Μηχανική 3

Άσκηση 3

Ονοματεπώνυμο: Άγγελος Αγουρίδης

Α.Μ.: ΤΜ20039

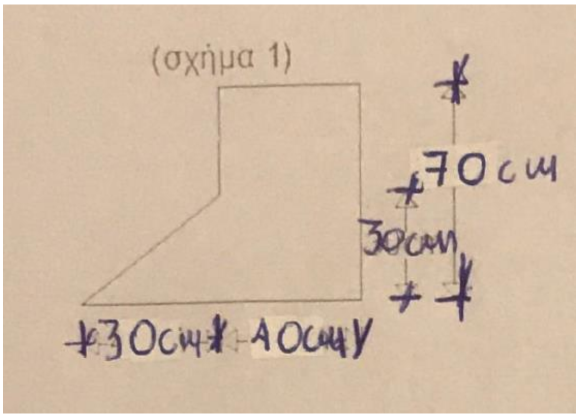
Εκφώνηση:

1. Να υπολογιστεί το ΚΒ της διατομής Χκ, Ψκ ως προς έναν άξονα.

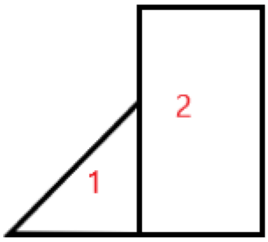
2. Χρησιμοποιώντας σε κάθε περίπτωση τον τύπο του STEINER υπολογίστε τις ΚΒ. Ροπές αδράνειας (δηλ. ως προς τον ΚΒ άξονα).

Θέμα πρώτο

Ερώτημα 1



Θα χωρίσω πρώτα αυτό το σύνθετο σχήμα σε γνωστά γεωμετρικά σχήματα.



Το σχήμα (1) είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο και το σχήμα (2) είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Θα βρω το εμβαδόν για κάθε σχήμα:

$$E_{(1)} = \frac{\beta * \upsilon}{2} = \frac{30 * 30}{2} = \frac{900}{2} = 450\ \text{cm}^2$$

$$E_{(2)} = \beta * \upsilon = 40 * 70 = 2800\ \text{cm}^2$$

$$E_{o\lambda} = E_{(1)} + E_{(2)} = 450 + 2800 = 3250\ \text{cm}^2$$

Θα βρω το κέντρο βάρους για κάθε σχήμα:

Για το ορθογώνιο τρίγωνο:

$$\chi_{\kappa_1} = \frac{\beta}{3} = \frac{30}{3} = 10\ \text{cm},\ y_{\kappa_1} = \frac{\upsilon}{3} = \frac{30}{3} = 10\ \text{cm},\ \chi_1 = 10\ \text{cm},\ y_1 = 10\ \text{cm}$$

Για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο:

$$\chi_{\kappa_2} = \frac{\beta}{2} = \frac{40}{2} = 20\ \text{cm},\ y_{\kappa_2} = \frac{\upsilon}{2} = \frac{70}{2} = 35\ \text{cm},\ \chi_2 = 20 + 30 = 50\ \text{cm},\ y_2 = 35\ \text{cm}$$

Η τετμημένη $\bar{x}$ του κεντροειδούς της επιφάνειας, μπορεί να προσδιοριστεί και πάλι από το ότι η πρωτοβάθμια (ή στατική) ροπή S_y της σύνθετης επιφάνειας ως προς τον y–άξονα, μπορεί να εκφραστεί τόσο ως γινόμενο της $\bar{x}$ επί το συνολικό εμβαδόν A, όσο και ως το άθροισμα των στατικών ροπών των επιμέρους επιφανειών της A_i ως προς τον ίδιο άξονα.

Η τεταγμένη $\overline{y}$ του κεντροειδούς με ανάλογο τρόπο, εκφράζεται μέσω της στατικής ροπής S_x της σύνθετης επιφάνειας.

Οπότε για τις δύο ως άνω περιπτώσεις έχουμε:

$$S_y = (\chi_1 * E_{(1)}) + (\chi_2 * E_{(2)}) = (10 * 450) + (50 * 2800) = 144500 \text{ cm}^3$$

$$S_x = (y_1 * E_{(1)}) + (y_2 * E_{(2)}) = (10 * 450) + (35 * 2800) = 102500 \text{ cm}^3$$

Συντεταγμένες κέντρου βάρους της σύνθετης επιφάνειας:

$$\overline{x} = \frac{S_y}{E_{o\lambda}} = \frac{144500}{3250} = 44{,}61\ cm$$

$$\overline{y} = \frac{S_x}{E_{o\lambda}} = \frac{102500}{3250} = 31{,}54\ cm$$

Ερώτημα 2

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα χ είναι ίση με το άθροισμα ροπών αδράνειας τον κάθε σχημάτων:

$$I_{xx} = I_{xx_1} + I_{xx_2}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα steiner η επιφανειακή ροπή δευτέρας τάξης μιας διατομής προς ένα τυχαίο άξονα ισούται με την ροπή αδράνειας ως προς τον παράλληλο στον τυχαίο κεντροβαρικό άξονα, προσθέτοντας την απόσταση στο τετράγωνο επί την επιφάνεια διατομής.

$$y_{1_c} = \overline{y} - y_1 = 31{,}54 - 10 = 21{,}54 \text{ cm}$$

$$y_{2_c} = y_2 - \overline{y} = 35 - 31{,}54 = 3.46 \text{ cm}$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου τριγώνου είναι:

$$I_{xx_1} = \frac{\beta * \upsilon^3}{36} + E_{(1)} * (y_{1_c})^2 = \frac{30*30^3}{36} + 450 * (21.54)^2 = 231287.22 \text{ cm}^4$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι:

$$I_{xx_2} = \frac{\beta * \upsilon^3}{12} + E_{(2)} * (y_{2_c})^2 = \frac{40*70^3}{12} + 2800 * (3.46)^2 = 1176850 \text{ cm}^4$$

Άρα η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα χ είναι ίση:

$$I_{xx} = I_{xx_1} + I_{xx_2} = 231287.22 + 1182240 = 1.408.137{,}22 \text{ cm}^4$$

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y είναι ίση με το άθροισμα ροπών αδράνειας τον κάθε σχημάτων:

$$I_{yy} = I_{yy_1} + I_{yy_2}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα steiner η επιφανειακή ροπή δευτέρας τάξης μιας διατομής προς ένα τυχαίο άξονα ισούται με την ροπή αδράνειας ως προς τον παράλληλο στον τυχαίο κεντροβαρικό άξονα, προσθέτοντας την απόσταση στο τετράγωνο επί την επιφάνεια διατομής.

$$x_{1_c} = \overline{x} - x_1 = 44.61 - 10 = 34{,}6 \text{ cm}$$

$$x_{2_c} = x_2 - \overline{x} = 50 - 44.61 = 5.39 \text{ cm}$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου τριγώνου είναι:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{yy}_1} = \frac{\upsilon * \beta^3}{36} + \mathrm{E}_{(1)} * (x_{1_c})^2 = \frac{30*30^3}{36} + 450 * (34.6)^2 = 561222\mathrm{cm}^4$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι:

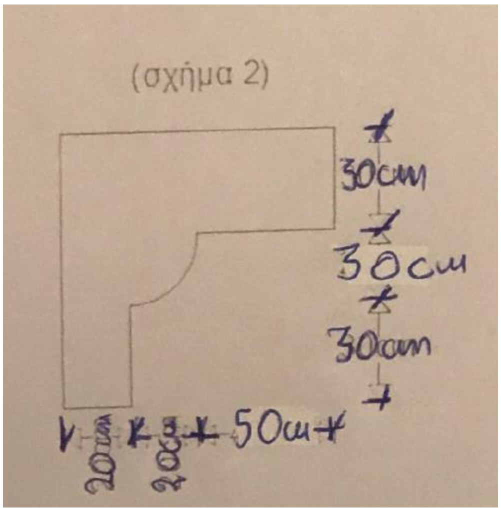
$$\mathrm{I}_{\mathrm{yy}_2} = \frac{\upsilon * \beta^3}{12} + \mathrm{E}_{(2)} * (x_{2_c})^2 = \frac{70*40^3}{12} + 2800 * (5.39)^2 = 454679.21\ \mathrm{cm}^4$$

Άρα η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα χ είναι ίση:

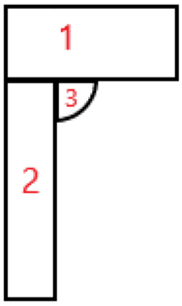
$$\mathrm{I}_{\mathrm{yy}} = \mathrm{I}_{\mathrm{yy}_1} + \mathrm{I}_{yy_2} = 561222 + 454679.21 = 1015901.21\ \mathrm{cm}^4$$

Θέμα δεύτερο

Ερώτημα 1



Θα χωρίσω πρώτα αυτό το σύνθετο σχήμα σε γνωστά γεωμετρικά σχήματα.



Το σχήμα (1) και (2) είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα και το σχήμα (3) είναι ένα τεταρτοκύκλιο.

Θα βρω το εμβαδόν για κάθε σχήμα:

$$\mathrm{E}_{(1)} = \beta * \upsilon = 90 * 30 = 2700\ \mathrm{cm}^2$$

$$\mathrm{E}_{(2)} = \beta * \upsilon = 20 * 90 = 1800\ \mathrm{cm}^2$$

$$\mathrm{E}_{(3)} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{3.14 * 20^2}{4} = 314\ \mathrm{cm}^2$$

$$\mathrm{E}_{o\lambda} = \mathrm{E}_{(1)} + \mathrm{E}_{(2)} + \mathrm{E}_{(3)} = 2700 + 1800 + 314 = 4814\ \mathrm{cm}^2$$

Θα βρω το κέντρο βάρους για κάθε σχήμα:

Για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (1):

$$\chi_{\kappa_1} = \frac{\beta}{2} = \frac{90}{2} = 45\ \mathrm{cm},\ \mathrm{y}_{\kappa_1} = \frac{\upsilon}{2} = \frac{30}{2} = 15\ \mathrm{cm},\ \chi_1 = 45\ \mathrm{cm},\ \mathrm{y}_1 = 15 + 60 = 75\ \mathrm{cm}$$

Για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2):

$$\chi_{\kappa_2} = \frac{\beta}{2} = \frac{20}{2} = 10\ \mathrm{cm},\ \mathrm{y}_{\kappa_2} = \frac{\upsilon}{2} = \frac{90}{2} = 45\ \mathrm{cm},\ \chi_2 = 10\ \mathrm{cm},\ \mathrm{y}_2 = 45\ \mathrm{cm}$$

Για το τεταρτοκύκλιο:

$$\chi_{\kappa_3} = \mathrm{y}_{\kappa_3} = \frac{4\mathrm{R}}{3\pi} = \frac{4*20}{3*314} = 8{,}49\ \mathrm{cm},\ \chi_3 = 20 + 8.49 = 28.49\ \mathrm{cm},\ \mathrm{y}_3 = 8.49 + 30 = 38.49\ \mathrm{cm}$$

Η τετμημένη $\bar{\mathrm{x}}$ του κεντροειδούς της επιφάνειας, μπορεί να προσδιοριστεί και πάλι από το ότι η πρωτοβάθμια (ή στατική) ροπή $\mathrm{S_y}$ της σύνθετης επιφάνειας ως προς τον y–άξονα, μπορεί να εκφραστεί τόσο ως γινόμενο της $\bar{\mathrm{x}}$ επί το συνολικό εμβαδόν A, όσο και ως το άθροισμα των στατικών ροπών των επιμέρους επιφανειών της $\mathrm{A_i}$ ως προς τον ίδιο άξονα.

Η τεταγμένη $\bar{\mathrm{y}}$ του κεντροειδούς με ανάλογο τρόπο, εκφράζεται μέσω της στατικής ροπής S_x της σύνθετης επιφάνειας.

Οπότε για τις δύο ως άνω περιπτώσεις έχουμε:

$$\mathrm{S_y} = \left(\chi_1 * \mathrm{E}_{(1)}\right) + \left(\chi_2 * \mathrm{E}_{(2)}\right) + \left(\chi_3 * \mathrm{E}_{(3)}\right) = (45 * 2700) + (10 * 1800) + (28.49 * 314) = 148445{,}86\ \mathrm{cm}^3$$

$$\mathrm{S}_x = \left(\mathrm{y}_1 * \mathrm{E}_{(1)}\right) + \left(\mathrm{y}_2 * \mathrm{E}_{(2)}\right) + \left(\mathrm{y}_3 * \mathrm{E}_{(3)}\right) = (75 * 2700) + (45 * 1800) + (38.49 * 314) = 295585{,}86\ \mathrm{cm}^3$$

Συντεταγμένες κέντρου βάρους της σύνθετης επιφάνειας:

$$\bar{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{S_y}}{\mathrm{E_{o\lambda}}} = \frac{148445{,}86}{4814} = 30{,}84cm$$

$$\bar{\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{S}_x}{\mathrm{E_{o\lambda}}} = \frac{295585{,}86}{4814} = 61.4\ cm$$

Ερώτημα 2

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα χ είναι ίση με το άθροισμα ροπών αδράνειας τον κάθε σχημάτων:

$$\mathrm{I_{xx}} = \mathrm{I_{xx_1}} + \mathrm{I_{xx_2}} + \mathrm{I_{xx_3}}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα steiner η επιφανειακή ροπή δευτέρας τάξης μιας διατομής προς ένα τυχαίο άξονα ισούται με την ροπή αδράνειας ως προς τον παράλληλο στον τυχαίο κεντροβαρικό άξονα, προσθέτοντας την απόσταση στο τετράγωνο επί την επιφάνεια διατομής.

$$\mathrm{y_{1_c}} = \mathrm{y_1} - \bar{\mathrm{y}} = 75 - 61.4 = 13.6\ \mathrm{cm}$$

$$\mathrm{y_{2_c}} = \bar{\mathrm{y}} - \mathrm{y_2} = 61.4 - 45 = 16{,}4\ \mathrm{cm}$$

$$\mathrm{y_{3_c}} = \bar{\mathrm{y}} - \mathrm{y_3} = 61.4 - 38{,}49 = 22.91\ \mathrm{cm}$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (1) είναι:

$$\mathrm{I_{xx_1}} = \frac{\beta * \upsilon^3}{12} + \mathrm{E_{(1)}} * (\mathrm{y_{1_c}})^2 = \frac{90 * 30^3}{12} + 2700 * (13.6)^2 = 701892\ \mathrm{cm^4}$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (2) είναι:

$$\mathrm{I_{xx_2}} = \frac{\beta * \upsilon^3}{12} + \mathrm{E_{(2)}} * (\mathrm{y_{2_c}})^2 = \frac{20 * 90^3}{12} + 1800 * (16.4)^2 = 1699128\ \mathrm{cm^4}$$

Η ροπή αδράνειας του τεταρτοκυκλίου είναι:

$$\mathrm{I_{xx_3}} = 0.0549\mathrm{R}^4 + \mathrm{E_{(3)}} * (\mathrm{y_{3_c}})^2 = 0.0549 * 20^4 + 314 * (22.91)^2 = 173592.58\ \mathrm{cm^4}$$

Άρα η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα χ είναι ίση:

$$\mathrm{I_{xx}} = \mathrm{I_{xx_1}} + \mathrm{I_{xx_2}} + \mathrm{I_{xx_3}} = 701892 + 1699128 + 173592.58 = 2574612{,}6\ \mathrm{cm^4}$$

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y είναι ίση με το άθροισμα ροπών αδράνειας τον κάθε σχημάτων:

$$\mathrm{I_{yy}} = \mathrm{I_{yy_1}} + \mathrm{I_{yy_2}} + \mathrm{I}_{yy_3}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα steiner η επιφανειακή ροπή δευτέρας τάξης μιας διατομής προς ένα τυχαίο άξονα ισούται με την ροπή αδράνειας ως προς τον παράλληλο στον τυχαίο κεντροβαρικό άξονα, προσθέτοντας την απόσταση στο τετράγωνο επί την επιφάνεια διατομής.

$$\mathrm{x_{1_c}} = x_1 - \bar{\mathrm{x}} = 45 - 30.84 = 14{,}16\ \mathrm{cm}$$

$$\mathrm{x_{2_c}} = \bar{\mathrm{x}} - x_2 = 30.84 - 10 = 20{,}84\ \mathrm{cm}$$

$$\mathrm{x_{3_c}} = \bar{x} - x_3 = 30.84 - 28{,}49 = 2.35\ \mathrm{cm}$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (1) είναι:

$$\mathrm{I_{yy_1}} = \frac{\upsilon * \beta^3}{12} + \mathrm{E_{(1)}} * (x_{1_c})^2 = \frac{30 * 90^3}{12} + 2700 * (14.16)^2 = 2363865{,}12\ \mathrm{cm^4}$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (2) είναι:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{yy}_2} = \frac{\upsilon*\beta^3}{12} + \mathrm{E}_{(2)} * (x_{2_c})^2 = \frac{90*20^3}{12} + 1800 * (20.84)^2 = 841750{,}08 \ \mathrm{cm}^4$$

Η ροπή αδράνειας του τεταρτοκυκλίου είναι:

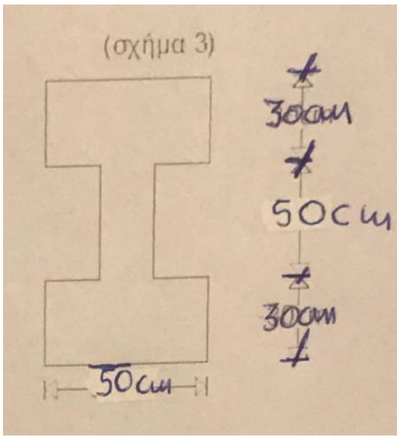
$$\mathrm{I}_{yy_3} = 0.0549\mathrm{R}^4 + \mathrm{E}_{(3)} * (\mathrm{x}_{3_c})^2 = 0.0549 * 20^4 + 314 * (2.35)^2 = 10518{,}07 \ \mathrm{cm}^4$$

Άρα η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα χ είναι ίση:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{yy}} = \mathrm{I}_{\mathrm{yy}_1} + \mathrm{I}_{yy_2} + \mathrm{I}_{yy_3} = 2363865{,}12 \ + 841750{,}08 + 10518{,}07 \ = 3216133{,}27 \ \mathrm{cm}^4$$

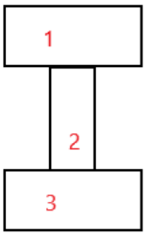
Θέμα τρίτο

Ερώτημα 1



Το κέντρο βάρους είναι στην θέση $(\bar{x}, \bar{y})$=(25,55) cm επειδή το σχήμα είναι συμμετρικό αλλά θα το αποδείξω.

Θα χωρίσω πρώτα αυτό το σύνθετο σχήμα σε γνωστά γεωμετρικά σχήματα.



Το σχήμα (1), (2) και (3) είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

$$E_{(1)} = \beta * \upsilon = 50 * 30 = 1500 \text{ cm}^2$$

$$E_{(2)} = \beta * \upsilon = 10 * 50 = 500 \text{ cm}^2$$

$$E_{(3)} = \beta * \upsilon = 50 * 30 = 1500 \text{ cm}^2$$

$$E_{o\lambda} = E_{(1)} + E_{(2)} + E_{(3)} = 1500 + 500 + 1500 = 3500 \text{ cm}^2$$

Θα βρω το κέντρο βάρους για κάθε σχήμα:

Για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (1):

$$\chi_{\kappa_1} = \frac{\beta}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}, \; y_{\kappa_1} = \frac{\upsilon}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}, \; \chi_1 = 25 \text{ cm}, \; y_1 = 15 + 80 = 95 \text{ cm}$$

Για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2):

$$\chi_{\kappa_2} = \frac{\beta}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}, \; y_{\kappa_2} = \frac{\upsilon}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}, \; \chi_2 = 5 + 20 = 25 \text{ cm}, \; y_2 = 25 + 30 = 55 \text{ cm}$$

Για το τεταρτοκύκλιο:

$$\chi_{\kappa_3} = \frac{\beta}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}, y_{\kappa_3} = \frac{\upsilon}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}, \chi_3 = 25 \text{ cm}, \; y_3 = 15 \text{ cm}$$

Η τετμημένη $\bar{x}$ του κεντροειδούς της επιφάνειας, μπορεί να προσδιοριστεί και πάλι από το ότι η πρωτοβάθμια (ή στατική) ροπή S_y της σύνθετης επιφάνειας ως προς τον y–άξονα, μπορεί να εκφραστεί τόσο ως γινόμενο της $\bar{x}$ επί το συνολικό εμβαδόν A, όσο και ως το άθροισμα των στατικών ροπών των επιμέρους επιφανειών της A_i ως προς τον ίδιο άξονα.

Η τεταγμένη $\bar{y}$ του κεντροειδούς με ανάλογο τρόπο, εκφράζεται μέσω της στατικής ροπής S_x της σύνθετης επιφάνειας.

Οπότε για τις δύο ως άνω περιπτώσεις έχουμε:

$$S_y = (\chi_1 * E_{(1)}) + (\chi_2 * E_{(2)}) + (\chi_3 * E_{(3)}) = (25 * 1500) + (25 * 500) + (25 * 1500) = 87500 \text{ cm}^3$$

$$S_x = (y_1 * E_{(1)}) + (y_2 * E_{(2)}) + (y_3 * E_{(3)}) = (95 * 1500) + (55 * 500) + (15 * 1500) = 192500 \text{ cm}^3$$

Συντεταγμένες κέντρου βάρους της σύνθετης επιφάνειας:

$$\bar{x} = \frac{S_y}{E_{ολ}} = \frac{87500}{3500} = 25\ cm$$

$$\bar{y} = \frac{S_x}{E_{ολ}} = \frac{192500}{3500} = 55\ cm$$

Ερώτημα 2

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα χ είναι ίση με το άθροισμα ροπών αδράνειας τον κάθε σχημάτων:

$$I_{xx} = I_{xx_1} + I_{xx_2} + I_{xx_3}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα steiner η επιφανειακή ροπή δευτέρας τάξης μιας διατομής προς ένα τυχαίο άξονα ισούται με την ροπή αδράνειας ως προς τον παράλληλο στον τυχαίο κεντροβαρικό άξονα, προσθέτοντας την απόσταση στο τετράγωνο επί την επιφάνεια διατομής.

$$y_{1_c} = y_1 - \bar{y} = 95 - 55 = 40\ \text{cm}$$

$$y_{2_c} = y_2 - \bar{y} = 55 - 55 = 0\ \text{cm}$$

$$y_{3_c} = \bar{y} - y_3 = 55 - 15 = 40\ \text{cm}$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (1) είναι:

$$I_{xx_1} = \frac{β * υ^3}{12} + E_{(1)} * (y_{1_c})^2 = \frac{50 * 30^3}{12} + 1500 * (40)^2 = 2512500\ \text{cm}^4$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (2) είναι:

$$I_{xx_2} = \frac{β*υ^3}{12} + E_{(2)} * (y_{2_c})^2 = \frac{10*50^3}{12} + 500 * (0)^2 = 104166.66\ \text{cm}^4$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (3) είναι:

$$I_{xx_3} = \frac{β*υ^3}{12} + E_{(3)} * (y_{3_c})^2 = \frac{50*30^3}{12} + 1500 * (40)^2 = 2512500\ \text{cm}^4$$

Άρα η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα χ είναι ίση:

$$I_{xx} = I_{xx_1} + I_{xx_2} + I_{xx_3} = 2512500 + 104166.66 + 2512500 = 5129166.66\ \text{cm}^4$$

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y είναι ίση με το άθροισμα ροπών αδράνειας τον κάθε σχημάτων:

$$I_{yy} = I_{yy_1} + I_{yy_2} + I_{yy_3}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα steiner η επιφανειακή ροπή δευτέρας τάξης μιας διατομής προς ένα τυχαίο άξονα ισούται με την ροπή αδράνειας ως προς τον παράλληλο στον τυχαίο κεντροβαρικό άξονα, προσθέτοντας την απόσταση στο τετράγωνο επί την επιφάνεια διατομής.

$$x_{1_c} = x_1 - \bar{x} = 25 - 25 = 0\ \text{cm}$$

$$x_{2_c} = \bar{x} - x_2 = 25 - 25 = 0\ \text{cm}$$

$$x_{3_c} = \bar{x} - x_3 = 25 - 25 = 0\ \text{cm}$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (1) είναι:

$$I_{yy_1} = \frac{υ * β^3}{12} + E_{(1)} * (x_{1_c})^2 = \frac{30 * 50^3}{12} + 1500 * (0)^2 = 312500\ \text{cm}^4$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (2) είναι:

$\mathrm{I}_{yy_2} = \frac{\upsilon * \beta^3}{12} + \mathrm{E}_{(2)} * (\mathrm{x}_{2_c})^2 = \frac{50*10^3}{12} + 500 * (0)^2 = 4166.6 \ \mathrm{cm}^4$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (3) είναι:

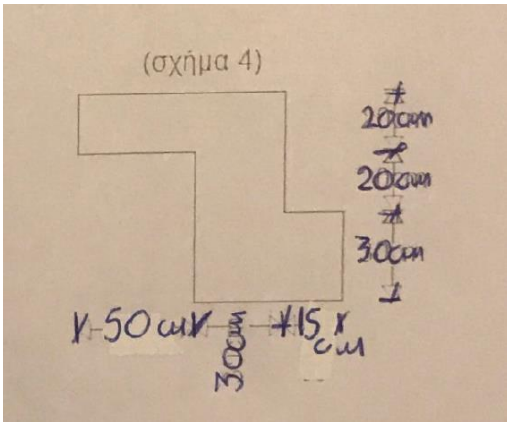
$\mathrm{I}_{\mathrm{yy}_3}$=$\frac{\upsilon * \beta^3}{12} + \mathrm{E}_{(3)} * (\mathrm{x}_{3_c})^2 = \frac{30*50^3}{12} + 1500 * (0)^2 = 312500 \ \mathrm{cm}^4$

Άρα η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y είναι ίση:

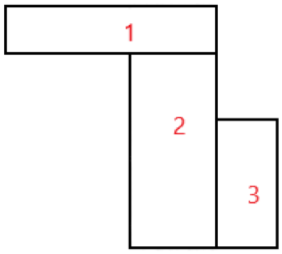
$\mathrm{I}_{\mathrm{yy}} = \mathrm{I}_{\mathrm{yy}_1} + \mathrm{I}_{yy_2} + \mathrm{I}_{yy_3} = 312500 \ \ + 4166.6 + 312500 = 316666.6 \ \mathrm{cm}^4$

Θέμα τέταρτο

Ερώτημα 1



Θα χωρίσω πρώτα αυτό το σύνθετο σχήμα σε γνωστά γεωμετρικά σχήματα.



Το σχήμα (1), (2) και (3) είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

$$\mathrm{E}_{(1)} = \beta * \upsilon = 80 * 20 = 1600\ \mathrm{cm}^2$$

$$\mathrm{E}_{(2)} = \beta * \upsilon = 30 * 50 = 1500\ \mathrm{cm}^2$$

$$\mathrm{E}_{(3)} = \beta * \upsilon = 15 * 30 = 450\ \mathrm{cm}^2$$

$$\mathrm{E}_{o\lambda} = \mathrm{E}_{(1)} + \mathrm{E}_{(2)} + \mathrm{E}_{(3)} = 1600 + 1500 + 450 = 3550\ \mathrm{cm}^2$$

Θα βρω το κέντρο βάρους για κάθε σχήμα:

Για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (1):

$$\chi_{\kappa_1} = \frac{\beta}{2} = \frac{80}{2} = 40\ \mathrm{cm},\ y_{\kappa_1} = \frac{\upsilon}{2} = \frac{20}{2} = 10\ \mathrm{cm},\ \chi_1 = 40\ \mathrm{cm},\ y_1 = 10 + 50 = 60\ \mathrm{cm}$$

Για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2):

$$\chi_{\kappa_2} = \frac{\beta}{2} = \frac{30}{2} = 15\ \mathrm{cm},\ y_{\kappa_2} = \frac{\upsilon}{2} = \frac{50}{2} = 25\ \mathrm{cm},\ \ \chi_2 = 15 + 50 = 65\ \mathrm{cm},\ y_2 = 25\ \mathrm{cm}$$

Για το τεταρτοκύκλιο:

$$\chi_{\kappa_3} = \frac{\beta}{2} = \frac{15}{2} = 7.5\ \mathrm{cm}, y_{\kappa_3} = \frac{\upsilon}{2} = \frac{30}{2} = 15\ \mathrm{cm}, \chi_3 = 7.5 + 80 = 87.5\ \mathrm{cm},\ y_3 = 15\ \mathrm{cm}$$

Η τετμημένη $\bar{\mathrm{x}}$ του κεντροειδούς της επιφάνειας, μπορεί να προσδιοριστεί και πάλι από το ότι η πρωτοβάθμια (ή στατική) ροπή $\mathrm{S_y}$ της σύνθετης επιφάνειας ως προς τον y–άξονα, μπορεί να εκφραστεί τόσο ως γινόμενο της $\bar{\mathrm{x}}$ επί το συνολικό εμβαδόν A, όσο και ως το άθροισμα των στατικών ροπών των επιμέρους επιφανειών της $\mathrm{A_i}$ ως προς τον ίδιο άξονα.

Η τεταγμένη $\bar{\mathrm{y}}$ του κεντροειδούς με ανάλογο τρόπο, εκφράζεται μέσω της στατικής ροπής S_x της σύνθετης επιφάνειας.

Οπότε για τις δύο ως άνω περιπτώσεις έχουμε:

$$\mathrm{S_y} = \left(\chi_1 * \mathrm{E}_{(1)}\right) + \left(\chi_2 * \mathrm{E}_{(2)}\right) + \left(\chi_3 * \mathrm{E}_{(3)}\right) = (40 * 1600) + (65 * 1500) + (87.5 * 450) = 200875\ \mathrm{cm}^3$$

$$\mathrm{S}_x = \left(\mathrm{y}_1 * \mathrm{E}_{(1)}\right) + \left(\mathrm{y}_2 * \mathrm{E}_{(2)}\right) + \left(\mathrm{y}_3 * \mathrm{E}_{(3)}\right) = (60 * 1600) + (25 * 1500) + (15 * 450) = 140250\ \mathrm{cm}^3$$

Συντεταγμένες κέντρου βάρους της σύνθετης επιφάνειας:

$$\bar{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{S_y}}{\mathrm{E}_{o\lambda}} = \frac{87500}{3550} = 56.58\ cm$$

$\bar{y} = \frac{S_x}{E_{ολ}} = \frac{140250}{3550} = 39.51\ cm$

Ερώτημα 2

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα χ είναι ίση με το άθροισμα ροπών αδράνειας τον κάθε σχημάτων:

$I_{xx} = I_{xx_1} + I_{xx_2} + I_{xx_3}$

Σύμφωνα με το θεώρημα steiner η επιφανειακή ροπή δευτέρας τάξης μιας διατομής προς ένα τυχαίο άξονα ισούται με την ροπή αδράνειας ως προς τον παράλληλο στον τυχαίο κεντροβαρικό άξονα, προσθέτοντας την απόσταση στο τετράγωνο επί την επιφάνεια διατομής.

$y_{1_c} = y_1 - \bar{y} = 60 - 39.51 = 20.49\ \mathrm{cm}$

$y_{2_c} = \bar{y} - y_2 = 39.51 - 25 = 14.51\ \mathrm{cm}$

$y_{3_c} = \bar{y} - y_3 = 39.51 - 15 = 24.51\ \mathrm{cm}$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (1) είναι:

$$I_{xx_1} = \frac{β * υ^3}{12} + E_{(1)} * (y_{1_c})^2 = \frac{80 * 20^3}{12} + 1600 * (20.49)^2 = 725077.49\ \mathrm{cm}^4$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (2) είναι:

$$I_{xx_2} = \frac{β*υ^3}{12} + E_{(2)} * (y_{2_c})^2 = \frac{30*70^3}{12} + 1500 * (14.51)^2 = 1173310.15\ \mathrm{cm}^4$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (3) είναι:

$$I_{xx_3} = \frac{β*υ^3}{12} + E_{(3)} * (y_{3_c})^2 = \frac{15*30^3}{12} + 450 * (24.51)^2 = 304683.79\ \mathrm{cm}^4$$

Άρα η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα χ είναι ίση:

$$I_{xx} = I_{xx_1} + I_{xx_2} + I_{xx_3} = 725077.49 + 1173310.15 + 304683.79 = 2203071{,}4\ \mathrm{cm}^4$$

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y είναι ίση με το άθροισμα ροπών αδράνειας τον κάθε σχημάτων:

$I_{yy} = I_{yy_1} + I_{yy_2} + I_{yy_3}$

Σύμφωνα με το θεώρημα steiner η επιφανειακή ροπή δευτέρας τάξης μιας διατομής προς ένα τυχαίο άξονα ισούται με την ροπή αδράνειας ως προς τον παράλληλο στον τυχαίο κεντροβαρικό άξονα, προσθέτοντας την απόσταση στο τετράγωνο επί την επιφάνεια διατομής.

$x_{1_c} = \bar{x} - x_1 = 56.58 - 40 = 16.58\ \mathrm{cm}$

$x_{2_c} = x_2 - \bar{x} = 65 - 56.58 = 8.42\ \mathrm{cm}$

$x_{3_c} = x_3 - \bar{x} = 87.5 - 56.58 = 30.92\ \mathrm{cm}$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (1) είναι:

$$I_{yy_1} = \frac{υ * β^3}{12} + E_{(1)} * (x_{1_c})^2 = \frac{20 * 80^3}{12} + 1600 * (16.58)^2 = 1293170\ \mathrm{cm}^4$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (2) είναι:

$$I_{yy_2} = \frac{υ*β^3}{12} + E_{(2)} * (x_{2_c})^2 = \frac{80*30^3}{12} + 1500 * (8.42)^2 = 286344.6\ \mathrm{cm}^4$$

Η ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (3) είναι:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{yy}_3}=\frac{\upsilon*\beta^3}{12}+\mathrm{E}_{(3)}*(\mathrm{x}_{3_c})^2=\frac{30*15^3}{12}+450*(30.92)^2=438658.38\ \mathrm{cm}^4$$

Άρα η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y είναι ίση:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{yy}}=\mathrm{I}_{\mathrm{yy}_1}+\mathrm{I}_{yy_2}+\mathrm{I}_{yy_3}=1293170\ \ +286344.6+438658.38=2018173\ \mathrm{cm}^4$$