Παράδειγμα*

Πρόβλημα Παραγωγής

Μια Βιομηχανία που κατασκευάζει μεταλλικές Πόρτες και Παράθυρα χρησιμοποιεί τα δυο τμήματα της (σιδηρουργείο και βαφείο). Η Διαδικασία παραγωγής είναι παρόμοια και για τα δύο προϊόντα της

Για την κατασκευή μιας πόρτας απαιτούνται 4 ώρες στο Σιδηρουργείο και 2 ώρες στο βαφείο.

Για κάθε παράθυρο απαιτούνται 2 ώρες στο Σιδηρουργείο και 2 ώρες στο Βαφείο.

Για την επόμενη εβδομάδα οι διαθέσιμες ώρες (συνολικά) στο Σιδηρουργείο είναι 600 και στο Βαφείο 480.

Για κάθε Πόρτα η Επιχείρηση κερδίζει 80 Ευρώ ενώ για κάθε παράθυρο 60 Ευρώ.

Ποια η παραγωγή της σε πόρτες και παράθυρα ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της επιχείρησης.

* Α.Σπυριδάκος, Επιχ.Ερευν.-ΑΤΕΙ Πειραιά

Παράδειγμα*

- Καθορισμός των Αγνώστων Μεταβλητών

  Χ: Παραγωγή σε Πόρτες, Υ: Παραγωγή σε Παράθυρα
- Αντικειμενική Συνάρτηση

  Μεγιστοποίηση Κέρδους Κέρδος = 80χ+60ψ δηλαδή max (80x+60ψ)
- Προσδιορισμός των Περιορισμών

  Ώρες Σιδηρουργείου <= 600 => 4χ +2ψ ≤ 600

  Ώρες Βαφείου <= 480 => 2χ+2ψ<=480

  Υπάρχουν και οι περιορισμοί χ,ψ>=0

Παράδειγμα*

<u>Πρόβλημα Παραγωγής</u>

Μια Βιομηχανία που κατασκευάζει μεταλλικές Πόρτες και Παράθυρα χρησιμοποιεί τα δυο τμήματα της (σιδηρουργείο και βαφείο). Η Διαδικασία παραγωγής είναι παρόμοια και για τα δύο προϊόντα της Για την κατασκευή μιας πόρτας απαιτούνται 4 ώρες στο Σιδηρουργείο και 2 ώρες στο βαφείο. Για κάθε παράθυρο απαιτούνται 2 ώρες στο Σιδηρουργείο και 2 ώρες στο Βαφείο. Για την επόμενη εβδομάδα οι διαθέσιμες ώρες (συνολικά) στο Σιδηρουργείο είναι 600 και στο Βαφείο 480. Για κάθε Πόρτα η Επιχείρηση κερδίζει 80 Ευρώ ενώ για κάθε παράθυρο 60 Ευρώ. Ποια η παραγωγή της σε πόρτες και παράθυρα ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της επιχείρησης.

- Καθορισμός των Αγνώστων Μεταβλητών

  X: Παραγωγή σε Πόρτες, Y: Παραγωγή σε Παράθυρα

- Αντικειμενική Συνάρτηση

  Μεγιστοποίηση Κέρδους Κέρδος = 80χ+60ψ δηλαδή max (80x+60ψ)

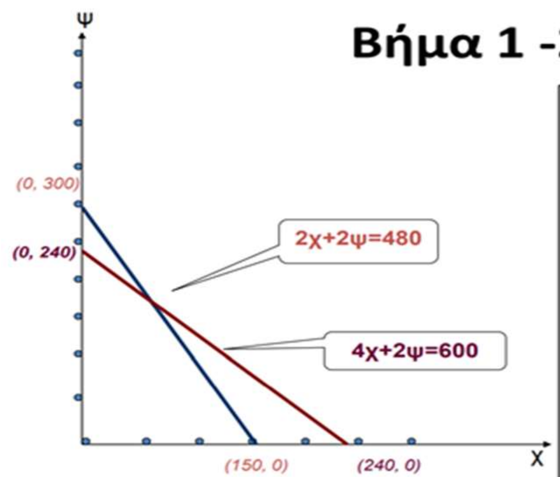
- Προσδιορισμός των Περιορισμών

  Ώρες Σιδηρουργείου <= 600 => 4χ +2ψ ≤ 600

  Ώρες Βαφείου <= 480 => 2χ+2ψ<=480

  Υπάρχουν και οι περιορισμοί χ,ψ>=0

Βήμα 1 -2



- Κατασκευάζουμε το σύστημα Αξόνων (χ,ψ)
- Με δεδομένο ότι χ>=0 και ψ>=0 εργαζόμαστε στο πάνω δεξιό τεταρτημόριο.
- Κατασκευάζουμε τις ευθείες

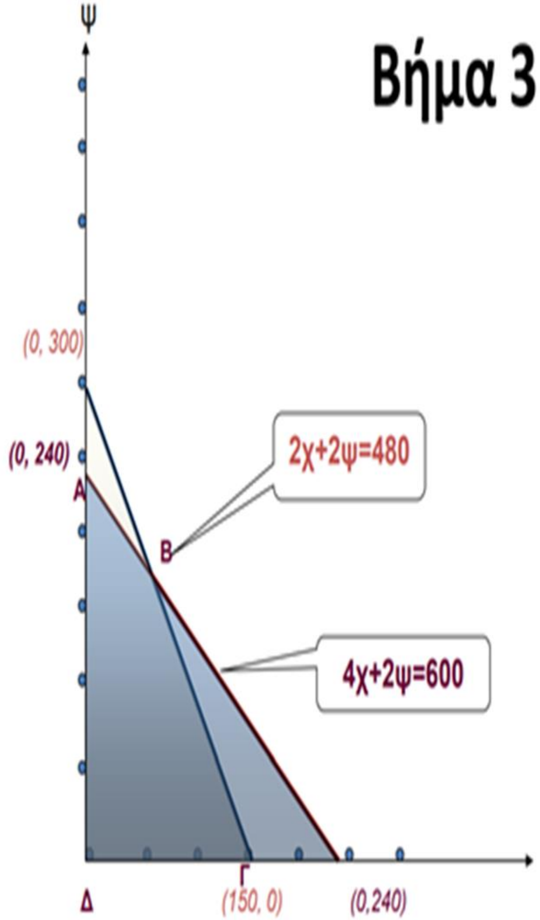
  4χ+2ψ=600

  (χ=0, ψ=300) – (ψ=0, χ=150)

  2χ+2ψ=480

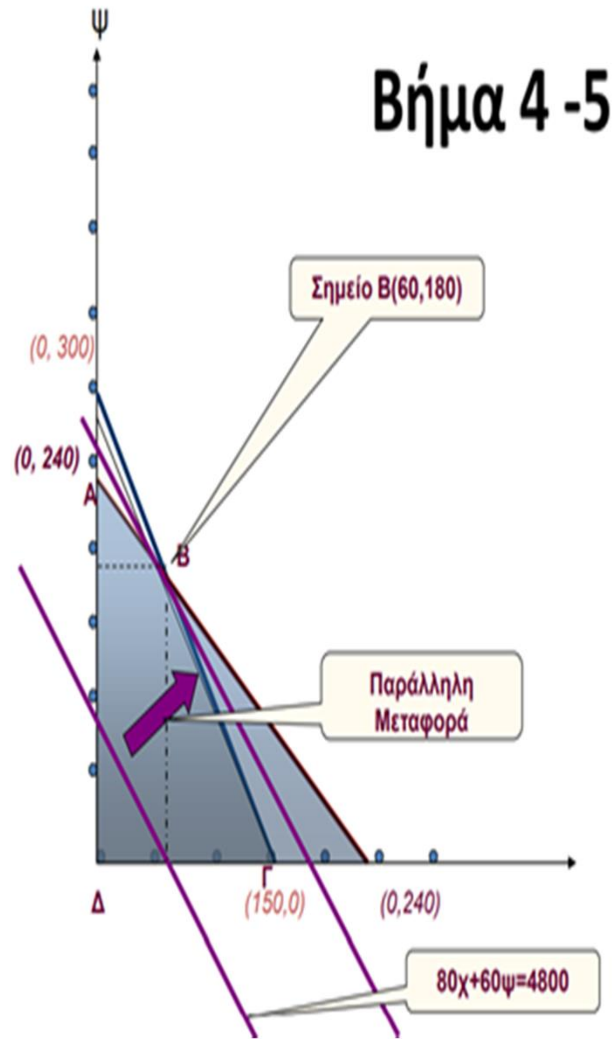
  (χ=0, ψ=240) – (ψ=0, χ=240)

Παράδειγμα*



Προσδιορισμός της περιοχής των εφικτών λύσεων

- Σκιαγραφούμε τις περιοχές του τεταρτημόριου που ικανοποιεί τις συνθήκες
- Η τομή των περιοχών ικανοποιεί και τις τέσσερις συνθήκες (ΑΒΓΔΑ)



- Κατασκευάζουμε μια αντιπροσωπευτική ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης

  80χ+60ψ=4800

  (χ=0, ψ=80)

  (ψ=0, χ=60)

- Παράλληλη μεταφορά της ευθείας (πάνω ή κάτω). Στο σημείο που φεύγει (Β) ή εισέρχεται στην περιοχή των εφικτών λύσεων έχουμε τη βέλτιστη λύση.

  (Χ=60, ψ=180)

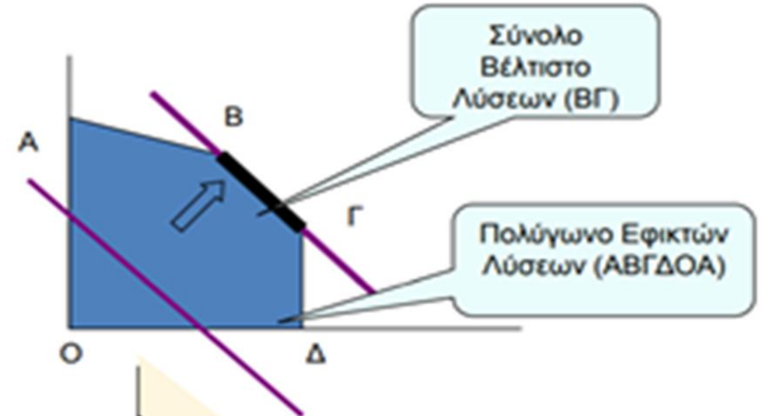
  Ζ=80*60+60*180=4800+10800=15600

* Α.Σπυριδάκος, Επιχ.Ερευν.-ΑΤΕΙ Πειραιά

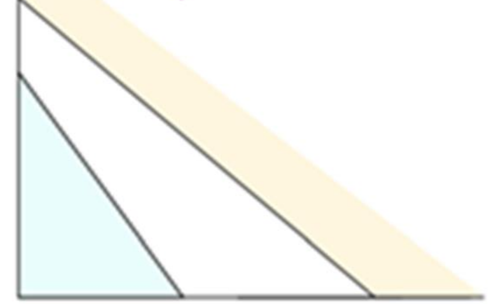
Παράδειγμα*

Περιπτώσεις

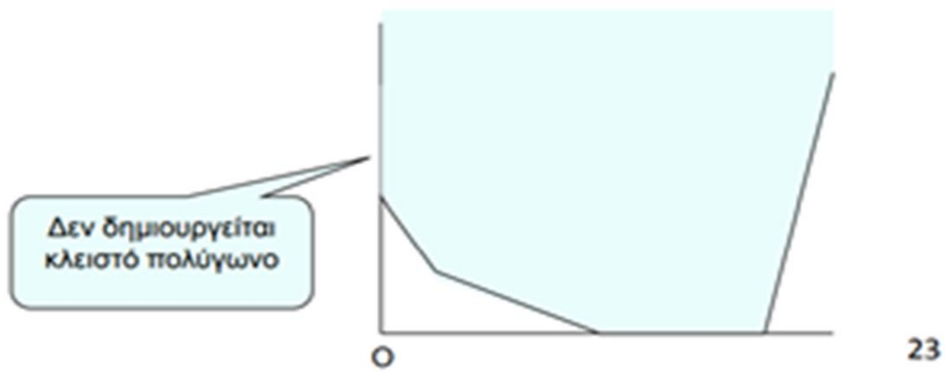
- Άπειρες Βέλτιστες Λύσεις



- Ασυμβίβαστοι Περιορισμοί (Αδύνατη λύση) – Δεν δημιουργείται πολύγωνο εφικτών λύσεων



- Μη φραγμένο σύνολο εναλλακτικών λύσεων



Η μέθοδος SIMPLEX

Σε εφαρμογές του Γραμμικού προγραμματισμού που αναφέρονται σε πραγματικά προβλήματα, ο αριθμός των μεταβλητών του προβλήματος είναι πολύ μεγαλύτερος των δύο, και επομένως η γραφική μέθοδος επίλυσης δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί. Δεδομένου ότι ο αριθμός των μεταβλητών και των περιορισμών των προβλημάτων ΓΠ ανέρχεται σε δεκάδες, εκατοντάδες ή ακόμα και σε χιλιάδες, αυτό που χρειαζόμαστε είναι μια συστηματική μέθοδος επίλυσης τους, η οποία να είναι δυνατό να υλοποιηθεί μέσω καταλλήλων προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή για την επίλυση προβλημάτων ΓΠ οποιουδήποτε μεγέθους. **(Ματαλλιωτάκης ΑΤΕΙ Κρήτης)**

Στην διάρκεια του Β' Παγκοσμίου πολέμου μια ομάδα επιστημόνων εργαζόταν σε προβλήματα βέλτιστης κατανομής μέσων στην Πολεμική Αεροπορία των ΗΠΑ. Μέλος αυτής της ομάδας ήταν και ο G.Dantzig ο οποίος διαμόρφωσε το γενικό πρόβλημα του Γ.Π. και ανέπτυξε την μέθοδο SIMPLEX το 1947. Η μέθοδος έγινε ευρύτερα γνωστή μετά τη δημοσίευση του άρθρου του με τίτλο «Activity Analysis of Production and Allocation» το 1951. Τα προβλήματα του Γ.Π. έχουν διαμορφωθεί και επιλυθεί πριν από την πρωτοποριακή εργασία του Dantzig και από άλλους επιστήμονες. Όμως εκείνος διαμόρφωσε το γενικό πρόβλημα του Γ.Π. και συγχρόνως ανακάλυψε τη μέθοδο επίλυσής του. **(Σ.Πολύζος, Εκδ.Τζίολα)**

Η μέθοδος SIMPLEX

Η αλγοριθμική μέθοδος Simplex περιλαμβάνει μία καθορισμένη σειρά επαναλαμβανόμενων διαδοχικών βημάτων υπολογισμών (=αλγόριθμος) μέσω των οποίων ξεκινώντας από ένα αρχικό ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων (αρχική λύση Simplex) οδηγούμαστε σε κάθε επανάληψη από ένα ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων σε ένα άλλο, γειτονικό με το προηγούμενο, το οποίο αντιστοιχεί σε μία καλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Οι διαδοχικές βελτιώσεις της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης επαναλαμβάνονται έως ότου εντοπισθεί η βέλτιστη λύση. **(Ματαλλιωτάκης ΑΤΕΙ Κρήτης)**

Η μέθοδος-simplex είναι μια απ' τις πιο επιτυχημένες εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού για τον προσδιορισμό του βέλτιστου συνδυασμού περιορισμένων πόρων για την επίτευξη του επιθυμητού αποτελέσματος. Θεωρητικά η μέθοδος αυτή είναι αρκετά αποτελεσματική και είναι ικανή να λύσει με τη βοήθεια υπολογιστή μεγάλα προβλήματα με εκατοντάδες ή και χιλιάδες μεταβλητές. Στην μέθοδο simplex το πρόβλημα που δίνεται συνήθως εξετάζεται πρώτα και μετατρέπεται σε κανονικής μορφής. Συγκεκριμένα οι ανισότητες σε κάθε περιορισμό γίνονται ισότητες. Το δεύτερο μέλος κάθε περιορισμού πρέπει να είναι μη αρνητικό. Αν είναι αρνητικό τότε και τα δυο μέλη πολλαπλασιάζονται με -1. **(Μπέτσιος, 2015)**

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Παράδειγμα: Μίξη παραγωγής στην ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Η *βιοτεχνία* ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ *παράγει δύο βασικά προϊόντα: τραπέζια και καρέκλες υψηλής ποιότητας.* Η *διαδικασία παραγωγής και* για *τα δύο προϊόντα περιλαμβάνει την επεξεργασία τους στα ίδια στάδια παραγωγής, αλλά απαιτεί διαφορετικές ώρες εργασίας για το κάθε προϊόν στα τρία τμήματα της επιχείρησης: το ξυλουργείο, το βαφείο και το στιλβωτήριο.*
Το *τμήμα παραγωγής της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ έχει* τυποποιήσει: *τη διαδικασία* κατασκευής *των προϊόντων της και έχει προσδιορίσει το μέσο χρόνο εργασίας ανά παραγόμενη μονάδα* σε *κάθε τμήμα.* Η *κατασκευή κάθε τραπεζιού απαιτεί* 8 *ώρες εργασίας στο ξυλουργείο,* 4 *ώρες στο βαφείο και* 4 *ώρες στο στιλβωτήριο, ενώ αντίστοιχα οι ώρες που απαιτούνται* για *κάθε καρέκλα είναι* 8 *στο ξυλουργείο,* 2 *στο βαφείο και* 3 *στο στιλβωτήριο. Για τον επόμενο μήνα,* ο *υπεύθυνος παραγωγής έχει προσδιορίσει ότι οι διαθέσιμες ώρες εργασίας στο ξυλουργείο ανέρχονται συνολικά* σε *960, στο βαφείο* σε *400, ενώ στο στιλβωτήριο* σε *420.*
Από τα στοιχεία που διαθέτει η διεύθυνση οικονομικών υπηρεσιών της εταιρείας, προκύπτει ότι το μικτό κέρδος της επιχείρησης με βάση τι τρέχουσες τιμές πώλησης, ανέρχεται σε *140€* για *κάθε τραπέζι και 100€* για *κάθε καρέκλα.*

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Κατάστρωση Αρχικού Πίνακα Simplex

Παράδειγμα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ:

Μεταβλητές	X_1 = Ποσότητα παραγόμενων Τραπεζιών,
	X_2 = Ποσότητα παραγόμενων Καρεκλών,
Αντικειμενική Συνάρτηση	Μεγιστοποίηση Κέρδους: 140 X1 + 100 X2.
Περιορισμοί:	$8X_1 + 8X_2 \leq 960$ Ώρες Ξυλουργείου
	$4X_1 + 2X_2 \leq 400$ Ώρες Βαφείου
	$4X_1 + 3X_2 \leq 420$ Ώρες Στιλβωτηρίου
	$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

➢Η εφαρμογή της μεθόδου **Simplex** επιβάλει τη μετατροπή όλων των περιορισμών που διατυπώνονται με μορφή ανισοτήτων σε ισότητες

➢Η μετατροπή αυτή επιτυγχάνεται με την εισαγωγή στο μοντέλο των **μεταβλητών περιθωρίου,** οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες των πόρων που δεν χρησιμοποιούνται

Στην περίπτωση του παραδείγματος που εξετάζουμε, ορίζουμε τρεις μεταβλητές περιθωρίου (μία για κάθε περιορισμό) ως εξής:

•S_1 = Ώρες Ξυλουργείου που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή
•S_2 = Ώρες Βαφείου που δεν θα χρησιμοποιηθούν
•S_3 = Ώρες Στιλβωτηρίου που δεν θα χρησιμοποιηθούν.

Ο όρος **μεταβλητές περιθωρίου** έχει την έννοια ότι οι τιμές αυτών των μεταβλητών αντιστοιχούν στις διαφορές μεταξύ του αριστερού μέρους της ανισότητας (απαιτούμενη ποσότητα) και του αντίστοιχου δεξιού μέρους (διαθέσιμη ποσότητα)

* Ματαλλιωτάκης.-ΑΤΕΙ Κρήτης

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Π.χ, ας θεωρήσουμε την περίπτωση παραγωγής 70 τραπεζιών (X_1=70) και 40 καρεκλών (X_2=40). Οι ώρες ξυλουργείου που θα απαιτηθούν είναι 8(70)+8(40) = 880. Σε αυτή την περίπτωση η τιμή της μεταβλητής S_1 είναι 80 ώρες (960 διαθέσιμες - 880 που θα χρησιμοποιηθούν).

➢Οι περιορισμοί του προβλήματος με την **προσθήκη των μεταβλητών περιθωρίου** γράφονται ως εξής:

$8X_1 + 8X_2 + S_1$	=	960	Περιορισμός Ξυλουργείου
$4X_1 + 2X_2 + S_2$	=	400	Περιορισμός Βαφείου
$4X_1 + 3X_2 + S_3$	=	420	Περιορισμός Στιλβωτηρίου

ή αν θέλουμε να συμπεριλάβουμε όλες τις μεταβλητές σε όλους τους περιορισμούς έχουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων με πέντε αγνώστους (2 αρχικές μεταβλητές και 3 μεταβλητές περιθωρίου)

$8X_1 + 8X_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 960$	Περιορισμός Ξυλουργείου
$4X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 = 400$	Περιορισμός Βαφείου
$4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 = 420$	Περιορισμός Στιλβωτηρίου

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

➢Εφόσον οι μεταβλητές περιθωρίου εκφράζουν τις ποσότητες των πόρων που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή, δεν υπάρχει καμία συνεισφορά τους στο κέρδος

➢Επομένως, μπορούν να συμπεριληφθούν και στην αντικειμενική συνάρτηση με μηδενικούς συντελεστές κέρδους.

Μετά την προσθήκη των μεταβλητών περιθωρίου, το μαθηματικό μοντέλο του ΓΠ για τη πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ διατυπώνεται στην πλήρη **κανονική μορφή** του ως εξής:

Μεγιστοποίηση $140\ X_1 + 100\ X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{ll}
(\Xi) & 8X_1 + 8X_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 960 \\
(\mathrm{B}) & 4X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 = 400 \\
(\Sigma) & 4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 = 420 \\
 & X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0,\ S_3 \geq 0
\end{array}$$

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Αλγεβρικός Προσδιορισμός Λύσεων

Έχουμε ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων
με πέντε μεταβλητές

•Εφόσον **ο αριθμός των εξισώσεων είναι μικρότερος από τον αριθμό των αγνώστων, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις**

•Μπορούμε να θέσουμε 2 από τις μεταβλητές ίσες με μηδέν και να υπολογίσουμε τις τιμές των 3 άλλων μεταβλητών λύνοντας το αλγεβρικό σύστημα των 3 εξισώσεων με τις 3 μη μηδενικές μεταβλητές

- •Αυτός ο τρόπος προσδιορισμού λύσεων δίνει λύσεις που αντιστοιχούν σε ακραία σημεία, που ορισμένα από αυτά ορίζουν την περιοχή των εφικτών λύσεων.

Μια εύκολη υπολογιστικά λύση είναι να θέσουμε τις μεταβλητές $X_1 = 0$ και $X_2 = 0$, επομένως οι τιμές των υπόλοιπων μεταβλητών είναι ίσες με τις σταθερές της κάθε εξίσωσης, δηλαδή $S_1 = 960$, $S_2 = 400$ και $S_3 = 420$.

* Ματαλλιωτάκης.-ΑΤΕΙ Κρήτης

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Είναι ευνόητο ότι η λύση αυτή δεν είναι ιδιαίτερα ελκυστική, διότι αντιπροσωπεύει την περίπτωση παραγωγής 0 τεμαχίων τόσο σε καρέκλες όσο και σε τραπέζια. Με μηδενική παραγωγή, καμία από τις διαθέσιμες ώρες στα τμήματα παραγωγής δεν χρησιμοποιείται. Αυτό δηλώνουν και οι τιμές των μεταβλητών περιθωρίου S_1=960 ώρες, S_2=400 ώρες και S_3=420 ώρες. Η Λύση αυτή αντιστοιχεί στο ακραίο σημείο (0,0), την αρχή των αξόνων (Σχήμα 5).

- **Ως αρχική λύση**, που απαιτείται για την έναρξη της επαναληπτικής διαδικασίας, μπορεί να θεωρηθεί η προφανής λύση **X_1=O και X_2=0, S_1=960, S_2=400 και S_3=420.**
- Μία τέτοια λύση, όπου όλες οι πραγματικές μεταβλητές του προβλήματος έχουν τιμή 0, είναι λύση που μπορούμε να παράγουμε εύκολα για τα περισσότερα προβλήματα ΓΠ.
- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στην αρχική αυτή λύση είναι προφανώς 0

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Ο αρχικός πίνακας Simplex

➢Τα βήματα της μεθόδου **Simplex** υλοποιούνται μέσω αλγεβρικών πράξεων στα δεδομένα του προβλήματος τα οποία απεικονίζονται σε μία συγκεκριμένη διάταξη πίνακα που ονομάζεται **πίνακας Simplex.**

➢Ο πρώτος πίνακας **Simplex** περιλαμβάνει τους συντελεστές όλων των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς του προβλήματος διατεταγμένα ως εξής:

Αρχικός Πίνακας Simplex

Συντ. Κέρδους $c_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
$\downarrow$	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	8	8	1	0	0	960
0	S_2	4	2	0	1	0	400
0	S_3	4	3	0	0	1	420
	Z_j	0	0	0	0		0
	$C_j - Z_j$	140	100	0	0	0	

* Ματαλλιωτάκης.-ΑΤΕΙ Κρήτης

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

- Κάθε πίνακας **Simplex** αντιστοιχεί σε μία εφικτή λύση του προβλήματος

- Ο αρχικός πίνακας **Simplex** αντιστοιχεί στη λύση $S_1 = 960$, $S_2 = 400$ και $S_3 = 420$ **(βασικές μεταβλητές)** και $X_1 = 0$ και $X_2 = 0$ **(μη βασικές μεταβλητές).**

- Οι μεταβλητές που έχουν μη μηδενικές τιμές ονομάζονται **βασικές μεταβλητές,** ενώ οι υπόλοιπες **μη βασικές**

- Στον αρχικό πίνακα **Simplex** του παραδείγματος ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ, οι βασικές μεταβλητές είναι οι S_1(S_2 και S_3 ενώ μη βασικές οι μεταβλητές X_1 και X_2

- Το σύνολο των βασικών μεταβλητών καλείται και **βάση** της λύσης που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο πίνακα

- Κάθε βασική μεταβλητή αντιστοιχεί σε έναν περιορισμό του προβλήματος, επομένως ο αριθμός των βασικών μεταβλητών σε κάθε πρόβλημα ΓΠ είναι ίσος με τον αριθμό των περιορισμών του προβλήματος.

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Αρχικός Πίνακας Simplex

Συντ. Κέρδους $c_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	8	8	1	0	0	960
0	S_2	4	2	0	1	0	400
0	S_3	4	3	0	0	1	420
	Z_j	0	0	0	0		0
	C_j - Z_j	140	100	0	0	0	

- **Η πρώτη στήλη του πίνακα Simplex** περιλαμβάνει τους συντελεστές κέρδους στην αντικειμενική συνάρτηση που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές
- **Στη δεύτερη στήλη** τοποθετούμε τις βασικές μεταβλητές (S_1, S_2 και S_3 για τον αρχικό πίνακα)
- **Οι επόμενες στήλες αποτελούν** το κυρίως τμήμα του πίνακα **Simplex** και αντιστοιχούν στους συντελεστές των μεταβλητών του προβλήματος στους αντίστοιχους περιορισμούς
- **Η τελευταία στήλη** αντιστοιχεί στις σταθερές ποσότητες των περιορισμών
- Οι **τιμές των βασικών μεταβλητών** δίνονται στην τελευταία στήλη του πίνακα
- Δηλαδή η τιμή 960 αντιστοιχεί στην S_1, η τιμή 400 στην S_2 και η τιμή 420 στη μεταβλητή S_3
- **Οι τιμές των μη βασικών μεταβλητών είναι πάντοτε μηδέν**
- **Η πρώτη σειρά του πίνακα** περιλαμβάνει τους συντελεστές κέρδους όλων των μεταβλητών όπως αναφέρονται στην αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Αρχικός Πίνακας Simplex

Συντ. Κέρδους $c_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	8	8	1	0	0	960
0	S_2	4	2	0	1	0	400
0	S_3	4	3	0	0	1	420
	Z_j	0	0	0	0		0
	$C_j - Z_j$	140	100	0	0	0	

Οι σειρές Cj, Zj, Cj-Zj

•Η σειρά C_j περιέχει τους συντελεστές κέρδους της αντικειμενικής συνάρτησης

•Τα στοιχεία αυτής της σειράς μπορεί να ερμηνευθούν ως η μικτή αύξηση που προκύπτει στο συνολικό κέρδος αν η τιμή της κάθε μεταβλητής αυξηθεί κατά μία μονάδα.

•Έτσι, μία μονάδα της X_1 αποφέρει στην επιχείρηση επιπλέον κέρδος 140€

•Τα στοιχεία της σειράς Z_j δηλώνουν το κατά πόσο θα μειώνονταν το συνολικό κέρδος αν η τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής αυξηθεί κατά μία μονάδα

Πώς όμως δικαιολογείται η μείωση του κέρδους;

* Ματαλλιωτάκης.-ΑΤΕΙ Κρήτης

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Αρχικός Πίνακας Simplex

Συντ. Κέρδους $c_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	8	8	1	0	0	960
0	S_2	4	2	0	1	0	400
0	S_3	4	3	0	0	1	420
	Z_j	0	0	0	0		0
	$C_j - Z_j$	140	100	0	0	0	

Οι σειρές C_j, Z_j, C_j-Z_j

Ας θεωρήσουμε τη μεταβλητή X_1.

•Για να αυξηθεί η X_1 κατά μία μονάδα θα πρέπει να ελαττωθούν η S_1 κατά 8 μονάδες, η S_2 κατά 4 μονάδες και η S_3 κατά 4 μονάδες

•Η μείωση των S_1, S_2 και S_3 δεν έχει κάποια επίπτωση στο συνολικό κέρδος διότι οι συντελεστές κέρδους των S_1, S_2 και S_3 είναι 0 (θυμηθείτε ότι οι μεταβλητές περιθωρίου δηλώνουν ώρες παραγωγής που ούτως ή άλλως είναι διαθέσιμες αλλά δεν χρησιμοποιούνται).

•Στα επόμενα βήματα της διαδικασίας **Simplex** , οι βασικές μεταβλητές θα αλλάξουν και επομένως τα στοιχεία της σειράς $\mathbf{Z_j}$ δεν θα είναι μηδενικά.

•Η τελευταία σειρά του πίνακα, $\mathbf{C_j}$-$\mathbf{Z_j}$ είναι αυτή που δηλώνει την καθαρή επίπτωση στο συνολικό κέρδος (αύξηση κέρδους - μείωση κέρδους) στην περίπτωση που η αντίστοιχη μη βασική μεταβλητή του προβλήματος αυξηθεί κατά μία μονάδα

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

I

- Η μέθοδος **Simplex** είναι μια επαναληπτική μέθοδος
- Βασίζεται σε μία επαναλαμβανόμενη σειρά βημάτων με την οποία από ένα δεδομένο πίνακα **Simplex** παράγουμε τον επόμενο, ο οποίος αντιστοιχεί σε μία καλύτερη λύση κ.ο.κ., έως ότου προσδιορισθεί η βέλτιστη λύση
- Η επαναληπτική αυτή διαδικασία **περιλαμβάνει 6 βήματα**

* Ματαλλιωτάκης.-ΑΤΕΙ Κρήτης

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Βήμα 1 Έλεγχος κριτηρίου βελτιστοποίησης

- Ελέγχουμε αν η λύση που δίνει ο τρέχων πίνακας **Simplex** είναι η βέλτιστη
- Η λύση είναι βέλτιστη όταν όλα τα στοιχεία της σειράς C_j-Z_j είναι αρνητικά ή μηδενικά **για προβλήματα μεγιστοποίησης**
- **Για προβλήματα ελαχιστοποίησης** το κριτήριο είναι όλα τα στοιχεία της σειράς C_j-Z_j να είναι θετικά ή μηδενικά
- Αν η λύση είναι βέλτιστη, τότε η διαδικασία έχει ολοκληρωθεί, αν όχι, εκτελούμε τα βήματα 2 έως 5

Βήμα 2 Επιλογή νέας βασικής μεταβλητής

- Εφόσον η λύση δεν είναι βέλτιστη, επιδέχεται βελτιώσεις. Βελτίωση της λύσης σημαίνει ότι από το ακραίο σημείο που αντιστοιχεί στην τρέχουσα λύση, πρέπει να μετακινηθούμε σε ένα γειτονικό ακραίο σημείο
  - Αυτό απαιτεί αντικατάσταση μιας βασικής με μία από τις μη βασικές μεταβλητές.
- Επιλέγουμε εκείνη τη μη βασική μεταβλητή που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο θετικό στοιχείο της σειράς C_j-Z_j για να συμπεριληφθεί στη βάση
- Η μεταβλητή αυτή συνεισφέρει στη μεγαλύτερη αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης
- Τη στήλη που αντιστοιχεί στη νέα βασική μεταβλητή την ονομάζουμε **οδηγό στήλη**

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Βήμα 3 Επιλογή βασικής μεταβλητής που αντικαθίσταται

•Εφόσον μια νέα μεταβλητή "μπαίνει" στη βάση, μια άλλη θα πρέπει να "φύγει", ώστε να διατηρηθεί ίδιος ο αριθμός των βασικών μεταβλητών

• Για να προσδιορίσουμε τη μεταβλητή που θα αντικατασταθεί:

  • Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της τελευταίας στήλης του πίνακα (ποσότητες) με τα αντίστοιχα θετικά στοιχεία της οδηγού στήλης

  •Το μικρότερο θετικό κλάσμα προσδιορίζει τη μεταβλητή που θα αντικατασταθεί (αρνητικές τιμές αγνοούνται)

  •Τη σειρά της μεταβλητής που θα αντικατασταθεί την αποκαλούμε **οδηγό σειρά**

  •Το στοιχείο που βρίσκεται στην τομή της οδηγού σειράς με την οδηγό στήλη το ονομάζουμε **οδηγό στοιχείο**

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Βήμα 4 Υπολογισμός νέων τιμών οδηγού σειράς

Οι νέες τιμές υπολογίζονται με διαίρεση όλων των στοιχείων της οδηγού σειράς με το οδηγό στοιχείο

Νέα Οδηγός Σειρά	=	Προηγούμενη Οδηγός Σειρά	/	Οδηγό στοιχείο

Βήμα 5 Υπολογισμός νέων τιμών για τις υπόλοιπες σειρές του πίνακα

Οι νέες τιμές κάθε σειράς, εκτός της οδηγού σειράς που υπολογίστηκε στο προηγούμενο βήμα, υπολογίζονται ως εξής:

Νέες Τιμές Σειράς	=	Προηγούμενες Τιμές	–	Στοιχείο Σειράς στην Οδηγό στήλη	x	Νέα Οδηγό Σειρά

Βήμα 6 Υπολογισμός των νέων τιμών για τις σειρές Z_j και C_j-Z_j

•Οι τιμές της σειράς Z_j υπολογίζονται με πολλαπλασιασμό των στοιχείων κάθε στήλης με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών

•Οι τιμές της σειράς C_j-Z_j προκύπτουν από την αφαίρεση των τιμών των σειρών C_j και Z_j.

* Ματαλλιωτάκης.-ΑΤΕΙ Κρήτης

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Αρχικός Πίνακας Simplex

Συντ. Κέρδους $c_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	8	8	1	0	0	960
0	S_2	4	2	0	1	0	400
0	S_3	4	3	0	0	1	420
	Z_j	0	0	0	0		0
	$C_j - Z_j$	140	100	0	0	0	

Βήμα 1 Όλα τα στοιχεία της σειράς **C_j-Z_j** του πρώτου πίνακα **Simplex** είναι **μεγαλύτερα ή ίσα με μηδέν**.
Επομένως, η λύση που δίνει ο πρώτος πίνακας **Simplex** δεν είναι βέλτιστη και προχωρούμε στα βήματα 2 έως 5

Βήμα 2 Η επιλογή της μεταβλητής που θα συμπεριληφθεί στη βάση, γίνεται με βάση τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά **C_j-Z_j.**
Επιλέγουμε τη μεταβλητή X_1 γιατί έχει τιμή **C_j-Z_j**=140, ενώ η X_2 έχει τιμή 100.
Επομένως, η στήλη της X_1 είναι η οδηγός στήλη.

Βήμα 3 Μετά την επιλογή της X_1 για να συμπεριληφθεί στη βάση θα πρέπει να εξετάσουμε ποια από τις βασικές μεταβλητές S_1, S_2 και S_3 θα αντικατασταθεί από αυτή.

Υπολογίζουμε τα πηλίκα των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης του πίνακα προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Ο Δεύτερος Πίνακας Simplex - ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Για την S_1: 960 ώρες ξυλουργείου /8 ώρες ανά τραπέζι =120 τραπέζια
Για την $\mathbf{S_2}$: 400 ώρες βαφείου /4 ώρες ανά τραπέζι =**100 τραπέζια**
Για την S_3: 420 ώρες στιλβωτηρίου / 4 ώρες ανά τραπέζι =105 τραπέζια

Επομένως:

➢**Η $\mathbf{S_2}$ που αντιστοιχεί στο μικρότερο θετικό πηλίκο, είναι αυτή που θα αντικατασταθεί από τη $\mathbf{X_1}$**

➢**<u>Η σειρά $\mathbf{S_2}$ είναι η οδηγός σειρά και το στοιχείο 4 στη διασταύρωση της οδηγού σειράς με την οδηγό στήλη είναι το οδηγό στοιχείο</u>**

Συντ. Κέρδους C_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	8	8	1	0	0	960
0	S_2	4	2	0	1	0	400 →
0	S_3	4	3	0	0	1	420
	Z_j	0	0	0	0		0
	$C_j - Z_j$	140 ↑	100	0	0	0	

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Βήμα 4 Αφού ορίσαμε ήδη ότι η μεταβλητή X_1 θα αντικαταστήσει την S_2, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές του δεύτερου πίνακα **Simplex**.

Καταρχήν **θα αντικαταστήσουμε την οδηγό σειρά**.

Το οδηγό στοιχείο είναι το 4.

Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της οδηγού σειράς με το 4.

Άρα, η νέα οδηγός σειρά είναι:

140	X_1	4/4= 1	2/4= 1/2	0/4= 0	1/4= 1/4	0/4= 0	400/4= 100

Ο νέος πίνακας **Simplex** θα έχει την εξής μορφή σε αυτό το σημείο της διαδικασίας:

Συντ. Κέρδους c_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1						
140	X_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	S_3						
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

- η X_1 αντικατέστησε την S_2 στη βάση
- η τιμή της X_1 είναι 100 μονάδες
- ο συντελεστής κέρδους της X_1 εμφανίζεται στη στήλη συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών

* Ματαλλιωτάκης.-ΑΤΕΙ Κρήτης

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Βήμα 5 Απομένει να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τις σειρές που αντιστοιχούν στις S_1 και S_3 καθώς και τις νέες τιμές στις σειρές $\mathbf{Z_j}$ και $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$

Νέα Σειρά S_1:

προηγούμενες τιμές σειράς S_1	8	8	1	0	0	960
μείον	-	-	-	-	-	-
(στοιχείο σειράς στην οδηγό στήλη) x (νέες τιμές της οδηγού σειράς X_1)	8(1)	8(1/2)	8(0)	8(1/4)	8(0)	8(100)
=	=	=	=	=	=	=
νέες τιμές της σειράς S_1	0	4	1	-2	0	160

Νέα Σειρά S_3:

προηγούμενες τιμές σειράς S_3	4	3	0	0	1	420
μείον	-	-	-	-	-	-
(στοιχείο σειράς στην οδηγό στήλη) x (νέες τιμές της οδηγού σειράς X_1)	4(1)	4(1/2)	4(0)	4(1/4)	4(0)	4(100)
=	=	=	=	=	=	=
νέες τιμές της σειράς S_3	0	1	0	-1	1	20

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Επομένως, ο νέος πίνακας **Simplex** μετά τον υπολογισμό και των σειρών S_1 και S_3 θα έχει την εξής μορφή:

2ος Πίνακας Simplex – ΕΠΙΛΟΞΥΛ

Συντ. Κέρδους c_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	4	1	-2	0	160
140	X_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	S_3	0	1	0	-1	1	20
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

- Ο νέος πίνακας **Simplex** περιέχει επίσης τρεις μοναδιαίες στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές S_1, X_1, και S_3

- Οι αλγεβρικές πράξεις που εκτελέσαμε για να υπολογίσουμε τις νέες τιμές του πίνακα **Simplex** είχαν ακριβώς αυτό ως στόχο
  - Να μετατρέψουμε δηλαδή τη στήλη που αντιστοιχεί στη νέα βασική μεταβλητή X_1 σε μοναδιαία στήλη.

- Η διαίρεση με το οδηγό στοιχείο έδωσε την τιμή 1 στη θέση της τομής της σειράς X_1 με τη στήλη X_1

- Ο πολλαπλασιασμός των νέων τιμών της οδηγού σειράς με το 8 και 4 αντίστοιχα και η αφαίρεση των γινομένων από τις τιμές των σειρών S_1 και S_3 είχε σαν αποτέλεσμα να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης X_1.

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Βήμα 5 Απομένει τώρα ο υπολογισμός των τιμών για τις σειρές $\mathbf{Z_j}$ και $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$

•Οι τιμές της σειράς $\mathbf{Z_j}$ αντιστοιχούν στη μείωση που θα προκύψει στο κέρδος στην περίπτωση που επιλέξουμε να συμπεριληφθεί στη βάση μια από τις μη βασικές μεταβλητές. Στο σημείο αυτό μπορούμε να εξηγήσουμε καλύτερα την έννοια των τιμών της σειράς $\mathbf{Z_j}$

•Η νέα λύση που προέκυψε είναι X_1=100, X_2=0, και S_1=160, S_2=0, και S_3=20.

•Δηλαδή, παραγωγή 100 τραπεζιών, καθόλου καρεκλών, με αχρησιμοποίητες 160 ώρες εργασίας στο ξυλουργείο, 0 ώρες στο βαφείο και 20 ώρες στο στιλβωτήριο.

Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε την περίπτωση παραγωγής και καρεκλών.

•Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της X_2 από 0 που είναι σε αυτό το σημείο της διαδικασίας, θα αυξηθεί

•Σύμφωνα με τη μεθοδολογία **Simplex**, αυτό σημαίνει ότι η X_2 θα γίνει βασική μεταβλητή, δηλαδή θα συμπεριληφθεί στη βάση (αντικαθιστώντας κάποια από τις μεταβλητές S_1 (X_1 ή S_3).

•Ο δεύτερος πίνακας **Simplex** μας δίνει τις εξής πληροφορίες από τις τιμές των συντελεστών μετατροπής της στήλης X_2:

Για αύξηση της τιμής της X_2 κατά μία μονάδα απαιτείται η μείωση της S_1 κατά 4, της X_1 κατά X_1 1/2 και της S_3 κατά 1. Δηλαδή, μείωση της παραγωγής τραπεζιών κατά μισό, και μείωση επίσης των αχρησιμοποίητων ωρών στο ξυλουργείο κατά 4 και στο στιλβωτήριο κατά 1 (δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε 4 και 1 ώρες αντίστοιχα από αυτές που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί με βάση τη λύση του 2ου πίνακα **Simplex**).

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

❖Για να υπολογίσουμε τις τιμές της σειράς $\mathbf{Z_j}$ πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές μετατροπής για κάθε μεταβλητή με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών και προσθέτουμε τα γινόμενα ως εξής:

2ος Πίνακας Simplex – ΕΠΙΛΟΞΥΛ (τελική μορφή)

Συντ. Κέρδους c_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	4	1	-2	0	160
140	X_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	S_3	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	0(0) +1(140) +0(0) 140	4(0) +½(140) +1(0) 70	1(0) +0(140) +0(0) 0	-2(0) +¼(140) +1(0) 35	1(0) +0(140) +1(0) 0	
	$C_j - Z_j$	0	30	0	-35	0	

•Οι τιμές της σειράς $\mathbf{C_j}$-$\mathbf{Z_j}$ προκύπτουν από αφαίρεση της σειράς $\mathbf{Z_j}$ από τη σειρά $\mathbf{C_j}$
Βλέπουμε λοιπόν ότι η αύξηση της X_2 κατά 1 μονάδα (παραγωγή μίας καρέκλας) θα έχει σαν αποτέλεσμα καθαρή αύξηση των κερδών κατά 30.

•Ο υπολογισμός του κέρδους που αντιστοιχεί στη λύση του τρέχοντος πίνακα **Simplex** υπολογίζεται με την άθροιση των γινομένων της τελευταίας στήλης που δίνει τις τιμές των βασικών μεταβλητών με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών.

•Κέρδος = 160(0) + 100(140) + 20(0)= 14000

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Ο τρίτος πίνακας Simplex

Βήμα 1

Εφόσον η σειρά C_j-Z_j του δεύτερου πίνακα Simplex περιλαμβάνει και θετικούς αριθμούς, η λύση που δίνει ο δεύτερος πίνακας Simplex δεν είναι βέλτιστη. Επομένως, θα πρέπει να επαναλάβουμε τα πέντε βήματα για να διαμορφώσουμε τον τρίτο κατά σειρά πίνακα **Simplex**.

Βήμα 2

Η μεταβλητή που θα συμπεριληφθεί στη βάση είναι η X_2, διότι είναι η μόνη μεταβλητή με θετική τιμή 30 στη σειρά C_j-Z_j

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε καρέκλα που θα παραχθεί, το κέρδος αυξάνεται κατά 30€.

Η στήλη της X_2 είναι η οδηγός στήλη.

Βήμα 3 Μετά την επιλογή της X_2 για να συμπεριληφθεί στη βάση θα πρέπει να επιλέξουμε ποια από τις υπάρχουσες βασικές μεταβλητές S_1, X_1 και S_3 θα αντικατασταθεί
Αν υπολογίσουμε τους λόγους των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης του πίνακα προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης, έχουμε:

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Για την S_1: 160 ώρες ξυλουργείου / 4 ώρες ανά καρέκλα =40 καρέκλες
Για την X_1: 100 τραπέζια / 1/2 τραπέζια ανά καρέκλα =200 καρέκλες
Για την S_3: 20 ώρες ξυλουργείου / 1 ώρα ανά καρέκλα =20 καρέκλες
Η S_3 αντιστοιχεί στη μικρότερη θετική τιμή και επομένων είναι αυτή που θα αντικατασταθεί από την X_2

Η νέα οδηγός σειρά, οδηγός στήλη και οδηγό στοιχείο έχουν ως εξής:

Συντ. Κέρδους C_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	4	1	-2	0	160
140	X_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	S_3	0	1	0	-1	1	20➜
	Z_j	140	70	0	35	0	14000
	$C_j - Z_j$	0	30 ↑	0	-35	0	

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Βήμα 4

- Προχωρούμε στον υπολογισμό των τιμών του τρίτου πίνακα **Simplex**.
- **Καταρχήν αντικαθιστούμε την οδηγό σειρά**
- **Το οδηγό στοιχείο είναι το 1**
- **Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της οδηγού σειράς με το 1**, και επομένως η νέα οδηγός σειρά παραμένει ως έχει:

Συντ. Κέρδους $C_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
$\downarrow$	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1						
140	X_1						
100	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

- η X_2 αντικατέστησε την S_3 στη βάση
- η τιμή της X_2 είναι 20 μονάδες
- ο συντελεστής κέρδους της X_2 εμφανίζεται στη στήλη συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών

* Ματαλλιωτάκης.-ΑΤΕΙ Κρήτης

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Βήμα 5

- Απομένει τώρα να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τις σειρές που αντιστοιχούν στην S_1 και την X_1
- Οι πράξεις είναι αντίστοιχες με αυτές για τον υπολογισμό του 2ου πίνακα **Simplex**

Νέα Σειρά S_1:

προηγούμενες τιμές σειράς S_1	0	4	1	-2	0	160
μείον	-	-	-	-	-	-
(στοιχείο σειράς στην οδηγό στήλη) x (νέες τιμές της οδηγού σειράς X_2)	4(0)	4(1)	4(0)	4(-1)	4(1)	4(20)
=	=	=	=	=	=	=
νέες τιμές της σειράς S_1	0	0	1	2	-4	80

Νέα Σειρά X_1:

προηγούμενες τιμές σειράς X_1	1	1/2	0	1/4	0	100
μείον	-	-	-	-	-	-
(στοιχείο σειράς στην οδηγό στήλη) x (νέες τιμές της οδηγού σειράς X_2)	1/2(0)	1/2(1)	1/2(0)	1/2(-1)	1/2(1)	1/2(20)
=	=	=	=	=	=	=
νέες τιμές της σειράς X_1	1	0	0	3/4	-1/2	90

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Ο νέος πίνακας **Simplex** μετά τον υπολογισμό και των σειρών S_1 και X_1 θα έχει την εξής μορφή:

3^{os} Πίνακας Simplex - ΕΠΙΛΟΞΥΛ

Συντ. Κέρδους $C_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
$\downarrow$	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140	X_1	1	0	0	3/4	-1/2	90
100	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

Οι τρεις μοναδιαίες στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές στον τρίτο πίνακα **Simplex** είναι οι S_1, X_1, και X_2·

* Ματαλλιωτάκης.-ΑΤΕΙ Κρήτης

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Βήμα 6 Απομένει τώρα ο υπολογισμός των τιμών για τις σειρές $\mathbf{Z_j}$ και $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$

Ο υπολογισμός των τιμών της σειράς $\mathbf{Z_j}$ γίνεται με πολλαπλασιασμό των συντελεστών μετατροπής κάθε μεταβλητής με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών και πρόσθεση των γινομένων ως εξής:

3ος Πίνακας Simplex – ΕΠΙΛΟΞΥΛ (τελική μορφή)

Συντ. Κέρδους $c_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140	X_1	1	0	0	3/4	-1/2	90
100	S_3	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	0(0) +1(140) +0(100) 140	0(0) 0(140) +1(100) 100	1x0) +0(140) +0(100) 0	-2(0) +¾(140) -1(100) 5	-4(0) -½(140) +1(100) 30	14600
	$C_j - Z_j$	0	0	0	-5	-30	

- **Οι τιμές** της σειράς $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$ προκύπτουν από **αφαίρεση** της σειράς $\mathbf{Z_j}$ από τη σειρά $\mathbf{C_j}$.
- Ο υπολογισμός του κέρδους που αντιστοιχεί στη λύση του τρέχοντος πίνακα **Simplex**, υπολογίζεται με την άθροιση των γινομένων της τελευταίας στήλης που δίνει τις τιμές των μεταβλητών με τους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών
- **Κέρδος = 90(140) + 20(100) = 14600**

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

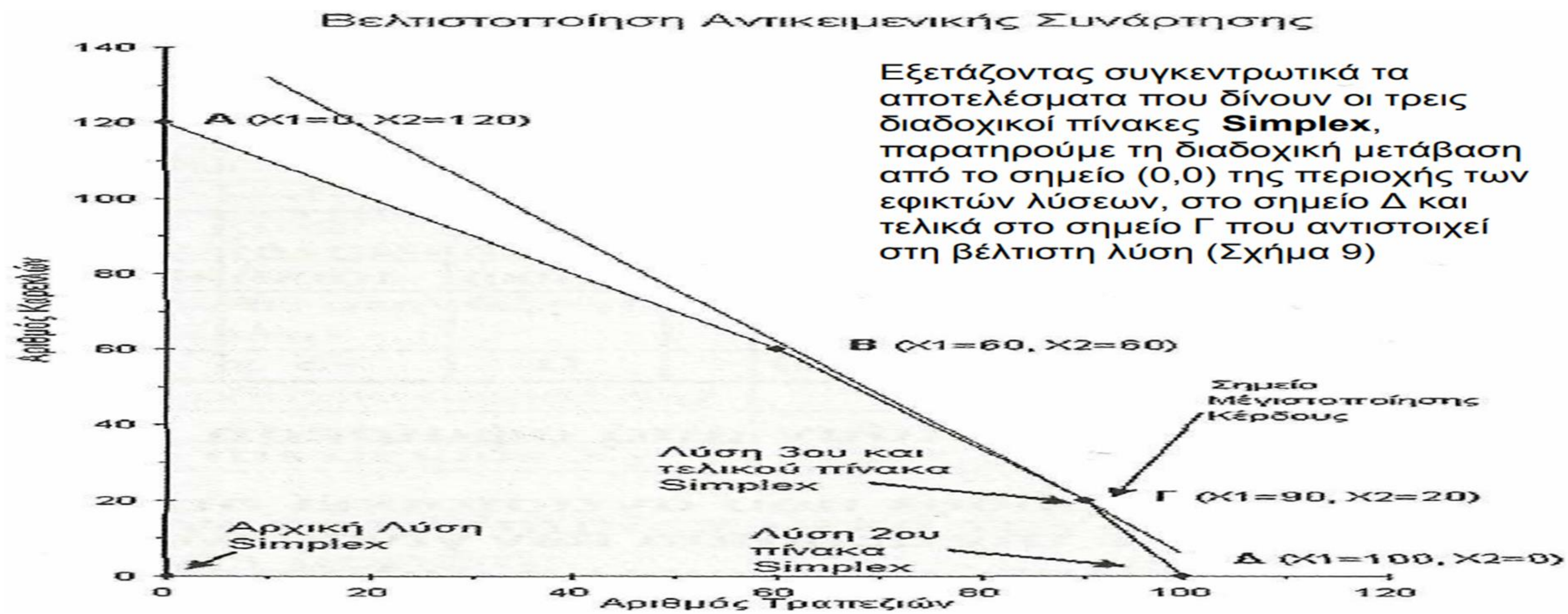
Κριτήριο βελτιστοποίησης

- Ο παραπάνω τρίτος πίνακας **Simplex** είναι και ο τελικός πίνακας **Simplex** για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ
- Παρατηρούμε ότι η σειρά **C_j-Z_j δεν περιέχει θετικά στοιχεία**, συνεπώς δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί περαιτέρω αύξηση του κέρδους.
- Η βέλτιστη λύση σύμφωνα με τον τελικό πίνακα **Simplex** είναι:

X_1 = 90 τραπέζια	S_1 = 80 ώρες διαθέσιμες στο ξυλουργείο
X_2 = 20 καρέκλες	S_2 = 0 ώρες διαθέσιμες στο βαφείο
	S_3 = 0 ώρες διαθέσιμες στο στιλβωτήριο

•**<u>Αυτός ο συνδυασμός της παραγωγής δίνει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος, το οποίο ανέρχεται σε 14.600€.</u>**

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*



Οι λύσεις των διαδοχικών βημάτων της μεθόδου Simplex

Αρχικός Πίνακας: *Σημείο (0,0) – αρχή των αξόνων*

Παραγωγή: $X_1 = 0$ τραπέζια $X_2 = 0$ καρέκλες

Διαθέσιμοι Πόροι: $S_1 = 960$ μη χρησιμοποιούμενες ώρες (διαθέσιμες) ξυλουργείου

$S_2 = 400$ διαθέσιμες ώρες βαφείου

$S_3 = 420$ διαθέσιμες ώρες στιλβωτηρίου

Κέρδος 0€

Δεύτερος Πίνακας: *Σημείο Δ(100,0)*

Παραγωγή: $X_1 = 100$ τραπέζια $X_2 = 0$ καρέκλες

Διαθέσιμοι Πόροι: $S_1 = 160$ μη χρησιμοποιούμενες ώρες (διαθέσιμες) ξυλουργείου

$S_2 = 0$ διαθέσιμες ώρες βαφείου

$S_3 = 20$ διαθέσιμες ώρες στιλβωτηρίου

Κέρδος 14.000€

Τρίτος Πίνακας (τελικός): *Σημείο Γ(90,20)*

Παραγωγή: $X_1 = 90$ τραπέζια $X_2 = 20$ καρέκλες

Διαθέσιμοι Πόροι: $S_1 = 80$ μη χρησιμοποιούμενες ώρες (διαθέσιμες) ξυλουργείου

$S_2 = 0$ διαθέσιμες ώρες βαφείου

$S_3 = 0$ διαθέσιμες ώρες στιλβωτηρίου

Κέρδος 14.600€

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Οικονομική Ερμηνεία των αποτελεσμάτων της μεθόδου Simplex

•Το παράδειγμα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ από το στάδιο της διατύπωσης του επιχειρησιακού προβλήματος έως την επίλυση του

Δεδομένα Επιχειρησιακού Προβλήματος – Παράμετροι

Τμήμα Παραγωγής	Απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή 1 μονάδας		Διαθέσιμες ώρες σε κάθε τμήμα
	X_1 (τραπέζια)	X_2 (καρέκλες)	
Ξυλουργείο	8 ώρες	8 ώρες	960 ώρες
Βαφείο	4 ώρες	2 ώρες	400 ώρες
Στιλβωτήριο	4 ώρες	3 ώρες	420 ώρες
Κέρδος ανά Μονάδα Προϊόντος	140€	100€	

Μαθηματικό Μοντέλο

Μεγιστοποίηση $140X_1 + 100X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

Υπό τους περιορισμούς:

(Ξ) $8X_1 + 8X_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 960$

(Β) $4X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 = 400$

(Σ) $4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 = 420$

$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0,\ S_3 \geq 0$

Βέλτιστη λύση Μεθόδου Simplex

Συντ. Κέρδους $c_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140	X_1	1	0	0	3/4	-1/2	90
100	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	140	100	0	5	30	14600
	$C_j - Z_j$	0	0	0	-5	-30	

Φυσική Ερμηνεία Βέλτιστης Λύσης

Παραγωγή	Διαθέσιμοι Πόροι
$X_1 = 90$ τραπέζια	$S_1 = 80$ μη χρησιμοποιηθείσες ώρες ξυλουργείου
$X_2 = 20$ καρέκλες	$S_2 = 0$ χρησιμοποιηθείσες ώρες βαφείου
	$S_3 = 0$ χρησιμοποιηθείσες ώρες στιλβωτηρίου
Κέρδος	14.600€

* Ματαλλιωτάκης.-ΑΤΕΙ Κρήτης

Παράδειγμα Επίλυσης SIMPLEX*

Δεσμευτικοί και Μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

•Οι περιορισμοί (Β) και (Σ) του προβλήματος, που αντιστοιχούν στις ώρες βαφείου και στιλβωτηρίου καλούνται **δεσμευτικοί περιορισμοί** διότι είναι αυτοί που καθορίζουν τις τιμές των μεταβλητών και η τομή τους προσδιορίζει το σημείο της βέλτιστης λύσης (Σχήμα 9)

•Αντίθετα, ο περιορισμός (Ξ) είναι μη **δεσμευτικός** δεδομένου ότι δεν προσδιορίζει τη βέλτιστη λύση (η ευθεία που αντιστοιχεί στον περιορισμό των ωρών ξυλουργείου βρίσκεται πάνω από το βέλτιστο σημείο Γ - σχήμα 9)

•Οι μη δεσμευτικοί περιορισμοί δεν περιορίζουν τη βέλτιστη λύση με την έννοια ότι ακόμα και αν δεν υπήρχαν, η βέλτιστη λύση δεν θα άλλαζε

•Οι μεταβλητές περιθωρίου που αντιστοιχούν στους δεσμευτικούς περιορισμούς έχουν την τιμή μηδέν, ενώ για τους μη δεσμευτικούς περιορισμούς οι αντίστοιχες μεταβλητές περιθωρίου έχουν θετικές τιμές.

Δεσμευτικοί και Μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

•Εφόσον λοιπόν στα τμήματα βαφείου και στιλβωτηρίου έχουν χρησιμοποιηθεί όλες οι διαθέσιμες ώρες, αν στα τμήματα αυτά προστεθεί ή αφαιρεθεί έστω και μία ώρα εργασία», η βέλτιστη λύση θα άλλαζε

•Αντίθετα, η βέλτιστη λύση δεν θα άλλαζε αν είχαμε μία επιπλέον ώρα ή μία ώρα λιγότερη στο τμήμα ξυλουργείου, διότι ήδη περισσεύουν 80 ώρες, οπότε αν μεν είχαμε 1 ώρα λιγότερη θα περίσσευαν 79 ώρες και αν είχαμε 1 ώρα περισσότερη θα περίσσευαν 81 ώρες

•Επομένως, η αύξηση των ωρών στο τμήμα ξυλουργείου δεν δικαιολογείται με οικονομικούς όρους

• Θα μπορούσαμε μάλιστα να τις ελαττώσουμε έως και 80 χωρίς αυτό να έχει καμία επίπτωση στη βέλτιστη παραγωγή και στα κέρδη