ΑΣΚΗΣΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Μια βιομηχανία έχεις τρεις πτέρυγες, όπου κάθε πτέρυγα κατασκευάζει διαφορετικά προϊόντα και είναι εντελώς ανεξάρτητη η μία από την άλλη. Κάθε πτέρυγα αναλαμβάνει να κατασκευάσει δύο προϊόντα. Η βιομηχανία θέλει να προχωρήσει σε καθορισμό των βέλτιστων ποσοτήτων παραγωγής, ώστε να μεγιστοποιηθεί το μέγιστο κέρδος της.

Πτέρυγα Α

Η πτέρυγα Α κατασκευάζει δύο προϊόντα, πόρτα ασφαλείας [ΑΧ1] και κλασσική σιδερένια πόρτα [ΑΧ2]. Για να κατασκευαστεί η πόρτα ασφαλείας [ΑΧ1] απαιτείται 3 ώρες στην επεξεργασία μετάλλου [Σ1], 2 ώρες στο τμήμα συγκόλλησης [Σ2] και 1 ώρα στο βαφείο [Σ3]. Για να κατασκευαστεί η κλασική σιδερένια πόρτα [ΑΧ2] απαιτείται 2 ώρες στην επεξεργασία μετάλλου [Σ1], 1 ώρα στο τμήμα συγκόλλησης [Σ2] και 1 ώρα στο βαφείο [Σ3].
Οι διαθέσιμες ώρες για τα τμήματα [Σ1, Σ2, Σ3] είναι 18, 10, 8 ώρες αντίστοιχα . Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος για την πόρτα ασφαλείας [ΑΧ1] είναι 500 ευρώ, ενώ για την κλασσική σιδερένια πόρτα [ΑΧ2]. είναι 300 ευρώ.

Πτέρυγα Β

Η πτέρυγα Β κατασκευάζει επίσης δύο προϊόντα, καρέκλα δερμάτινη [ΒΧ1] και καρέκλα υφασμάτινη [ΒΧ2]. Για να κατασκευαστεί η δερμάτινη καρέκλα [ΒΧ1] απαιτείται 4 ώρες στο ξυλουργείο [Σ1], 2 ώρες στο μοντάρισμα [Σ2] και 1 ώρα στο βαφείο [Σ3]. Για να κατασκευαστεί η υφασμάτινη καρέκλα [ΒΧ2] απαιτείται 2 ώρες στο ξυλουργείο [Σ1], 6 ώρες στο μοντάρισμα [Σ2] και καμία ώρα στο βαφείο [Σ3].
Οι διαθέσιμες ώρες για τα τμήματα [Σ1, Σ2, Σ3] είναι 160, 180, 35 ώρες αντίστοιχα . Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος για την δερμάτινη καρέκλα [ΒΧ1] είναι 80 ευρώ, ενώ για την υφασμάτινη καρέκλα [ΒΧ2] είναι 40 ευρώ.

Πτέρυγα Γ

Η πτέρυγα Γ κατασκευάζει επίσης δύο προϊόντα, καναπές δερμάτινος [ΓΧ1] και καναπές υφασμάτινος [ΓΧ2]. Για να κατασκευαστεί ο δερμάτινος καναπές [ΓΧ1] απαιτείται 4 ώρες στο ξυλουργείο [Σ1], 2 ώρες στο μοντάρισμα [Σ2] και 1 ώρα στο βαφείο [Σ3]. Για να κατασκευαστεί ο υφασμάτινος καναπές [ΓΧ2] απαιτείται 2 ώρες στο ξυλουργείο [Σ1], 6 ώρες στο μοντάρισμα [Σ2] και καμία ώρα στο βαφείο [Σ3]. Οι διαθέσιμες ώρες για τα τμήματα [Σ1, Σ2, Σ3] είναι 160, 180, 45 ώρες αντίστοιχα . Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος για τον δερμάτινο καναπέ [ΓΧ1] είναι 80 ευρώ, ενώ για τον υφασμάτινο καναπέ [ΓΧ2] είναι 30 ευρώ.

1.1. Πτέρυγα Α

Με βάση τα δεδομένα για την πτέρυγα Α, υλοποιήθηκε ο παρακάτω συγκεντρωτικός πίνακας, και οι εξισώσεις που ακολουθούν.

Τμήματα για τις Κατεργασίες	Προϊόντα		Διαθέσιμες ώρες
	AX_1	AX_2	
Σ_1	3	2	18
Σ_2	2	1	10
Σ_3	1	1	8
Κέρδη ανά μονάδα	500	300	

Μεγιστοποίηση κέρδους

$Z=500X_1+300X_2$

Περιορισμοί

- $3X_1+2X_2 \leq 18$
- $2X_1+1X_2 \leq 10$
- $1X_1+1X_2 \leq 8$
- $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$

Μεταβλητές περιθωρίου

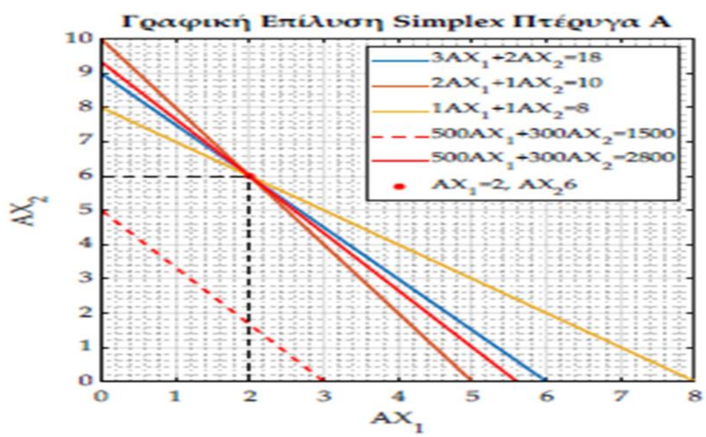
- S_1: Ώρες που δεν θα χρησιμοποιηθεί Σ_1.
- S_2: Ώρες που δεν θα χρησιμοποιηθεί Σ_2.
- S_3: Ώρες που δεν θα χρησιμοποιηθεί Σ_3.

Το επόμενο βήμα είναι να εφαρμόσουμε τις μεταβλητές περιθωρίου στους περιορισμούς και στην μεγιστοποίηση στου κέρδους. Οπότε έχουμε:

- $3X_1+2X_2+1S_1+0S_2+0S_3=18$
- $2X_1+1X_2+0S_1+1S_2+0S_3=10$
- $1X_1+1X_2+0S_1+0S_2+1S_3=8$
- $500X_1+300X_2+0S_1+0S_2+0S_3=Z$
- $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, $S_1 \geq 0$, $S_2 \geq 0$, $S_3 \geq 0$

1.1.1. Γραφική Επίλυση

Στην δεξιά γραφική παράσταση απεικονίζεται η γραφική επίλυση Simplex του προβλήματος. Όπου με βάση την γραφική παράσταση προκύπτει ότι το $AX_1=2$ και το $AX_2=6$. Επίσης δεν προκύπτει καμία κενή διαθέσιμη ώρα στα τμήματα.



1.1.2. Επίλυση Simplex

Οπότε εφαρμόζοντας τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ο αρχικός πίνακας SIMPLEX.

Συντ. Κέρδους C_j →		500	300	0	0	0	Ποσότητα	Ratio
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i	
0	S_1	3	2	1	0	0	18	6
0	S_2	2	1	0	1	0	10	5
0	S_3	1	1	0	0	1	8	8
-	Z_j	0	0	0	0	0	0	-
-	C_j-Z_j	500	300	0	0	0	-	-

Επιλέγουμε την στήλη X1 ως οδηγός στήλη γιατί έχει την μεγαλύτερη τιμή στην C_j-Z_j=500.

∴ Για την S_1: 18/3=6

∴ Για την S_2: 10/2=5

∴ Για την S_3: 8/1=8

Οπότε η S_2 είναι η οδηγός στήλη και το στοιχείο 2 στη διασταύρωση της οδηγού σειράς με την οδηγό στήλη είναι το οδηγό στοιχείο.

Οπότε με τις κατάλληλες πράξεις προκύπτει ο παρακάτω δεύτερος πίνακας SIMPLEX.

Συντ. Κέρδους C_j →		500	300	0	0	0	Ποσότητα	Ratio
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i	
0	S_1	0	0.5	1	-1.5	0	3	6
500	X_1	1	0.5	0	0.5	0	5	10
0	S_3	0	0.5	0	-0.5	1	3	6
-	Z_j	500	250	0.0	250	0	2500	-
-	C_j-Z_j	0	50.0	0.0	-250	0	-	-

Εφόσον η σειρά Cj-Zj του δεύτερου πίνακα SIMPLEX περιλαμβάνει και θετικό αριθμό η λύση που δίνει δεν είναι βέλτιστη. Οπότε η μεταβλητή που θα συμπεριληφθεί στην βάση είναι η X_2 που είναι οδηγός στήλη.

∴ Για την S_1: 3/0.5=6

∴ Για την X_1: 5/0.5=10

∴ Για την S_3: 3/0.5=6

Παρατηρούμε ότι για δύο μεταβλητές το ποσοστό είναι ίσο, όποιο και από τα δύο να επιλέξουμε θα έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Οπότε θα διαλέξουμε την S_1 σαν οδηγός σειρά, και το οδηγό στοιχείο είναι το 0.5.

Επομένως ο τρίτος πίνακας SIPLEX προκύπτει ότι είναι ο τελικός πίνακας. Παρατηρείται ότι η σειρά Cj-Zj δεν περιέχει θετικά στοιχεία συνεπώς δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί περαιτέρω αύξηση του κέρδους.

Συντ. Κέρδους C_j →		500	300	0	0	0	Ποσότητα	Ratio
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i	
300	X_2	0	1	2	-3	0	6	-
500	X_1	1	0	-1	2	0	2	-
0	S_3	0	0	-1	1	1	0	-
-	Z_j	500	300	100	100	0	2800	-
-	C_j-Z_j	0	0.0	-100	-100	0	-	-

- **Οπότε η βέλτιστη λύση είναι:**
  - ✓ **AX_1=2 πόρτες ασφαλείας**
  - ✓ **AX_2=6 πόρτες σιδερένιες**

- **Οπότε ο συνδυασμός παραγωγής δίνει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος που ανέρχεται σε 2800 ευρώ.**

- **Οι ελεύθεροι χρόνοι για τα τμήματα [Σ_1, Σ_2, Σ_3] μηδενίζονται πλήρως.**

1.2. Πτέρυγα Β

Με βάση τα δεδομένα για την πτέρυγα Α, υλοποιήθηκε ο παρακάτω συγκεντρωτικός πίνακας, και οι εξισώσεις που ακολουθούν.

Τμήματα για τις Κατεργασίες	Προϊόντα		Διαθέσιμες ώρες
	BX_1	BX_2	
Σ_1	4	2	160
Σ_2	2	6	180
Σ_3	1	0	35
Κέρδη ανά μονάδα	80	40	

Μεγιστοποίηση κέρδους

$Z=80X_1+40X_2$

Περιορισμοί

- $4X_1+2X_2 \leq 160$
- $2X_1+6X_2 \leq 180$
- $1X_1+0X_2 \leq 35$
- $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$

Μεταβλητές περιθωρίου

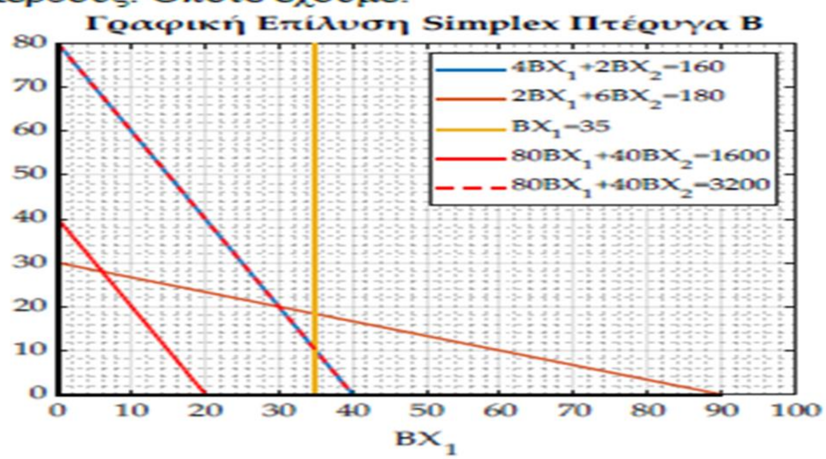
- S_1: Ωρες που δεν θα χρησιμοποιηθεί Σ_1.
- S_2: Ωρες που δεν θα χρησιμοποιηθεί Σ_2.
- S_3: Ωρες που δεν θα χρησιμοποιηθεί Σ_3.

Το επόμενο βήμα είναι να εφαρμόσουμε τις μεταβλητές περιθωρίου στους περιορισμούς και στην μεγιστοποίηση στου κέρδους. Οπότε έχουμε:

- $4X_1+2X_2+1S_1+0S_2+0S_3=160$
- $2X_1+6X_2+0S_1+1S_2+0S_3=180$
- $1X_1+0X_2+0S_1+0S_2+1S_3=35$
- $80X_1+40X_2+0S_1+0S_2+0S_3=Z$
- $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, $S_1 \geq 0$, $S_2 \geq 0$, $S_3 \geq 0$

1.2.1. Γραφική Επίλυση

Στην δεξιά γραφική παράσταση απεικονίζεται η γραφική επίλυση Simplex του προβλήματος. Η συγκεκριμένη περίπτωση θεωρείται ότι έχει 'άπειρες' λύσεις. Το μέγιστο κέρδος που μπορούμε να έχουμε είναι 3200, όμως οι συνδυασμοί στην παραγωγή των προϊόντων είναι 'άπειροι'.



Στην ουσία επειδή δεν μπορούμε να πάρουμε δεκαδικό αριθμό προϊόντων που είναι πάνω στην ευθεία έχουμε δύο πιθανές λύσεις όπου διαλέγουμε όποια θέλουμε εμείς. Ο χρόνος στο τμήμα Σ_1 θα μηδενιστεί και στις δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση μπορούμε να πάρουμε 30 BX_1 και 20 BX_2 και θα μηδενιστεί ο χρόνος στο τμήμα Σ_2. Ενώ στην δεύτερη περίπτωση μπορούμε να πάρουμε 35 BX_1 και 10 BX_2 και θα μηδενιστεί ο χρόνος στο τμήμα Σ_3.Φυσικά και υπάρχουν και οι μέσες λύσεις, αφήνοντας ελεύθερο χρόνο και στα δύο τμήματα Σ_2 και Σ_3. Όλες οι ακέραιες λύσεις διακρίνονται στην παραπάνω γραφική παράσταση.

1.2.2. Επίλυση Simplex

Οπότε εφαρμόζοντας τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ο αρχικός πίνακας SIMPLEX.

Συντ. Κέρδους C_j →		80	40	0	0	0	Ποσότητα	Ratio
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i	
0	S_1	4	2	1	0	0	160	40
0	S_2	2	6	0	1	0	180	90
0	S_3	1	0	0	0	1	35	35
-	Z_j	0	0	0	0	0	0	-
-	C_j-Z_j	80	40	0	0	0	-	-

Επιλέγουμε την στήλη X_1 ως οδηγός στήλη γιατί έχει την μεγαλύτερη τιμή στην C_j-Z_j=80.

∴ Για την S_1: 160/4=40

∴ Για την S_2: 180/2=90

∴ Για την S_3: 35/1=35

Οπότε η S_3 είναι η οδηγός στήλη και το στοιχείο 1 στη διασταύρωση της οδηγού σειράς με την οδηγό στήλη είναι το οδηγό στοιχείο. Οπότε με τις κατάλληλες πράξεις προκύπτει ο παρακάτω δεύτερος πίνακας SIMPLEX.

Συντ. Κέρδους C_j →		80	40	0	0	0	Ποσότητα	Ratio
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i	
0	S_1	0	2	1	0	-4	20	10
0	S_2	0	6	0	1	-2	110	18.3
80	X_1	1	0	0	0	1	35	-
-	Z_j	80	0	0	0	80	2800	-
-	C_j-Z_j	0	40	0	0	-80	-	-

Εφόσον η σειρά Cj-Zj του δεύτερου πίνακα SIMPLEX περιλαμβάνει και θετικό αριθμό η λύση που δίνει δεν είναι βέλτιστη. Οπότε η μεταβλητή που θα συμπεριληφθεί στην βάση είναι η X_2 που είναι οδηγός στήλη.

∴ Για την S_1: 10/2=5
∴ Για την S_2: 110/6=18.3
∴ Για την X_1: Αδύνατο

Οπότε θα διαλέξουμε την S_1 σαν οδηγός σειρά, και το οδηγό στοιχείο είναι το 2.

Επομένως ο τρίτος πίνακας SIPLEX προκύπτει ότι είναι ο τελικός πίνακας. Παρατηρείται ότι η σειρά Cj-Zj δεν περιέχει θετικά στοιχεία συνεπώς δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί περαιτέρω αύξηση του κέρδους.

Συντ. Κέρδους C_j →		80	40	0	0	0	Ποσότητα	Ratio
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i	
40	X_2	0	1	0.5	0	-2	10	-
0	S_2	0	0	-3	1	10	50	-
80	X_1	1	0	0	0	1	35	-
-	Z_j	80	40	20	0	0	3200	-
-	C_j-Z_j	0	0	-20	0	0	-	-

- **Οπότε η βέλτιστη λύση είναι:**
  - ✓ **AX_1=35 καρέκλες δερμάτινες**
  - ✓ **AX_2=10 καρέκλες υφασμάτινες**
- **Οπότε ο συνδυασμός παραγωγής δίνει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος που ανέρχεται σε 3200 ευρώ.**
- **Οι ελεύθεροι χρόνοι για τα τμήματα [$Σ_1$, $Σ_3$] μηδενίζονται πλήρως ενώ για το τμήμα $Σ_2$ περισσεύουν 50 ώρες.**
- ***Η λύση που θα έχει δώσει ο πίνακας Simplex είναι εφικτή αλλά υπάρχουν αρκετοί ακόμα συνδυασμοί παραγωγής που παράγουν το ίδιο κέρδος.***

1.3. Πτέρυγα Γ

Με βάση τα δεδομένα για την πτέρυγα Α, υλοποιήθηκε ο παρακάτω συγκεντρωτικός πίνακας, και οι εξισώσεις που ακολουθούν.

Τμήματα για τις Κατεργασίες	Προϊόντα		Διαθέσιμες ώρες
	$ΓΧ_1$	$ΓΧ_2$	
$Σ_1$	4	2	160
$Σ_2$	2	6	180
$Σ_3$	1	0	45
Κέρδη ανά μονάδα	80	30	

Μεγιστοποίηση κέρδους

$Z=80X_1+30X_2$

Περιορισμοί

- $4X_1+2X_2 \leq 160$
- $2X_1+6X_2 \leq 180$
- $1X_1+0X_2 \leq 45$
- $X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$

Μεταβλητές περιθωρίου

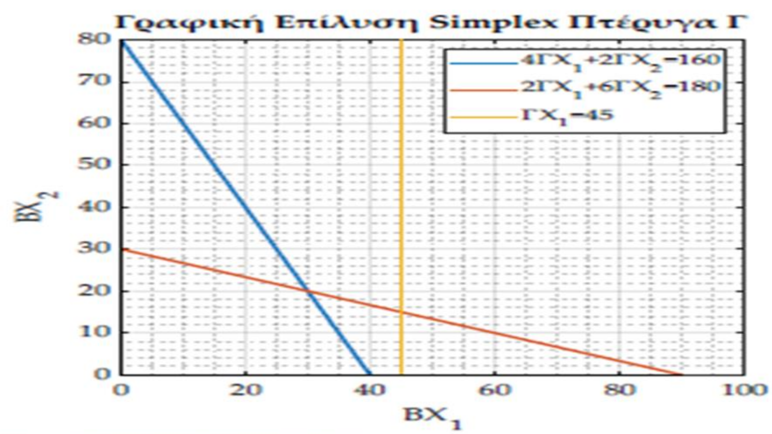
- S_1: Ώρες που δεν θα χρησιμοποιηθεί $Σ_1$.
- S_2: Ώρες που δεν θα χρησιμοποιηθεί $Σ_2$.
- S_3: Ώρες που δεν θα χρησιμοποιηθεί $Σ_3$.

Το επόμενο βήμα είναι να εφαρμόσουμε τις μεταβλητές περιθωρίου στους περιορισμούς και στην μεγιστοποίηση στου κέρδους. Οπότε έχουμε:

- $4X_1+2X_2+1S_1+0S_2+0S_3=160$
- $2X_1+6X_2+0S_1+1S_2+0S_3=180$
- $1X_1+0X_2+0S_1+0S_2+1S_3=45$
- $80X_1+30X_2+0S_1+0S_2+0S_3=Z$
- $X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0,\ S_3 \geq 0$

1.3.1. Γραφική Επίλυση

Στην δεξιά γραφική παράσταση απεικονίζεται η γραφική επίλυση Simplex του προβλήματος. Η συγκεκριμένη περίπτωση δεν έχει εφικτές λύσεις, καθώς δεν υπάρχουν σημεία που να ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς.



1.3.2. Επίλυση Simplex

Οπότε εφαρμόζοντας τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ο αρχικός πίνακας SIMPLEX.

Συντ. Κέρδους C_j →		80	30	0	0	0	Ποσότητα	Ratio
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i	
0	S_1	4	2	1	0	0	160	40
0	S_2	2	6	0	1	0	180	90
0	S_3	1	0	0	0	1	45	45
-	Z_j	0	0	0	0	0	0	-
-	C_j-Z_j	80	30	0	0	0	-	-

Επιλέγουμε την στήλη X_1 ως οδηγός στήλη γιατί έχει την μεγαλύτερη τιμή στην C_j-Z_j=80.

∴ Για την S_1: 160/4=40
∴ Για την S_2: 180/2=90
∴ Για την S_3: 45/1=45

Οπότε η S_1 είναι η οδηγός στήλη και το στοιχείο 4 στη διασταύρωση της οδηγού σειράς με την οδηγό στήλη είναι το οδηγό στοιχείο. Οπότε με τις κατάλληλες πράξεις προκύπτει ο παρακάτω δεύτερος πίνακας SIMPLEX.

Συντ. Κέρδους C_j →		80	30	0	0	0	Ποσότητα	Ratio
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i	
80	X_1	1	0.5	0.25	0	0	40	-
0	S_2	0	5	-0.5	1	0	100	-
0	S_3	0	-0.5	-0.25	0	1	5	-
-	Z_j	80	40	20	0	0	3200	-
-	C_j-Z_j	0	-10	-20	0	0	-	-

Ο δεύτερος πίνακας SIPLEX προκύπτει ότι είναι ο τελικός πίνακας. Παρατηρείται ότι η σειρά Cj-Zj δεν περιέχει θετικά στοιχεία συνεπώς δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί περαιτέρω αύξηση του κέρδους.

Αν και έχουμε βρει το μέγιστο κέρδος 3200, έχουμε ανυπαρξία εφικτής λύσης στην φραγμένη περιοχή.