ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Επιχειρησιακή Έρευνα

ΕΛ.ΜΕ.ΠΑ.

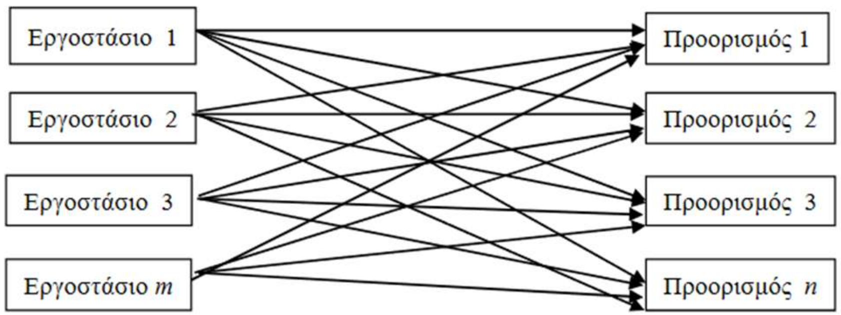
Το πρόβλημα μεταφοράς

- Αφορά τη μεταφορά ενός προϊόντος από διάφορους σταθμούς παραγωγής σε διάφορες θέσεις κατανάλωσης με το ελάχιστο δυνατό κόστος.
- Πρόκειται για το πιο σπουδαίο πρότυπο προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού με ειδική δομή.
- Για την επίλυσή του έχουν αναπτυχθεί αποτελεσματικές τεχνικές (παραλλαγές της μεθόδου Simplex).
- Το πρόβλημα ήταν γνωστό από το 1941 (Hitchcock, 1941) και ως π.γ.π. θεμελιώθηκε και λύθηκε από τον Dantzig το 1951.
- Ως ειδική περίπτωση του προβλήματος μεταφοράς μπορούν να θεωρηθούν μια μεγάλη σειρά πρακτικών προβλημάτων, που δεν αναφέρονται στις μεταφορές, και για το λόγο αυτό η μέθοδος επίλυσής του είναι ένα σπουδαίο εργαλείο για την εν γένει Επιχειρησιακή Έρευνα.
- Ανήκει στην κατηγορία των προβλημάτων δικτυωτής ανάλυσης.

Το πρόβλημα μεταφοράς*

Η τυπική μορφή ενός προβλήματος μεταφοράς είναι η εξής:

- ✓ Υποθέτουμε ότι υπάρχουν σε ορισμένες θέσεις A_1, A_2, … A_m κέντρα παραγωγής ενός προϊόντος, ενώ η ποσότητα του προϊόντος που παράγεται από κάθε κέντρο είναι ορισμένη
- ✓ Οι ποσότητες του προϊόντος που παράγεται στα m κέντρα θα καταναλωθούν σε κάποιες θέσεις B_1, B_2 …. B_n που αποτελούν κέντρα κατανάλωσης, ενώ σε κάθε κέντρο κατανάλωσης θα καταναλωθεί ορισμένη ποσότητα του προϊόντος
- ✓ Για την μεταφορά μίας μονάδας προϊόντος από την θέση A_i στο κέντρο κατανάλωσης B_j απαιτείται ένα κόστος μεταφοράς c_{ij}.
- ✓ Προκύπτει το πρόβλημα καθορισμού των ποσοτήτων x_{ij} του προϊόντος, οι οποίες θα πρέπει να μεταφερθούν από την θέση i στην θέση j, έτσι ώστε το συνολικό κόστος μεταφορών για μία χρονική περίοδο να είναι ελάχιστο.



* Σεραφείμ Πολύζος, Τζιόλα, 2017

Το πρόβλημα μεταφοράς

Για την επίλυση του προβλήματος της μεταφοράς χρησιμοποιούνται οι πίνακες των περιορισμών και του κόστους.

Η τεχνική επίλυσης του προβλήματος περιλαμβάνει δύο φάσεις:

1. Η πρώτη φάση αφορά την εύρεση μιας αρχικής βασικής λύσης
2. Με βάση την αρχική λύση που βρέθηκε, ευρίσκεται άλλη καλύτερη αυτής και η διαδικασία επαναλαμβάνεται, έως ότου βρεθεί η βέλτιστη λύση.

Το πρόβλημα της μεταφοράς με κατάλληλο μετασχηματισμό έχει πάντοτε μία βασική λύση τουλάχιστον.

* Σεραφείμ Πολύζος, Τζιόλα, 2017

Το πρόβλημα μεταφοράς*

Το βασικό ερώτημα στο πρόβλημα της μεταφοράς είναι το πως θα μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα που μεταφέρεται από τον $i-$ σταθμό στην $j-$ πηγή έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς αλλά παράλληλα, να ικανοποιούνται οι περιορισμοί προσφοράς και ζήτησης, υπολογίζοντας με άλλα λόγια το άριστο σχέδιο μεταφοράς.

Το συγκεκριμένο ερώτημα μπορεί να παρουσιαστεί με βάση το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και καλείται ισορροπημένο καθώς η συνολική προσφορά ισούται με την συνολική ζήτηση. Η συγκεκριμένη παραδοχή ισχύει σε όλα τα προβλήματα μεταφοράς. Στην περίπτωση που δεν ισχύει, απαιτεί κατάλληλο μετασχηματισμό του παρακάτω προβλήματος.

Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που προκύπτει κατά την διαδικασία αυτή παριστάνεται παρακάτω ως εξής:

$$\min c = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$ **Αντικειμενική Συνάρτηση**

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i, i = 1,2,\dots,m$$ **Περιορισμοί προσφοράς**

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j, j = 1,2,\dots,n$$ **Περιορισμοί ζήτησης**

$$x_{ij} \ge 0, i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n$$ **Περιορισμοί μη-αρνητικότητας**

* πηγή: repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5698/5/kef. 7.pdf

Το πρόβλημα μεταφοράς*

Για την εύρεση της αρχικής βασικής λύσης αναπτύχθηκαν διάφορες εμπειρικές μέθοδοι, με σημαντικότερες:

- τη μέθοδο της βορειοδυτικής γωνίας,
- την μέθοδο της ελάχιστης μήτρας
- τη μέθοδο Vogel και

Παράδειγμα:

Μία επιχείρηση προσπαθεί να διαθέσει το προϊόν της σε 12 διαφορετικούς προορισμούς με βάση τρία εργοστάσια παραγωγής (εργοστάσιο 1,2,3) και 4 κέντρων Διανομής (προορισμός 1,2,3,4). Τα εργοστάσια προσφέρουν ποσότητα ίση με 350, 300, 450 μονάδες αντίστοιχα. Οι προορισμοί ζητούν ποσότητα ίση με 200, 300, 400, 200 μονάδες αντίστοιχα. Τα ανά μονάδα κόστη μεταφοράς είναι:

- από το εργοστάσιο 1 είναι 5,5,3 και €9 για τους τέσσερις προορισμούς.
- από το εργοστάσιο 2 είναι 6,3,4 και €7 για τους τέσσερις προορισμούς.
- από το εργοστάσιο 3 είναι 5,4,6 και €8 για τους τέσσερις προορισμούς.

Αρχικά θα πρέπει να ορίσουμε τις μεταβλητές του προβλήματος. Σε αυτή την περίπτωση, οι μεταβλητές του προβλήματος αντιστοιχούν στην ποσότητα μεταφοράς από το κάθε εργοστάσιο στον κάθε προορισμό. Θα έχουμε μία μεταβλητή για κάθε μια από τις πιθανές διαδρομές, δηλαδή θα προκύψουν 12 μεταβλητές. Ο παρακάτω πίνακας αποτυπώνει το πρόβλημα:

* πηγή: repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5698/5/kef. 7.pdf

Το πρόβλημα μεταφοράς*

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$	είναι η ποσότητα μεταφοράς από το εργοστάσιο 1 στους 4 προορισμούς
$x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$	είναι η ποσότητα μεταφοράς από το εργοστάσιο 2 στους 4 προορισμούς
$x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}$	είναι η ποσότητα μεταφοράς από το εργοστάσιο 3 στους 4 προορισμούς

Πίνακας *Ορισμός μεταβλητών απόφασης στο πρόβλημα μεταφοράς.*

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, σ' αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε πως η προσφορά των πηγών ισούται με την ζήτηση των προορισμών. Τέτοια προβλήματα μεταφοράς λέγονται **ισορροπημένα.**

Η μαθηματική διατύπωση του παραπάνω προβλήματος μεταφοράς είναι η ακόλουθη:

$$\min_{x_{11},\dots x_{34}} Cost = 5x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 9x_{14} + 6x_{21} + 3x_{22} +$$

$$4x_{23} + 7x_{24} + 5x_{31} + 4x_{32} + 6x_{33} + 8x_{34}$$

$$s.t.$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 350 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 300 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 450 \end{array}\right\} \quad \textbf{Περιορισμοί Εργοστασίων}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 200 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 300 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 400 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 200 \end{array}\right\} \quad \textbf{Περιορισμοί Προορισμών}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, \ j = 1, 2, \dots, n$$

* πηγή: repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5698/5/kef. 7.pdf

Το πρόβλημα μεταφοράς*

Ο παρακάτω πίνακας αποτελεί την σύνοψη του παραπάνω προβλήματος μεταφοράς και θα πρέπει πάντα να σχηματίζεται προκειμένου να προβούμε στην χρήση των μεθόδων επίλυσης που θα δούμε στην συνέχεια.

	Από/Πρός	Προορισμοί				
		Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Παραγωγή πηγών
Πηγές	Εργοστάσιο 1	5	5	3	9	350
	Εργοστάσιο 2	6	3	4	7	300
	Εργοστάσιο 3	5	4	6	8	450
	Ζήτηση προορισμών	200	300	400	200	1100

Σ’ αυτό το σημείο και προτού προχωρήσουμε στην παρουσίαση των μεθόδων επίλυσης των προβλημάτων μεταφοράς να επισημάνουμε ότι:

● είναι προφανές από την μαθηματική διατύπωση του προβλήματος της μεταφοράς, πως η χρήση της μεθόδου Simplex δεν ενδείκνυται εξαιτίας του σχετικά μεγάλου αριθμού μεταβλητών.

● εξαιτίας αυτής της ιδιαιτερότητας στην διατύπωση, μπορούν να αναπτυχθούν πιο αποτελεσματικοί αλγόριθμοι επίλυσης.

● πρέπει να αναφερθεί πως όλα τα προβλήματα κατά τα οποία η μήτρα συντελεστών έχει αυτή την μορφή μπορούν να αναχθούν σε πρόβλημα μεταφοράς ανεξάρτητα από την αρχική διατύπωσή τους.

* πηγή: repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5698/5/kef. 7.pdf

1. Η Μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας*

Μια από τις απλούστερες μεθοδολογίες εύρεσης της αρχικής βασικής εφικτής λύσης σε ένα πρόβλημα μεταφοράς αποτελεί η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας.

Για την εφαρμογή της ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. ξεκινάμε πάντα από το βορειοδυτικό (πάνω και αριστερά) κελί του πίνακα και εκχωρούμε το μέγιστο δυνατό φορτίο ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση του αντίστοιχου προορισμού ή να εξαντληθεί η προσφορά της πηγής.

2. αν δεν εξαντληθεί η προσφορά της πηγής, συνεχίζουμε στο διπλανό κελί της ίδιας γραμμής (εργοστάσιο i), εκχωρώντας το μέγιστο δυνατό φορτίο προκειμένου να μηδενιστεί η προσφορά.

3. στην συνέχεια μεταβαίνουμε στο ακριβώς από κάτω κελί και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία έχοντας πάντα ως γνώμονα το βορειοδυτικό κελί του πίνακα.

4. στα ισορροπημένα προβλήματα μεταφοράς, με την τελευταία εκχώρηση μηδενίζονται ταυτόχρονα τόσο η ζήτηση του προορισμού όσο και η προσφορά της πηγής.

* πηγή: repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5698/5/kef. 7.pdf

1. Η Μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας*

Παρακάτω παρουσιάζεται ο τρόπος εφαρμογής της μεθόδου Βορειοδυτικής Γωνίας χρησιμοποιώντας το παραπάνω παράδειγμα.

Σύμφωνα με το Βήμα 1, επιλέγουμε το βορειοδυτικότερο κελί του πίνακα και αποδίδουμε στην μεταβλητή x_{11} την μέγιστη δυνατή ποσότητα που μπορεί να μεταφερθεί από την πηγή 1 στον προορισμό 1, δηλαδή 200.

Συνεπώς, θα μπορούμε να υπολογίσουμε την προσφορά (si=si-xij) και την ζήτηση (di=di-xij) που απομένει (Βήμα 2ο) και παρατηρούμε ότι όλη η ζήτηση του Προορισμού 1 έχει εξαντληθεί ενώ η διαθέσιμη ποσότητα του Εργοστασίου 1 έχει μειωθεί σε 150 μονάδες (η πρώτη στήλη μπορεί συνεπώς και να διαγραφεί). Τα παραπάνω αποτυπώνονται στον παρακάτω πίνακα 1.

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	5 (200)	5	3	9	150 (350-200)
Εργοστάσιο 2	6	3	4	7	300
Εργοστάσιο 3	5	4	6	8	450
Ζήτηση	200 (200-200=0)	300	400	200	1100

* πηγή: repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5698/5/kef. 7.pdf

1. Η Μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας*

Ακολουθώντας τώρα το τρίτο βήμα, θα πρέπει να προχωρήσουμε στο δεύτερο κελί της πρώτης γραμμής. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το Εργοστάσιο 1 έχει διαθέσιμη ποσότητα 150 μονάδες ενώ η αντίστοιχη ζήτηση του Προορισμού 2 είναι 300 μονάδες.

Θα εκχωρήσουμε την μέγιστη δυνατή ποσότητα των μονάδων που διαθέτει το Εργοστάσιο 1 και συνεπώς θα απομείνει 150 μονάδες (ζήτησης) για τον Προορισμό 2, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα 2.

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	5 (200)	5 (150)	3	9	0 (150-150)
Εργοστάσιο 2	6	3	4	7	300
Εργοστάσιο 3	5	4	6	8	450
Ζήτηση	0	150 (300-150)	400	200	1100

Η ποσότητα του Εργοστασίου 1 έχει τώρα εξαντληθεί οπότε μπορούμε να συνεχίσουμε στην επόμενη γραμμή στην ίδια στήλη και να μετακινηθούμε στο κελί που βρίσκεται ακριβώς από κάτω, δηλαδή να διατηρήσουμε σταθερό τον προορισμό αλλά να μεταβούμε στο Εργοστάσιο 2 και να ακολουθήσουμε το τελευταίο βήμα της μεθόδου.

* πηγή: repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5698/5/kef. 7.pdf

1. Η Μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας*

Επομένως, μπορούμε να εκχωρήσουμε την ποσότητα των 150 μονάδων μηδενίζοντας την ζήτηση του Προορισμού 2 και να υπάρξει ποσότητα διαθέσιμη 150 μονάδων στο Εργοστάσιο 2, πετυχαίνοντας έτσι την διαγραφή της δεύτερης στήλης. Το αποτέλεσμα φαίνεται στον παρακάτω πίνακα 3.

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	5 (200)	5 (150)	3	9	0
Εργοστάσιο 2	6	3 (150)	4	7	150 (300-150)
Εργοστάσιο 3	5	4	6	8	450
Ζήτηση	0	0 (150-150=0)	400	200	1100

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία, εξαντλούμε διαδοχικά την προσφορά των πηγών και ικανοποιούμε την ζήτηση των προορισμών. Στην περίπτωση των ισορροπημένων προβλημάτων μεταφοράς, με τελευταία εκχώρηση, εξαντλείται η προσφορά του τελευταίου εργοστασίου και ταυτόχρονα ικανοποιείται η ζήτηση του τελευταίου προορισμού.

Οι παρακάτω πίνακες 4, 5 και 6 παρουσιάζουν τον τρόπο με τον οποίο καταλήγουμε σε μια αρχική βασική εφικτή λύση χρησιμοποιώντας την μέθοδο Βορειοδυτικής Γωνίας.

* πηγή: repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5698/5/kef. 7.pdf

1. Η Μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας*

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	5 (200)	5 (150)	3	9	0
Εργοστάσιο 2	6	3 (150)	4 (150)	7	0
Εργοστάσιο 3	5	4	6	8	450
Ζήτηση	0	0	250 (400-150)	200	1100

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	5 (200)	5 (150)	3	9	0
Εργοστάσιο 2	6	3 (150)	4 (150)	7	0
Εργοστάσιο 3	5	4	6 (250)	8	150 (450-250)
Ζήτηση	0	0	0 (250-250)	200	1100

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	5 (200)	5 (150)	3	9	0
Εργοστάσιο 2	6	3 (150)	4 (150)	7	0
Εργοστάσιο 3	5	4	6 (250)	8 (200)	0 (200-200)
Ζήτηση	0	0	0	0 (200-200)	1100

* πηγή: repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5698/5/kef. 7.pdf

1. Η Μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας*

Τέλος, είναι αναγκαίο να υπολογίσουμε το κόστος της αρχικής λύσης το οποίο μπορεί να υπολογιστεί με απλές αλγεβρικές πράξεις χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα 7.

Διαδρομή	Κόστος/μονάδα	Μονάδες	Συνολικό Κόστος
x11	5	200	1000
x12	5	150	750
x22	3	150	450
x23	4	150	600
x33	6	250	1500
x34	8	200	1600
Σύνολο			5900

Είναι προφανές από τον παραπάνω πίνακα 7, πως το ελάχιστο κόστος μεταφοράς που προκύπτει χρησιμοποιώντας την μέθοδο Βορειοδυτικής Γωνίας είναι €5900.

Η βασική λογική που ακολουθεί η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας συνίσταται στην εξάντληση όλης της υπάρχουσας προσφοράς μιας γραμμής (που αντιστοιχεί σε μια πηγή ή ένα εργοστάσιο) με ταυτόχρονη ικανοποίηση και της ζήτησης κάθε στήλης (που αντιστοιχεί σε κάποιον προορισμό ή κέντρο).

* πηγή: repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5698/5/kef. 7.pdf

1. Η Μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας*

Τέλος, μπορούμε να συνοψίσουμε τα χαρακτηριστικά της μεθόδου Βορειοδυτικής Γωνίας στις παρακάτω παρατηρήσεις:

● είναι η απλούστερη υπολογιστικά μέθοδος.

● δεν λαμβάνει υπόψη της το ανά μονάδα κόστος μεταφοράς και ως εκ τούτου το κόστος μεταφοράς είναι το υψηλότερο συγκριτικά με τις υπόλοιπες μεθόδους.

● στην περίπτωση που η ζήτηση (προσφορά) υπερβαίνει την προσφορά (ζήτηση), προσθέτουμε έναν (μια) επιπλέον προορισμό (πηγή) που απορροφά την ζήτηση (προσφορά) με μηδενικά συνήθως κόστη, κάτι τέτοιο όμως θα προσδιορίζεται από το εκάστοτε πρόβλημα.

* πηγή: repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5698/5/kef. 7.pdf

ΑΣΚΗΣΗ

Μία μεταλλευτική εταιρεία εξορύσσει το βασικό προϊόν που εμπορεύεται από τρία λατομεία, έστω Λ1, Λ2 και Λ3. Η εβδομαδιαία παραγωγή του κάθε λατομείου είναι 75, 150 και 75 τόνοι χαλικιού αντίστοιχα. Το προϊόν που εξορύσσεται πρέπει να μεταφερθεί σε πέντε κύριους καταναλωτές, έστω Κ1, Κ2, Κ3, Κ4 και Κ5, οι οποίοι χρειάζονται για τις ανάγκες τους 100, 60, 40, 75 και 25 τόνους χαλικιού ανά εβδομάδα αντίστοιχα.

Το πρόβλημα που απασχολεί τη διοίκηση της εταιρείας είναι η ελαχιστοποίηση του απαιτούμενου κόστους για τη μεταφορά της ποσότητας του προϊόντος στους καταναλωτές. Για το σκοπό αυτό έγινε αναλυτική κοστολόγηση, η οποία έδωσε τα αποτελέσματα του ακόλουθου πίνακα (τα αριθμητικά δεδομένα συμβολίζουν το κόστος μεταφοράς σε € ανά τόνο χαλικιού).

Tips για το Πρόβλημα Μεταφοράς*

- ✓ Στην περίπτωση που οι διαθέσιμες ποσότητες στις πηγές υπερβαίνουν τις ζητηθείσες στους προορισμούς, δηλαδή S<D, τότε προσθέτουμε έναν **τεχνητό προορισμό**, με ποσότητα S-D>0 και κόστος μεταφοράς ανάλογα με το πρόβλημα.
- ✓ Στην αντίθετη περίπτωση όπου η συνολική ζήτηση των προορισμών υπερβαίνει τις αντίστοιχες διαθέσιμες ποσότητες, δηλαδή S>D, τότε προσθέτουμε μία πηγή που παράγει ποσότητα D-S>0 και το κόστος μεταφοράς εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα.
- ✓ Εάν δεν υπάρχει μέσο μεταφοράς από έναν σταθμό παραγωγής σε έναν σταθμό προορισμού, τότε θεωρούμε ότι υπάρχει ένα μέσο με κόστος **έναν πολύ μεγάλο αριθμό**.
- ✓ Εάν υπάρχουν διάφορα μέσα μεταφοράς από ένα σταθμό παραγωγής σε έναν σταθμό προορισμού με διαφορετικό όμως κόστος μεταφοράς, τότε θεωρούμε ισάριθμους σταθμούς προορισμού, έναν για κάθε μέσο.

* πηγή: repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5698/5/kef. 7.pdf