, δεδομένη κατάσταση. Εάν δεν υπήρχε τριβή, οι ιδιότητες της ροής θα παρέμεναν σταθερές κατά μήκος του αγωγού στη διάρκεια μιας ροής Fanno.
- Η τριβή προκαλεί αύξηση της εντροπίας συνεπώς, μια διεργασία ροής μετακινείται πάντοτε προς τα δεξιά κατά μήκος της γραμμής Fanno. Στο σημείο μέγιστης εντροπίας, ισχύει: $M=1$. Όλες οι καταστάσεις που ανήκουν στο πάνω τμήμα της γραμμής Fanno είναι υποηχητικές ενώ στο κάτω τμήμα της καμπύλης ανήκουν αυτές που είναι υπερηχητικές.
- Στις υποηχητικές ροές Fanno η τριβή αυξάνει τον αριθμό Mach, αντίθετα τον μειώνει στις υπερηχητικές ροές Fanno. Και στις όμως δύο περιπτώσεις, ο αριθμός Mach προσεγγίζει τη μονάδα ($M=1$).
- Το ενεργειακό ισοζύγιο απαιτεί από τη θερμοκρασία ανακοπής $T_o=T+V^2/2c_p$ να παραμένει σταθερή στη διάρκεια μιας ροής Fanno, αλλά η πραγματική θερμοκρασία μπορεί να αλλάξει. Στην υποηχητική ροή η ταχύτητα αυξάνεται και, άρα, η θερμοκρασία μειώνεται, αλλά στην υπερηχητική ροή συμβαίνει το αντίθετο.
- Από την εξίσωση της συνέχειας $\rho V=\text{σταθερό}$ προκύπτει ότι η πυκνότητα και η ταχύτητα είναι ποσότητες αντιστρόφως ανάλογες. Άρα, η επίδραση της τριβής μειώνει την πυκνότητα στις υποηχητικές (επειδή η ταχύτητα και ο αριθμός Mach αυξάνονται) και την αυξάνει στις υπερηχητικές ροές (επειδή η ταχύτητα και ο αριθμός Mach μειώνονται).

Στον Πίνακα 3.4 φαίνεται το αποτέλεσμα της τριβής στις ιδιότητες μιας ροής Fanno. Η επίδραση της τριβής στις περισσότερες ιδιότητες στην υποηχητική ροή είναι αντίθετη από εκείνη στην υπερηχητική. Όμως, ανεξάρτητα αν η ροή είναι υποηχητική ή υπερηχητική, η τριβή έχει πάντοτε σαν αποτέλεσμα τη μείωση της πίεσης ανακοπής. Από την άλλη, η τριβή δεν έχει κανένα αποτέλεσμα στη θερμοκρασία ανακοπής αφού, η μηχανική ενέργεια που χάνεται λόγω των φαινομένων τριβής μετατρέπεται απλά σε ισοδύναμη ποσότητα θερμικής ενέργειας.

Πίνακα 3.4: Η επίδραση της θέρμανσης και της ψύξης στις ιδιότητες της ροής Rayleigh.

Ιδιότητα	Υποηχητική ροή	Υπερηχητική ροή
V	↑	↓
M	↑	↓
T_o	-	-
T	↓	↑
ρ	↓	↑
P_o	↓	↓
P	↓	↑
s	↑	↑

$$T_o = T_o^* \quad (3-74)$$

$$\frac{P_o}{P_o^*} = \frac{\rho_o}{\rho_o^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)} \quad (3-75)$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \quad (3-76)$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right]^{1/2} \quad (3-77)$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = M \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right]^{1/2} \quad (3-78)$$

$$\frac{fL^*}{D_h} = 1 - \frac{M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2} \quad (3-79)$$

όπου f είναι ο μέσος σταθερός συντελεστής τριβής μεταξύ των θέσεων x και x_{cr} και $L^* = x_{cr} - x$ είναι το απαιτούμενο μήκος του αγωγού ώστε ο αριθμός Mach να γίνει ίσος με τη μονάδα υπό την επίδραση της τριβής του τοιχώματος, [Παράγραφος 3.4.5.1].

Στον Πίνακα 3.5 παρουσιάζονται διάφοροι λόγοι ροϊκών ιδιοτήτων διαμέσου ασυνεπειών για ιδανικά αέρια με $\gamma = 1.4$.

Πίνακας 3.5: Ροϊκές συναρτήσεις Fanno ιδανικού αερίου με $\gamma = 1.4$, {Cengel [93]}

M	To/To*	Po/Po*	T/T*	P/P*	V/V*	fL*/D
0.0	0.0	1.2000	0.0	0.0000	0.0	∞
0.1	5.8218	1.1976	10.9435	0.1094	66.9216	66.9216
0.2	2.9635	1.1905	5.4554	0.2182	14.5333	14.5333
0.3	2.0351	1.1788	3.6191	0.3257	5.2993	5.2993
0.4	1.5901	1.1628	2.6958	0.4313	2.3085	2.3085
0.5	1.3398	1.1429	2.1381	0.5345	1.0691	1.0691
0.6	1.1882	1.1194	1.7634	0.6348	0.4908	0.4908
0.7	1.0944	1.0929	1.4935	0.7318	0.2081	0.2081
0.8	1.0382	1.0638	1.2893	0.8251	0.0723	0.0723
0.9	1.0089	1.0327	1.1291	0.9146	0.0145	0.0145
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	.0.
1.2	1.0304	0.9317	0.8044	1.1583	0.0336	0.0336
1.4	1.1149	0.8621	0.6632	1.2999	0.0997	0.0997
1.6	1.2502	0.7937	0.5568	1.4254	0.1724	0.1724
1.8	1.4390	0.7282	0.4741	1.5360	0.2419	0.2419
2.0	1.6875	0.6667	0.4082	1.6330	0.3050	0.3050
2.2	2.0050	0.6098	0.3549	1.7179	0.3609	0.3609
2.4	2.4031	0.5576	0.3111	1.7922	0.4099	0.4099
2.6	2.8960	0.5102	0.2747	1.8571	0.4526	0.4526
2.8	3.5001	0.4673	0.2441	1.9140	0.4898	0.4898
3.0	4.2346	0.4286	0.2182	1.9640	0.5222	0.5222