Θερμοδυναμική Ι

Ιδανικό αέριο – διεργασίες αερίων

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Δημήτρης Αλ. Κατσαπρακάκης

Η έννοια του τελείου ή ιδανικού αερίου

Η έννοια του ιδανικού αερίου

- Η έννοια του τελείου ή ιδανικού αερίου ενσωματώνεται στον ορισμό της παγκόσμιας σταθεράς του τελείου αερίου.
- Συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι ο λόγος του γινομένου της πίεσης p επί το μοριακό όγκο $\bar{V}$ (όγκος ενός γραμμομορίου) προς τη θερμοκρασία του αερίου τείνει να προσεγγίσει μία σταθερή τιμή, την παγκόσμια σταθερά τελείου αερίου R, όσο η πίεση του αερίου τείνει προς το μηδέν:

$$\lim_{p \to 0} \frac{p \cdot \bar{V}}{T} = R$$

- Η παγκόσμια σταθερά R του τελείου αερίου ισούται με 8,314 J/(mol·K).

Η καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου

- Αν λάβουμε υπόψη ότι ο μοριακός όγκος $\bar{V}$ ενός γραμμομορίου ισούται με το πηλίκο του όγκου V που καταλαμβάνουν n γραμμομόρια αερίου προς τον αριθμό των γραμμομορίων n, τότε ουσιαστικά αναπτύσσοντας την ανωτέρω σχέση καταλήγουμε στη γνωστή καταστατική εξίσωση τελείων αερίων:

$$p\cdot\bar{V} = R\cdot T \Leftrightarrow p\cdot\frac{V}{n} = R\cdot T \Leftrightarrow p\cdot V = n\cdot R\cdot T$$

- Συνεπώς, με βάση την ανωτέρω ανάλυση, ως τέλειο αέριο ουσιαστικά ορίζεται το αέριο εκείνο που ικανοποιεί την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων.

Η καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου

- Καθώς όμως σε πραγματικά προβλήματα δεν υπεισέρχονται ποσότητες εργαζόμενου μέσου (αέρα, ατμού ή ψυκτικού μέσου) μετρούμενες σε αριθμό γραμμομορίων, η ανωτέρω καταστατική εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \Leftrightarrow p \cdot V = n \cdot M \cdot \frac{R}{M} \cdot T \Leftrightarrow p \cdot V = m \cdot R' \cdot T \Leftrightarrow p = \frac{m}{V} \cdot R' \cdot T \Leftrightarrow p = \rho \cdot R' \cdot T$$

όπου:

- $R = 8{,}314$ J/mol·K: στο S.I. η παγκόσμια σταθερά ιδανικών αερίων
- M: το μοριακό βάρος του αερίου
- n: ο αριθμός των γραμμομορίων στη μάζα του αερίου
- V: ο όγκος του αερίου
- $R' = R/M$: η σταθερά του αερίου
- $m = n \cdot M$: η μάζα του αερίου
- $\rho = m/V$: η πυκνότητα του αερίου.

Η καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου

- Η σταθερά του αερίου R΄ υπολογίζεται διαιρώντας την παγκόσμια σταθερά του τελείου αερίου με το μοριακό βάρος του αερίου.
- Για παράδειγμα, λαμβάνοντας το μοριακό βάρος του αέρα ίσο με 28,97 kg/kmol, η σταθερά του αέρα υπολογίζεται ίση με:

$$R' = \frac{R}{M} \Rightarrow R' = \frac{8{,}314\ \mathrm{kJ/kmol \cdot K}}{28{,}97\ \mathrm{kg/kmol}} \Leftrightarrow R' = 0{,}287\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}}$$

Η καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου

- Το ιδανικό αέριο αποτελεί ένα μοντέλο χρήσιμο για να μελετηθούν κατά προσέγγιση οι ιδιότητες και η συμπεριφορά των αερίων. Οι παραδοχές που γίνονται για το ιδανικό αέριο είναι οι εξής:
  - Τα μόρια που το αποτελούν είναι σημειακά και πεπερασμένης μάζας.
  - Τα μόρια συγκρούονται μεταξύ τους σύμφωνα με τους νόμους κρούσης των σφαιρών. Σε συνδυασμό με το σημειακό χαρακτήρα των σωματιδίων, αυτό σημαίνει ότι θεωρούμε τις κρούσεις πάντα μετωπικές, όπου το μόνο που μεταβάλλεται είναι το μέτρο και η φορά (όχι όμως η διεύθυνση) της ταχύτητας των σωματιδίων. Οι κρούσεις είναι ελαστικές, οπότε το σύνολο της κινητικής ενέργειας των μορίων διατηρείται.
  - Τα μόρια δεν αλληλεπιδρούν με κανέναν άλλο τρόπο μεταξύ τους. Δεν υπάρχουν δηλαδή, για παράδειγμα, ηλεκτρικές δυνάμεις έλξης ή άπωσης. Οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται σε αυτά είναι κατά τη στιγμή που συγκρούονται.
  - Τα ιδανικά αέρια υπακούουν στην καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων.

Η καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου

- Τα πραγματικά αέρια αποκλίνουν από αυτό το μοντέλο, καθώς τα μόρια δεν είναι σημειακά και οι κρούσεις και αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους είναι πιο περίπλοκες.
- Παρόλα αυτά, ειδικά για τον αέρα, η προσέγγιση του τελείου αερίου είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική για καταστάσεις πίεσης έως μερικές ατμόσφαιρες και για θερμοκρασίες που συνήθως επικρατούν στους κλιματιζόμενους χώρους.
- Επομένως, ειδικά για τα προβλήματα κλιματισμού, η προσέγγιση των ιδιοτήτων του αέρα με τους νόμους του τελείου αερίου είναι αρκούντως ικανοποιητική.
- Ωστόσο, δεν ισχύει το ίδιο ούτε για τους υδρατμούς, ούτε για τα ψυκτικά μέσα, των οποίων ο υπολογισμός των καταστάσεών τους προσεγγίζεται διαφορετικά.

Η καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου

- Οι ιδιότητες των τελείων αερίων μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια των νόμων τελείων αερίων.
- Για παράδειγμα, η ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο c_V και υπό σταθερή πίεση c_p μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βρεθούν οι μεταβολές στην ειδική εσωτερική ενέργεια u και στην ειδική ενθαλπία h του τελείου αερίου.
- Πράγματι, θεωρώντας ότι οι ειδικές θερμότητες του τελείου αερίου είναι περίπου σταθερές για διαφορετικές καταστάσεις, τότε:

$$u - u_O = c_V \cdot (T - T_O)$$

$$h - h_O = c_p \cdot (T - T_O)$$

δηλαδή εφόσον είναι γνωστές η ειδική εσωτερική ενέργεια u_o και η ειδική ενθαλπία h_o σε μία κατάσταση αναφοράς θερμοκρασίας T_o είναι εφικτός με τη βοήθεια των c_V και c_p ο υπολογισμός των μεγεθών αυτών σε μία νέα κατάσταση θερμοκρασίας T.

Η καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου

- Η ειδική εντροπία s ενός τελείου αερίου, οριζόμενη ως προς μία ειδική εντροπία αναφοράς s_o, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$s - s_o = c_v \cdot \ln\left(\frac{T}{T_o}\right) + R \cdot \ln\left(\frac{V}{V_o}\right)$$

$$s - s_o = c_p \cdot \ln\left(\frac{T}{T_o}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{p}{p_o}\right)$$

Η καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου

- Στους υπολογισμούς κλιματισμού κτηρίων ενίοτε θα χρειαστεί η γνώση της πίεσης ή της πυκνότητας του ατμοσφαιρικού αέρα. Είναι γνωστό ότι τα μεγέθη αυτά μεταβάλλονται συναρτήσει τόσο της θερμοκρασίας περιβάλλοντος, όσο και του απόλυτου υψόμετρου. Μία χρήσιμη εμπειρική σχέση που προσεγγίζει την πυκνότητα του ατμοσφαιρικού αέρα συναρτήσει των ανωτέρω μεγεθών είναι η ακόλουθη:

$$\rho = 353 \cdot \frac{e^{-\frac{H}{8.230}}}{T}$$

Παράδειγμα 1: Υπολογισμός πυκνότητας αέρα

Να υπολογιστεί η μάζα αέρα που περιέχεται σε ένα γραφείο θερμοκρασίας 25 ^{o}C, αν οι διαστάσεις του χώρου είναι 12m x 12m x 3,0m. Το δωμάτιο βρίσκεται σε απόλυτο υψόμετρο 350 m.

Λύση:

Καταρχήν θα υπολογιστεί η πυκνότητα του αέρα για τη θερμοκρασία και τη θέση του δωματίου:

$$\rho = 353 \cdot \frac{e^{-\frac{H}{8.230}}}{T} \Rightarrow \rho = 353 \cdot \frac{e^{-\frac{350\ \mathrm{m}}{8.230}}}{298\ \mathrm{K}} \Leftrightarrow \rho = 1{,}1352\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

όπου T = 25 ^{o}C = 298 K.

Στη συνέχεια υπολογίζεται η μάζα του αέρα στο δωμάτιο ως:

$$m = \rho \cdot V \Rightarrow m = 1{,}1352 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 3\ \mathrm{m}^3 \Leftrightarrow m = 490{,}4\ \mathrm{kg}$$

Ιδιότητες των τελείων αερίων στους 27 °C

Ιδιότητες συνήθων αερίων στους 300 K (27 °C).					
Αέριο	Χημικός τύπος	Σταθερά αερίου R΄ (kJ/kg·K)	Ειδική θερμότητα c_p (kJ/kg·K)	Ειδική θερμότητα c_V (kJ/kg·K)	γ
Αέρας	—	0,287	1,005	0,718	1,4
Άζωτο	N_2	0,2968	1,039	0,743	1,4
Αιθάνιο	C_2H_6	0,2765	1,7662	1,4897	1,186
Αιθυλένιο	C_2H_4	0,2964	1,5482	1,2518	1,237
Αργό	Ar	0,2081	0,5203	0,3122	1,667
Βουτάνιο	C_4H_{10}	0,1433	1,7164	1,5734	1,091
Διοξείδιο του άνθρακα	CO_2	0,1889	0,846	0,657	1,289
Ήλιο	He	2,0769	5,1926	3,1156	1,667
Μεθάνιο	CH_4	0,5182	2,2537	1,7354	1,299
Μονοξείδιο του άνθρακα	CO	0,2968	1,04	0,744	1,4
Νέον	Ne	0,4119	1,0299	0,6179	1,667
Οκτάνιο	C_8H_{18}	0,0729	1,7113	1,6385	1,044
Οξυγόνο	O_2	0,2598	0,918	0,658	1,395
Προπάνιο	C_3H_8	0,1885	1,6794	1,4909	1,126
Υδρατμός	H_2O	0,4615	1,8723	1,4108	1,327
Υδρογόνο	H_2	4,124	14,307	10,183	1,405

Ιδιότητες των συνήθων αερίων συναρτήσει της θερμοκρασίας

Ιδιότητες συνήθων αερίων συναρτήσει της θερμοκρασίας.									
Θερμοκρασία (K)	c_p (kJ/kg·K)	c_V (kJ/kg·K)	γ	c_p (kJ/kg·K)	c_V (kJ/kg·K)	γ	c_p (kJ/kg·K)	c_V (kJ/kg·K)	γ
	Αέρας			Διοξείδιο του άνθρακα CO_2			Μονοξείδιο του άνθρακα CO		
250	1,003	0,716	1,401	0,791	0,602	1,314	1,039	0,743	1,400
300	1,005	0,718	1,400	0,846	0,657	1,288	1,040	0,744	1,399
350	1,008	0,721	1,398	0,895	0,706	1,268	1,043	0,746	1,398
400	1,013	0,726	1,395	0,939	0,750	1,252	1,047	0,751	1,395
450	1,020	0,733	1,391	0,978	0,790	1,239	1,054	0,757	1,392
500	1,029	0,742	1,387	1,014	0,825	1,229	1,063	0,767	1,387
550	1,040	0,753	1,381	1,046	0,857	1,220	1,075	0,778	1,382
600	1,051	0,764	1,376	1,075	0,886	1,213	1,087	0,790	1,376
650	1,063	0,776	1,370	1,102	0,913	1,207	1,100	0,803	1,370
700	1,075	0,788	1,364	1,126	0,937	1,202	1,113	0,816	1,364
750	1,087	0,800	1,359	1,148	0,959	1,197	1,126	0,829	1,358
800	1,099	0,812	1,354	1,169	0,980	1,193	1,139	0,842	1,353
900	1,121	0,834	1,344	1,204	1,015	1,186	1,163	0,866	1,343
1.000	1,142	0,855	1,336	1,234	1,045	1,181	1,185	0,888	1,335

Ιδιότητες των συνήθων αερίων συναρτήσει της θερμοκρασίας

Ιδιότητες συνήθων αερίων συναρτήσει της θερμοκρασίας.

Θερμοκρασία (K)	c_p (kJ/kg·K)	c_V (kJ/kg·K)	γ	c_p (kJ/kg·K)	c_V (kJ/kg·K)	γ	c_p (kJ/kg·K)	c_V (kJ/kg·K)	γ
	Υδρογόνο H_2			Άζωτο N_2			Οξυγόνο O_2		
250	14,051	9,927	1,416	1,039	0,742	1,400	0,913	0,653	1,398
300	14,307	10,183	1,405	1,039	0,743	1,400	0,918	0,658	1,395
350	14,427	10,302	1,400	1,041	0,744	1,399	0,928	0,668	1,389
400	14,476	10,352	1,398	1,044	0,747	1,397	0,941	0,681	1,382
450	14,501	10,377	1,398	1,049	0,752	1,395	0,956	0,696	1,373
500	14,513	10,389	1,397	1,056	0,759	1,391	0,972	0,712	1,365
550	14,530	10,405	1,396	1,065	0,768	1,387	0,988	0,728	1,358
600	14,546	10,422	1,396	1,075	0,778	1,382	1,003	0,743	1,350
650	14,571	10,447	1,395	1,086	0,789	1,376	1,017	0,758	1,343
700	14,604	10,480	1,394	1,098	0,801	1,371	1,031	0,771	1,337
750	14,645	10,521	1,392	1,110	0,813	1,365	1,043	0,783	1,332
800	14,695	10,570	1,390	1,121	0,825	1,360	1,054	0,794	1,327
900	14,822	10,698	1,385	1,145	0,849	1,349	1,074	0,814	1,319
1.000	14,983	10,859	1,380	1,167	0,870	1,341	1,090	0,830	1,313

Παράδειγμα 2: Καταστατική εξίσωση τελείων αερίων

Σε δοχείο όγκου 15 L και θερμοκρασίας 27 ^oC εισάγονται 4 mol αερίου. Να υπολογιστεί η πίεση που ασκεί το αέριο στο δοχείο. Δίνεται η παγκόσμια σταθερά των αερίων R = 0,082 L·atm/(K·mol).

<u>Λύση</u>:

Η απόλυτη θερμοκρασία του αερίου ισούται με T = 27 ^oC + 273 = 300 K.

Από την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων έχουμε:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \Leftrightarrow p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \Rightarrow p = \frac{4\ \text{mol} \cdot 0{,}082\ \text{L} \cdot \text{atm}/(\text{K} \cdot \text{mol}) \cdot 300\ \text{K}}{15\ \text{L}} \Leftrightarrow p = 6{,}56\ \text{atm}$$

Παράδειγμα 3: Καταστατική εξίσωση τελείων αερίων

Να βρεθεί η πυκνότητα του οξυγόνου σε πίεση 8 atm και θερμοκρασία 273 ^{o}C. Δίνεται το ατομικό βάρος του οξυγόνου 16 gr και η παγκόσμια σταθερά των τελείων αερίων R = 0,082 L·atm/(K·mol).

<u>Λύση</u>:

Το μόριο του οξυγόνου αποτελείται από δύο άτομα, συνεπώς το μοριακό βάρος του είναι 32 gr. Η απόλυτη θερμοκρασία στην οποία ζητείται η πυκνότητα το οξυγόνου είναι 273 ^{o}C + 273 = 546 K.

Από την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων έχουμε:

$$p\cdot V = n\cdot R\cdot T \Leftrightarrow p\cdot V = \frac{m}{M}\cdot R\cdot T \Leftrightarrow p\cdot M = \frac{m}{V}\cdot R\cdot T \Leftrightarrow p\cdot M = \rho\cdot R\cdot T \Leftrightarrow \rho = \frac{p\cdot M}{R\cdot T} \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{8 \text{ atm} \cdot 32 \text{ gr/mol}}{0{,}082 \text{ L}\cdot\text{atm/(K}\cdot\text{mol)}\cdot 546 \text{ K}} \Leftrightarrow \rho = 5{,}72\ \frac{\text{gr}}{\text{L}}$$

Παράδειγμα 4: καταστατική εξίσωση

Ο αέρας θεωρείται τέλειο αέριο με σταθερά R΄ = 0,287 kJ/(kg·K). Εάν μέσα στον κύλινδρο του σχήματος υπάρχει αέρας με θερμοκρασία 80 ^oC και όγκο 2 m^3, ζητείται να βρεθεί η πίεση του αέρα, εάν η μάζα του είναι 20 kg.

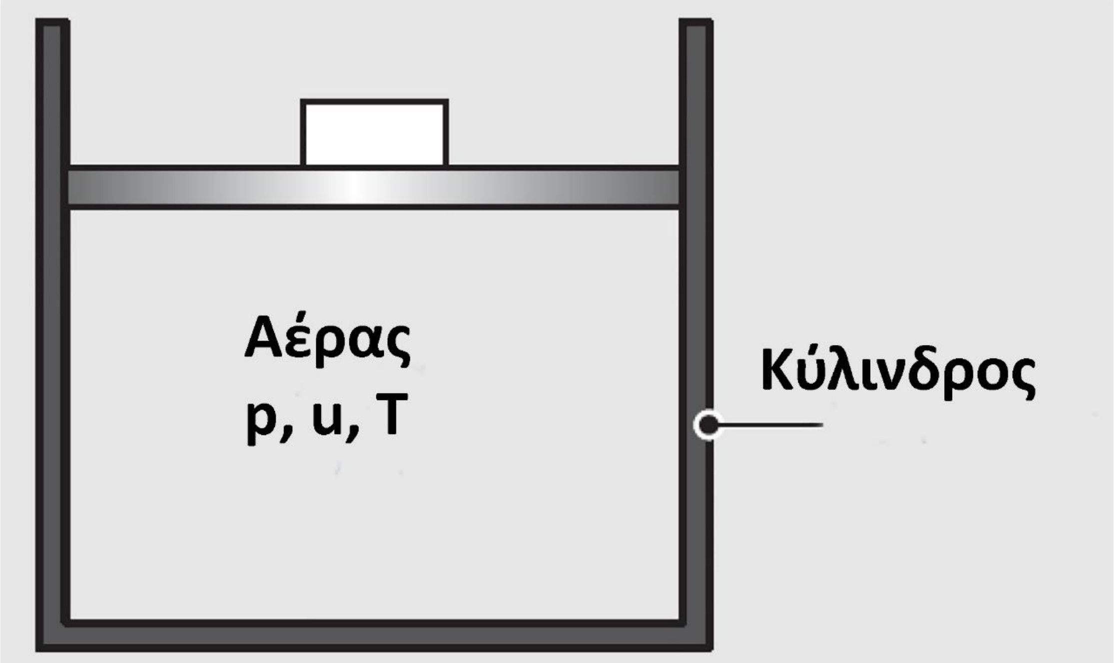
<u>Λύση</u>:

Η πίεση του αέρα μπορεί να βρεθεί με την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων στην ακόλουθη μορφή της:

$$p \cdot V = m \cdot R' \cdot T \Leftrightarrow p = \frac{m \cdot R' \cdot T}{V} \Rightarrow$$

$$p = \frac{20\ kg \cdot 287\ J/(kg \cdot K) \cdot 353\ K}{2\ m^3} \Leftrightarrow$$

p=1.013.110 Pa=1.013,11 kPa = 10,13 bar



Νόμοι των τελείων αερίων

Νόμοι των τελείων αερίων

- Οι νόμοι των τελείων αερίων περιγράφουν τις θερμοδυναμικές μεταβολές των τελείων αερίων.
- Οι νόμοι αυτοί περιγράφουν τη συμπεριφορά των αερίων λαμβάνοντας υπόψη τρεις βασικές παραμέτρους: τη θερμοκρασία, τον όγκο και την πίεση ενός ιδανικού αερίου.
- Πρόκειται για τους νόμους των Boyle – Mariotte, Gay – Lussac και Charles.
- Οι νόμοι των αερίων ερμηνεύονται από την κινητική θεωρία. Αν θερμανθεί ένα αέριο, τα μόριά του θα κινηθούν ταχύτερα. Έτσι, αν αυτό βρίσκεται σ’ ένα δοχείο, οι συγκρούσεις των μορίων στα τοιχώματα του δοχείου θα γίνουν πιο συχνές, με επακόλουθο την αύξηση της πίεσης, του όγκου ή και των δύο μαζί. Αν μειωθεί ο όγκος του δοχείου (περιοριστεί έτσι ο χώρος) οι κρούσεις των μορίων με τα τοιχώματα θα γίνουν συχνότερες και επομένως θα μεγαλώσει η πίεση.

Νόμος των Boyle – Mariotte (ισοθερμοκρασιακή μεταβολή)

- Ο Νόμος των Boyle – Mariotte πήρε το όνομά του αρχικά από τον Ιρλανδό φυσικό φιλόσοφο Ρόμπερτ Μπόιλ (Robert Boyle), που πρώτος τον διατύπωσε το 1662.
- Σύμφωνα με αυτό το νόμο, ο όγκος ενός αερίου είναι αντιστρόφως ανάλογος της πίεσης αυτού, σε σταθερή θερμοκρασία.
- Για τις μεταβολές πίεσης και όγκου, αν p_1 είναι η αρχική πίεση του αερίου, V_1 ο αρχικός όγκος του και προκληθεί μεταβολή της πίεσης και του όγκου του σε p_2 και V_2 κατά τρόπο που η θερμοκρασία παραμείνει αμετάβλητη, τότε μεταξύ των δύο καταστάσεων του τελείου αερίου θα ισχύει η μαθηματική σχέση:

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{V_2}{V_1} \Leftrightarrow p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

- Συνεπώς, το γινόμενο $p \cdot V$ της πίεσης επί τον όγκο του αερίου είναι σταθερό και ισούται με $n \cdot R \cdot T$, σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων. Επομένως, όταν η θερμοκρασία αερίου παραμένει σταθερή, το γινόμενο της πίεσης του αερίου επί του αντίστοιχου όγκου του είναι πάντοτε σταθερός αριθμός. Η δε μαθηματική διατύπωση αυτού είναι:

Νόμος των Boyle – Mariotte (ισοθερμοκρασιακή μεταβολή)

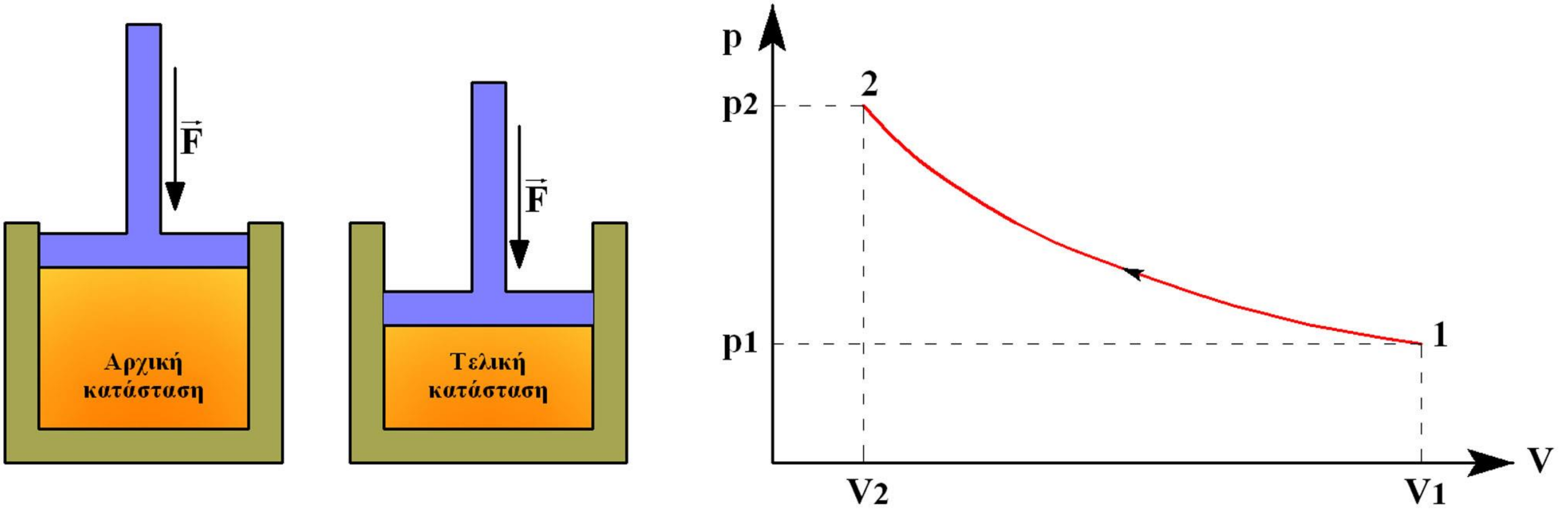
- Επομένως, όταν η θερμοκρασία αερίου παραμένει σταθερή, το γινόμενο της πίεσης του αερίου επί του αντίστοιχου όγκου του είναι πάντοτε σταθερός αριθμός. Η δε μαθηματική διατύπωση αυτού είναι:

$$p \cdot V = \text{const.}$$

- Ερμηνεύοντας το νόμο των Boyle – Mariotte, θα λέγαμε πως αν διπλασιαστεί η πίεση ενός αερίου ο όγκος του θα υποδιπλασιαστεί και αντίστροφα, φθάνει μόνο η θερμοκρασία του να παραμένει σταθερή.
- Σύμφωνα με το νόμο αυτό, όταν σπρώχνεται η λαβή της αεραντλίας ποδηλάτου προς τα μέσα, μειώνεται ο όγκος του αέρα με αποτέλεσμα να αυξάνεται η πίεσή του και να αυξάνεται η πίεση στο λάστιχο του ποδηλάτου, ώστε να το αναγκάζει να φουσκώνει.

Νόμος των Boyle – Mariotte (ισοθερμοκρασιακή μεταβολή)

Διάταξη πραγματοποίησης ισοθερμοκρασιακής μεταβολής και γραφική παράστασή της σε διάγραμμα πίεσης – όγκου (p – V).



Νόμος των Boyle – Mariotte (ισοθερμοκρασιακή μεταβολή)

- Αν ληφθεί υπόψη ότι ειδικός όγκος και η πυκνότητα είναι μεγέθη αντίστροφα μεταξύ τους, τότε εύκολα συνάγεται ότι η σχέση μεταξύ πιέσεων και ειδικών βαρών του αερίου θα παρίσταται από το μαθηματικό τύπο (προσοχή να μην συγχέονται τα ειδικά βάρη γ_1 και γ_2 και ο λόγος των ειδικών θερμοτήτων $\gamma = c_p / c_V$):

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{m/\rho_2}{m/\rho_1} \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{\gamma_1/g}{\gamma_2/g} \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \Leftrightarrow p_1 \cdot \gamma_2 = p_2 \cdot \gamma_1$$

- Ο τελευταίος τύπος αποτελεί μια άλλη έκφραση του νόμου Boyle – Mariotte, κατά την οποία υπό σταθερή θερμοκρασία τα ειδικά βάρη του αερίου είναι ευθέως ανάλογα προς τις αντίστοιχες πιέσεις αυτού.

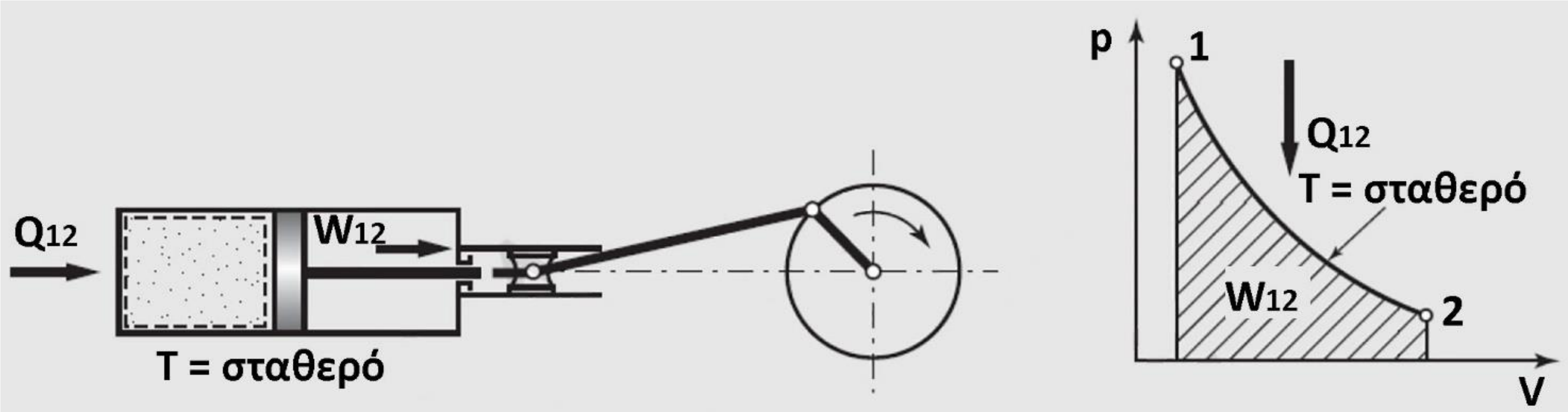
Νόμος των Boyle – Mariotte (ισοθερμοκρασιακή μεταβολή)

- Στην ισοθερμοκρασιακή μεταβολή, με το δεδομένο ότι $T_1 = T_2$, έχουμε:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 0$$

- Ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος δίνει:

$$Q_{12} = (U_2 - U_1) + W_{12} \Rightarrow Q_{12} = W_{12}$$



Νόμος των Boyle – Mariotte (ισοθερμοκρασιακή μεταβολή)

- Επίσης, το αποδιδόμενο έργο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W_{12}=\int_1^2 p\cdot dV \Leftrightarrow W_{12}=\int_1^2 \frac{n\cdot R\cdot T}{V}\cdot dV \Leftrightarrow W_{12}=n\cdot R\cdot T\int_1^2 \frac{dV}{V} \Leftrightarrow$$

$$W_{12}=n\cdot R\cdot T\cdot[\ln(V_2)-\ln(V_1)] \Leftrightarrow W_{12}=n\cdot R\cdot T\cdot\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \Leftrightarrow W_{12}=p_1\cdot V_1\cdot\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\Leftrightarrow W_{12}=p_1\cdot V_1\cdot\ln\left(\frac{n\cdot R\cdot T/p_2}{n\cdot R\cdot T/p_1}\right) \Leftrightarrow W_{12}=p_1\cdot V_1\cdot\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

- Επίσης, ισχύει:

$$p_1\cdot V_1 = p_2\cdot V_2 = n\cdot R\cdot T$$

Νόμος των Gay – Lussac (ισοβαρής μεταβολή)

- Ο νόμος των Gay-Lussac (ή νόμος της ισοβαρούς μεταβολής) αναφέρει πως υπό σταθερή πίεση p και για ορισμένη μάζα αερίου, ο όγκος V του αερίου είναι ανάλογος της απόλυτης θερμοκρασίας του T και εκφράζεται μαθηματικά με τη σχέση:

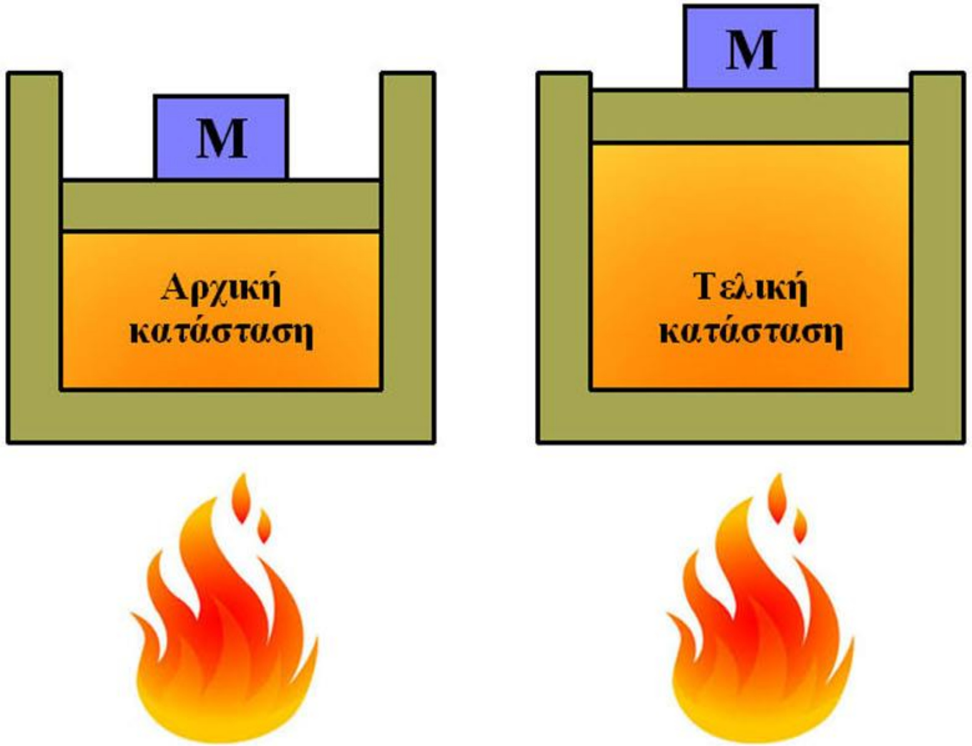
$$\frac{V}{T} = \frac{n \cdot R}{p}$$

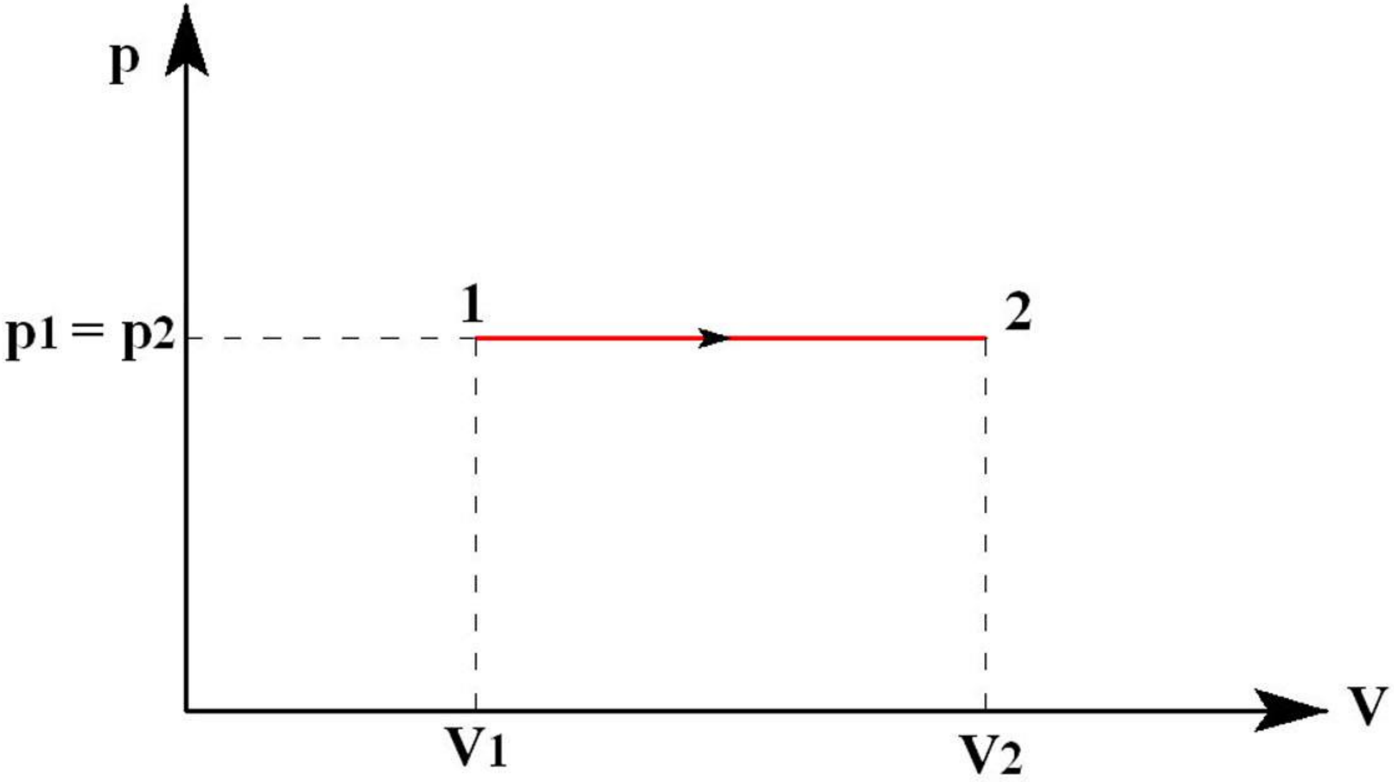
- Αν ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου μεταβαίνει ισοβαρώς (p σταθερή) από τη θερμοδυναμική κατάσταση 1 (p, V_1, T_1) στην κατάσταση 2 (p, V_2, T_2), τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Νόμος των Gay – Lussac (ισοβαρής μεταβολή)

Διάταξη πραγματοποίησης ισοβαρούς μεταβολής και γραφική παράστασή της σε διάγραμμα πίεσης – όγκου (p – V).





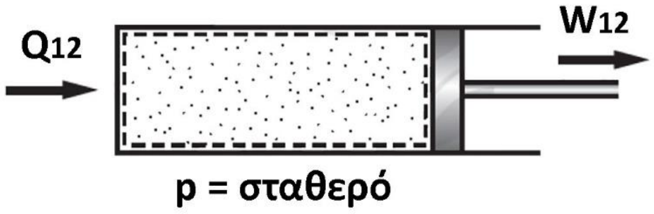
Νόμος των Gay – Lussac (ισοβαρής μεταβολή)

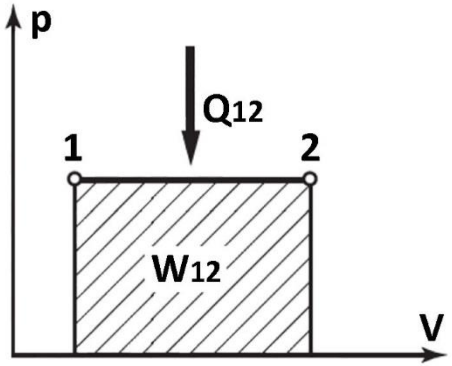
- Στην ισοβαρή μεταβολή ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος γράφεται:

$$Q_{12}= (U_2 - U_1) + W_{12}$$

- Η μεταβολή της ενθαλπίας του θερμοδυναμικού συστήματος ισούται με τη θερμότητα που αποδόθηκε και σε αυτό:

$$Q_{12}=H_2-H_1$$





- Για τέλεια αέρια η θερμότητα αυτή ισούται με:

$$Q_{12}=H_2-H_1=m\cdot c_p\cdot(T_2-T_1)$$

- Το έργο που παράγεται από το θερμοδυναμικό σύστημα ισούται με:

$$W_{12}=p\cdot(V_2-V_1)$$

και στο διάγραμμα p-V παριστάνεται με την επιφάνεια κάτω από την ευθεία 1-2.

- Με βάση την καταστατική εξίσωση, η τελευταία σχέση επίσης γράφεται:

$$W_{12}=m\cdot R'\cdot(T_2-T_1)$$

Παράδειγμα 5: νόμοι τελείων αερίων

Μέσα στον κύλινδρο του σχήματος υπάρχει αέρας μάζας 2 kg, ο οποίος εκτονώνεται με σταθερή πίεση από θερμοκρασία 4 ^oC και πίεση 20 bar σε θερμοκρασία 200 ^oC. Ζητείται το έργο που δίνει ο αέρας στο έμβολο.

Λύση:

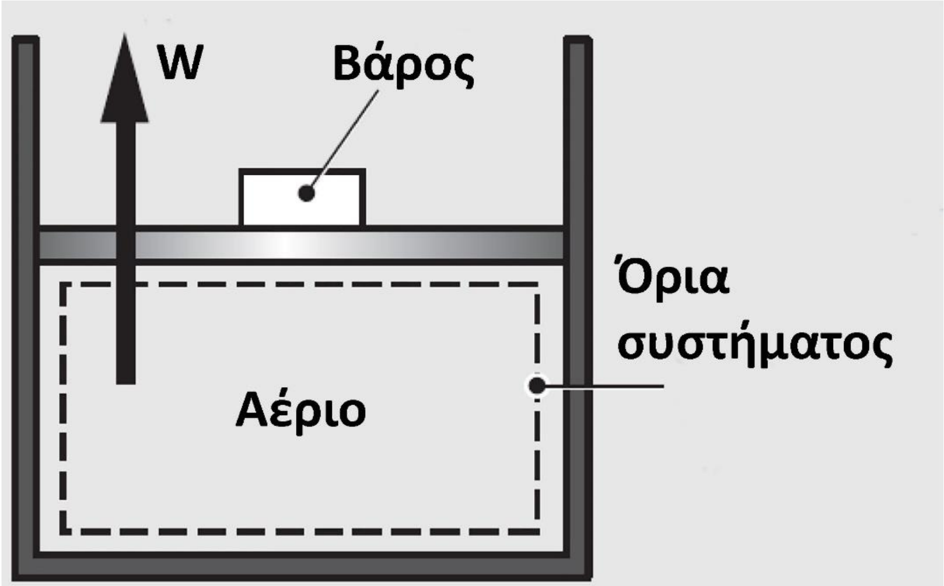
Πρόκειται για μία ισοβαρή μεταβολή για την οποία ισχύει ο νόμος των Gay – Lussac.

Το αποδιδόμενο έργο από το σύστημα στο περιβάλλον δίνεται από τη σχέση:

$$W=p\cdot(V_2-V_1)$$

Οι όγκοι V_1 και V_2 θα υπολογιστούν με την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων στην ακόλουθη μορφή της:

$$p\cdot V = m\cdot R'\cdot T \Leftrightarrow V=\frac{m\cdot R'\cdot T}{p}$$



Παράδειγμα 5: νόμοι τελείων αερίων

Η σταθερά του αέρα είναι R′ = 0,287 kJ/(kg·K) = 287 J/(kg·K) . Εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση δύο φορές, για τις δύο θερμοκρασίες των καταστάσεων του αέρα:

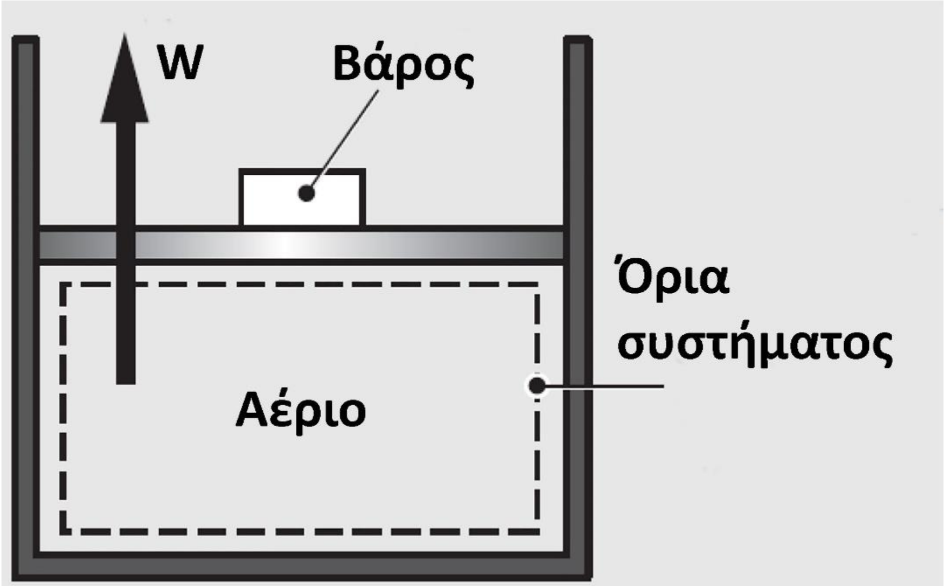
$$V_1 = \frac{m \cdot R' \cdot T_1}{p} \Rightarrow V_1 = \frac{2\ \text{kg} \cdot 287\ \text{J/(kg·K)} \cdot (4+273)\text{K}}{20 \cdot 10^5\ \text{Pa}} \Leftrightarrow V_1 = 0{,}0795\ \text{m}^3$$

$$V_2 = \frac{m \cdot R' \cdot T_2}{p} \Rightarrow V_2 = \frac{2\ \text{kg} \cdot 287\ \text{J/(kg·K)} \cdot (200+273)\text{K}}{20 \cdot 10^5\ \text{Pa}} \Leftrightarrow V_2 = 0{,}1357\ \text{m}^3$$

Τελικά το αποδιδόμενο έργο ισούται με:

$$W = p \cdot (V_2 - V_1) \Rightarrow W = 20 \cdot 10^5\ \text{Pa} \cdot (0{,}1357 - 0{,}0795)\text{m}^3 \Leftrightarrow$$

$$W = 112.400\ \text{J} = 112{,}4\ \text{kJ}$$



Παράδειγμα 6: διεργασία υπό σταθερή πίεση

Σε ένα σύστημα κυλίνδρου – εμβόλου έχουμε 1 kg αέρα, τον οποίο θερμαίνουμε με σταθερή πίεση 350 kPa. Η εσωτερική ενέργεια και η θερμοκρασία αυξάνονται κατά 200 kJ και 70 K αντίστοιχα. Εάν το έργο που παράγεται είναι 100 kJ, να προσδιοριστεί η μεταβολή του όγκου και η ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση.

<u>Λύση</u>:

Το αποδιδόμενο έργο από το σύστημα προς το περιβάλλον για ισοβαρή μεταβολή δίνεται από τη σχέση:

$$W = p\cdot(V_2 - V_1) \Leftrightarrow \Delta V = \frac{W}{p} \Rightarrow \Delta V = \frac{100\ \text{kJ}}{350\ \text{kPa}} \Leftrightarrow \Delta V = 0{,}286\ \text{m}^3$$

Η θερμότητα που δίδεται στο σύστημα ισούται με:

$$Q_{12} = m\cdot c_p\cdot(T_2 - T_1) \Leftrightarrow c_p = \frac{Q_{12}}{m\cdot(T_2 - T_1)} \Rightarrow c_p = \frac{Q_{12}}{m\cdot(T_2 - T_1)}$$

Παράδειγμα 6: διεργασία υπό σταθερή πίεση

Σύμφωνα με τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο:

$$Q_{12}=(U_2-U_1)+W_{12} \Rightarrow Q_{12}=200\ \text{kJ}+100\ \text{kJ} \Leftrightarrow Q_{12}=300\ \text{kJ}$$

Η θερμότητα που δίδεται στο σύστημα ισούται με:

$$Q_{12}=m\cdot c_p\cdot(T_2-T_1) \Leftrightarrow c_p=\frac{Q_{12}}{m\cdot(T_2-T_1)} \Rightarrow c_p=\frac{300\ \text{kJ}}{1\ \text{kg}\cdot 70\ \text{K}} \Leftrightarrow c_p=4{,}286\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$$

Παράδειγμα 7: διεργασία υπό σταθερή πίεση

Σε έναν κύλινδρο με έμβολο υπάρχει 0,5 kg αέρα, ο οποίος, καθώς θερμαίνεται, εκτονώνεται με σταθερή πίεση 2,5 bar από αρχική θερμοκρασία 10 ^{o}C σε τελική θερμοκρασία 300 ^{o}C. Ζητείται να βρεθεί:

α. το ποσό της θερμότητας που δόθηκε στη διάρκεια της θέρμανσης του αέρα

β. το έργο που απέδωσε το έμβολο

γ. η μεταβολή της ενθαλπίας και της εσωτερικής ενέργειας

Λύση:

α. Η ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση του αέρα για θερμοκρασία 10 ^{o}C (283 K) βρίσκεται από πίνακες c_p = 1,0047 kJ/(kg·K). Η παραλαμβανόμενη θερμότητα από τον αέρα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q_{12} = m \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) \Rightarrow Q_{12} = 0{,}5\ \text{kg} \cdot 1{,}0047\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (300 - 10)\text{K} \Leftrightarrow Q_{12} = 145{,}68\ \text{kJ}$$

Παράδειγμα 7: διεργασία υπό σταθερή πίεση

β. Το έργο που αποδίδεται από το έμβολο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W_{12}=p\cdot(V_2-V_1)=m\cdot R'\cdot(T_2-T_1)\Rightarrow W_{12}=0{,}5\ \text{kg}\cdot 0{,}287\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\cdot(300-10)\text{K}\Leftrightarrow W_{12}=41{,}62\ \text{kJ}$$

όπου $R'=0{,}287$ kJ/(kg·K) η σταθερά του αέρα.

γ. Από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο υπολογίζουμε την αλλαγή της εσωτερικής ενέργειας:

$$Q_{12}=(U_2-U_1)+W_{12}\Leftrightarrow U_{12}=Q_{12}-W_{12}\Rightarrow U_{12}=145{,}68\ \text{kJ}-41{,}62\ \text{kJ}\Leftrightarrow U_{12}=104{,}06\ \text{kJ}$$

Η αλλαγή της ενθαλπίας ισούται με την προσφερόμενη στο σύστημα θερμότητα:

$$H_{12}=Q_{12}=145{,}68\ \text{kJ}$$

Νόμος του Charles (ισόχωρη μεταβολή)

- Σύμφωνα με το νόμο του Charles (νόμος της ισόχωρης μεταβολής), η πίεση p μιας ορισμένης ποσότητας τελείου αερίου είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας του T, υπό την προϋπόθεση ότι ο όγκος του να είναι σταθερός (V=σταθ.):

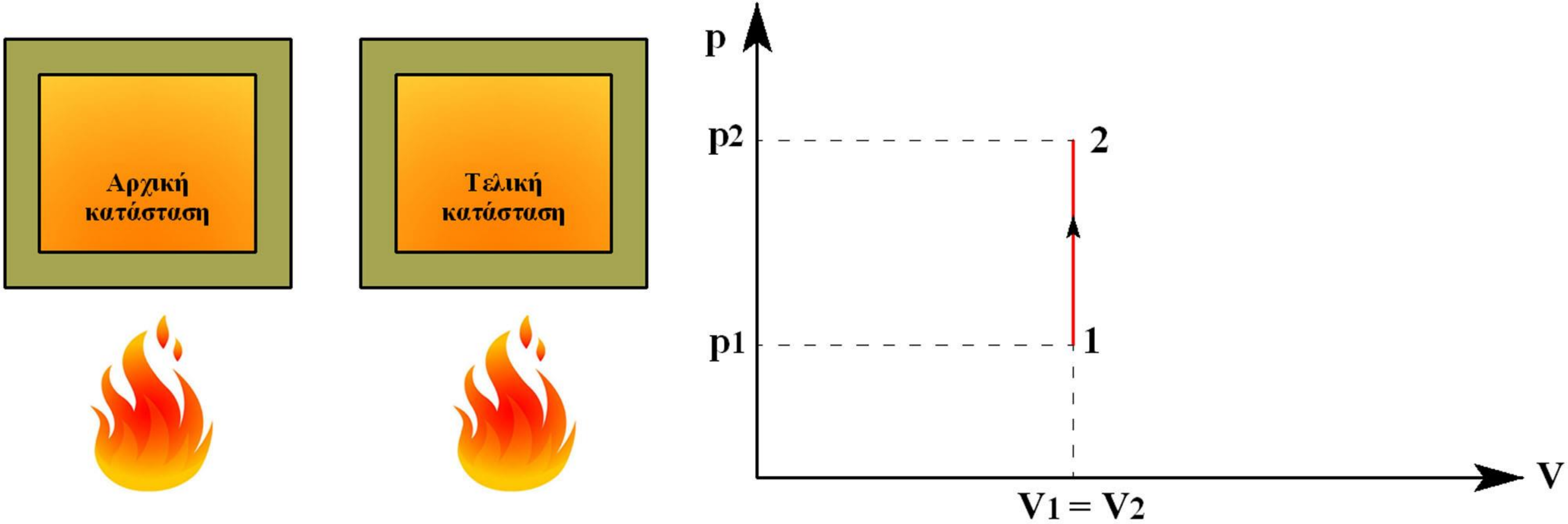
$$\frac{p}{T} = \frac{n \cdot R}{V}$$

- Αν ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου μεταβαίνει ισόχωρα (V σταθερός) από τη θερμοδυναμική κατάσταση 1 (p_1, V, T_1) στην κατάσταση 2 (p_2, V, T_2), τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

Νόμος του Charles (ισόχωρη μεταβολή)

Διάταξη πραγματοποίησης ισόχωρης μεταβολής και γραφική παράστασή της σε διάγραμμα πίεσης – όγκου (p – V).



Νόμος του Charles (ισόχωρη μεταβολή)

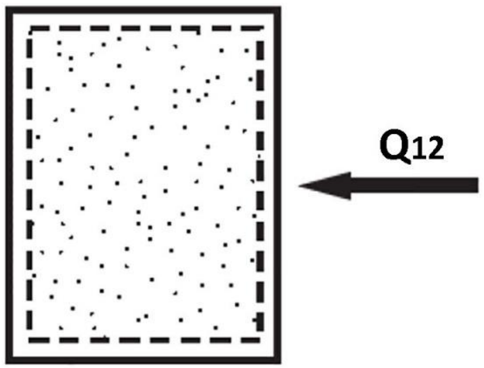
- Στην ισόχωρη μεταβολή δεν έχουμε μεταβολή του όγκου, οπότε το έργο W ισούται με 0.

- Στην ισόχωρη μεταβολή ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος γράφεται:

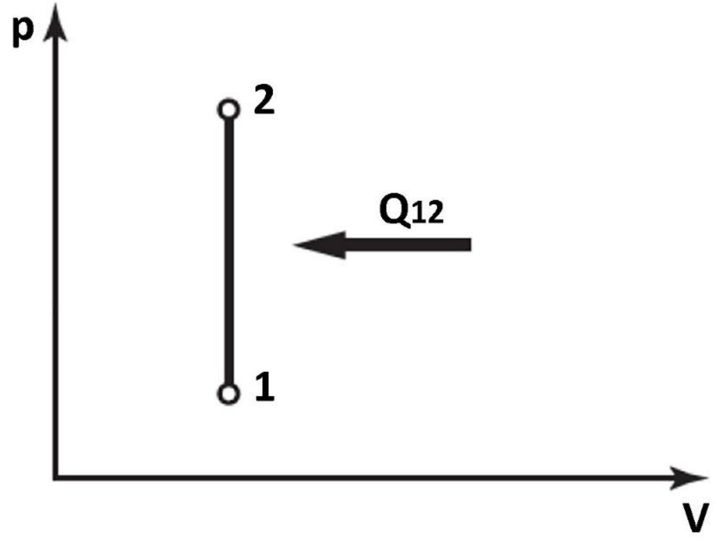
$$Q_{12}=(U_2-U_1)+W_{12} \Rightarrow Q_{12}=(U_2-U_1)$$

- Για τέλεια αέρια η θερμότητα που προσδίδεται στο σύστημα ισούται με:

$$Q_{12}=H_2-H_1=m\cdot c_p\cdot(T_2-T_1)$$



V = σταθερό



Παράδειγμα 8: διεργασία υπό σταθερό όγκο

Ένα κλειστό δοχείο έχει αμετάβλητο όγκο 1 m^3 και περιέχει αέρα υπό πίεση 3,45 kNt/m^2 και θερμοκρασία 0 ^oC. Στον αέρα εντός του δοχείου προσδίδεται θερμότητα έως ότου η θερμοκρασία του να φτάσει στους 327 ^oC. Ζητείται να υπολογιστεί το ποσό της θερμότητας που δόθηκε στον αέρα σε kJ.

<u>Λύση</u>:

Προφανώς πρόκειται για ισόχωρη μεταβολή, οπότε η θερμότητα που προσδίδεται στον αέρα ισούται με:

$$Q_{12}=U_{12}=m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1)$$

Η μάζα του αέρα μπορεί να υπολογιστεί από την καταστατική εξίσωση για την αρχική κατάστασή του:

$$p_1 \cdot V = m \cdot R' \cdot T_1 \Leftrightarrow m= \frac{p_1 \cdot V}{R' \cdot T_1} \Rightarrow m= \frac{3{,}45 \text{ kPa} \cdot 1 \text{ m}^3}{0{,}287 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)} \cdot 273 \text{ K}} \Leftrightarrow m= 0{,}044 \text{ kg}$$

Παράδειγμα 8: διεργασία υπό σταθερό όγκο

Από τους πίνακες βρίσκουμε την ειδική θερμότητα του αέρα υπό σταθερό όγκο c_v = 0,7176 kJ/(kg·K). Η προσδιδόμενη θερμότητα υπολογίζεται τελικά από τη σχέση:

$$Q_{12} = m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) \Rightarrow Q_{12} = 0{,}044\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}7176\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}} \cdot (327 - 0)\mathrm{K} \Leftrightarrow Q_{12} = 10{,}32\ \mathrm{kJ}$$

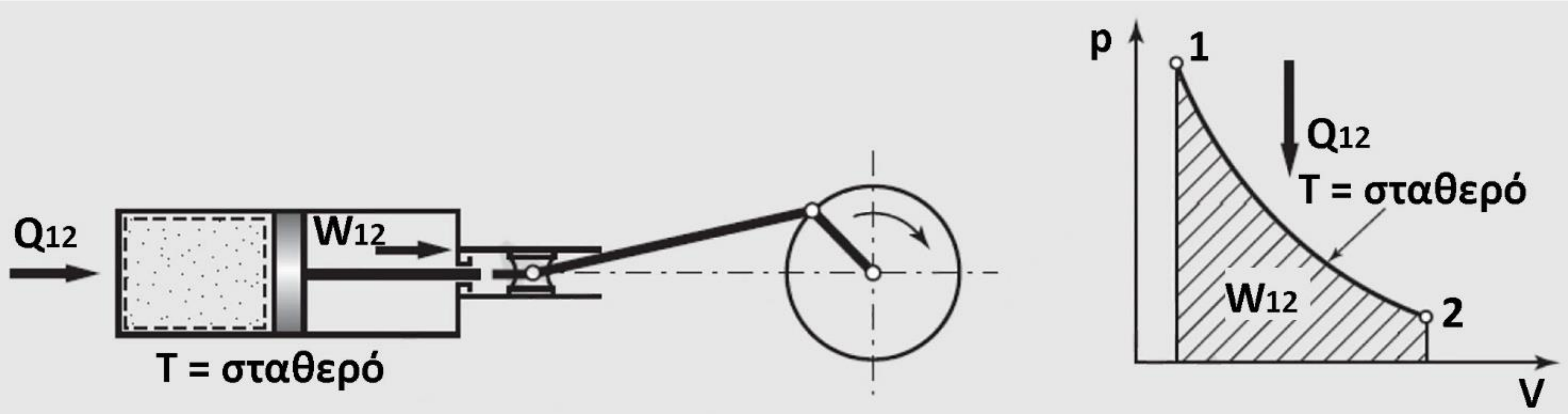
Παράδειγμα 9: διεργασία υπό σταθερό όγκο

Ο κύλινδρος του σχήματος λαμβάνει θερμότητα με σταθερή θερμοκρασία 500 K και αρχική πίεση 200 kPa. Ο αρχικός όγκος είναι 0,01 m^3 και ο τελικός 0,07 m^3. Να βρεθεί η θερμότητα που δόθηκε στον κύλινδρο και το έργο που αποδόθηκε.

<u>Λύση</u>:

Πρόκειται για ισόχωρη μεταβολή, οπότε το παραγόμενο έργο δίνεται από τη σχέση:

$$W_{12}=p_1 \cdot V_1 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \Rightarrow W_{12}=200\ \text{kPa} \cdot 0{,}01\ \text{m}^3 \cdot \ln\left(\frac{0{,}07\ \text{m}^3}{0{,}01\text{m}^3}\right) \Leftrightarrow W_{12}=3{,}892\ \text{kJ}$$



Νόμος του Poison (αδιαβατική μεταβολή)

- Ο νόμος Poisson (ή νόμος της αδιαβατικής μεταβολής) εκφράζει τη μεταβολή καταστάσεως ενός τελείου αερίου, η οποία πραγματοποιείται χωρίς την ανταλλαγή θερμότητας με το εξωτερικό περιβάλλον.
- Αφού σε μία αδιαβατική μεταβολή η θερμότητα που ανταλλάσσεται μεταξύ αερίου και περιβάλλοντος είναι μηδενική, ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος γράφεται:

$$W = Q - \Delta U \Leftrightarrow W = -\Delta U$$

όπου:

W: το έργο που είτε παράγεται, είτε δαπανάται κατά τη μεταβολή

Q: η ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ αερίου και περιβάλλοντος

ΔU: η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου.

- Δηλαδή, σε μία αδιαβατική μεταβολή όλο το παραγόμενο έργο προέρχεται από τη μείωση της εσωτερικής ενέργειας του αερίου. Σε μία αντιστρεπτή αδιαβατική μεταβολή η εντροπία του συστήματος παραμένει σταθερή. Συνεπώς η ισεντροπική μεταβολή είναι η αναστρέψιμη αδιαβατική.

Νόμος του Poison (αδιαβατική μεταβολή)

- Η μαθηματική έκφραση του νόμου του Poisson μπορεί να πάρει τις μορφές:

$$p_1 \cdot V_1^{\gamma} = p_2 \cdot V_2^{\gamma} = C = \text{const.}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma - 1} \text{ ή } \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \; \left(T \cdot V^{\gamma - 1}\right) = \text{const.}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \text{ ή } \frac{p_1}{p_2} == \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \; \left(T^{\gamma} \cdot p^{\gamma - 1}\right) = \text{const.}$$

όπου γ είναι ο λόγος της ειδικής θερμότητας του αερίου υπό σταθερή πίεση προς την ειδική θερμότητα του αερίου υπό σταθερό όγκο:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Νόμος του Poison (αδιαβατική μεταβολή)

- Το έργο στην αδιαβατική μεταβολή μπορεί να εκφραστεί με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$W=-\Delta U \Leftrightarrow W=-m\cdot c_v\cdot(T_2-T_1)\Leftrightarrow W=-m\cdot c_v\cdot \frac{p_2\cdot \upsilon_2-p_1\cdot \upsilon_1}{R'}$$

επειδή:

$$p\cdot V = m\cdot R'\cdot T \Leftrightarrow p\cdot \frac{V}{m} = R'\cdot T\Leftrightarrow p\cdot \upsilon = R'\cdot T\Leftrightarrow T= \frac{p\cdot \upsilon}{R'}$$

Επιπλέον, με το δεδομένο ότι $\gamma=\frac{c_p}{c_v}$ και $c_p-c_v=R'$:

$$\gamma=\frac{c_p}{c_v} \Leftrightarrow\gamma=\frac{c_v+R'}{c_v}\Leftrightarrow\gamma=1+\frac{R'}{c_v}\Leftrightarrow \frac{R'}{c_v}=\gamma-1\Leftrightarrow \frac{c_v}{R'}=\frac{1}{\gamma-1}\Leftrightarrow-\frac{c_v}{R'}=\frac{1}{1-\gamma}$$

Νόμος του Poison (αδιαβατική μεταβολή)

- Με βάση την τελευταία σχέση, το έργο στην αδιαβατική μεταβολή γίνεται:

$$W=-m\cdot c_V\cdot\left(\frac{p_2\cdot \upsilon_2-p_1\cdot \upsilon_1}{R'}\right)\Leftrightarrow W=m\cdot\frac{p_2\cdot \upsilon_2-p_1\cdot \upsilon_1}{1-\gamma}$$

Επιπλέον, από την καταστατική εξίσωση μπορούμε να γράψουμε:

$$W=m\cdot\frac{p_2\cdot \upsilon_2-p_1\cdot \upsilon_1}{1-\gamma}\Leftrightarrow W=m\cdot R'\cdot\frac{T_2-T_1}{1-\gamma}$$

και ακόμα:

$$W=m\cdot\frac{p_2\cdot \upsilon_2-p_1\cdot \upsilon_1}{1-\gamma}\Leftrightarrow W=\frac{p_2\cdot V_2-p_1\cdot V_1}{1-\gamma}$$

Νόμος του Poison (αδιαβατική μεταβολή)

- Η πρώτη από τις ανωτέρω σχέσεις του έργου μπορεί να αποδειχθεί και ως εξής:

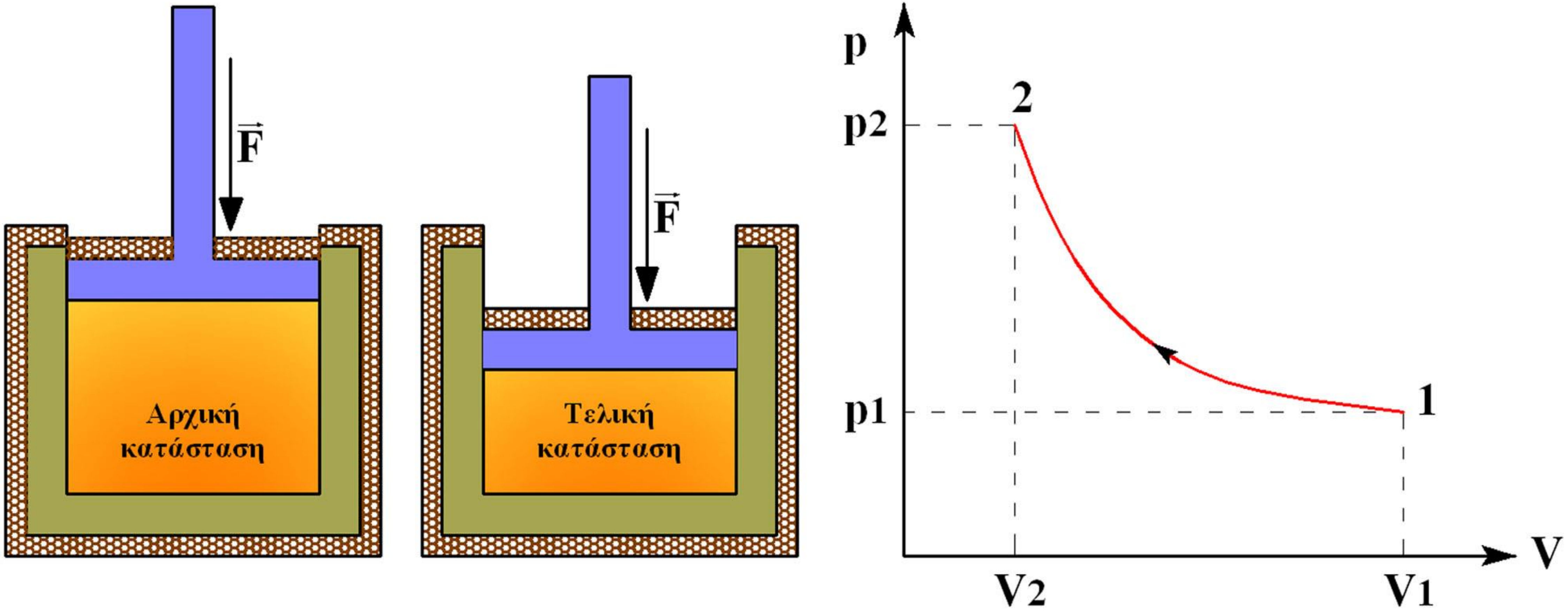
$$W=\int_{V_1}^{V_2} p\cdot dV \Leftrightarrow W=\int_{V_1}^{V_2} \frac{C}{V^{\gamma}}\cdot dV \Leftrightarrow W=C\cdot\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}} \Leftrightarrow W=C\cdot\left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_{V_1}^{V_2}$$

$$\Leftrightarrow W=C\cdot\frac{V_2^{1-\gamma}-V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} \Leftrightarrow W=\frac{C\cdot V_2^{1-\gamma}-C\cdot V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} \Leftrightarrow W=\frac{p_2\cdot V_2^{\gamma}\cdot V_2^{1-\gamma}-p_1\cdot V_1^{\gamma}\cdot V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$W=\frac{p_2\cdot V_2-p_1\cdot V_1}{1-\gamma}$$

Νόμος του Poison (αδιαβατική μεταβολή)

Διάταξη πραγματοποίησης αδιαβατικής μεταβολής και γραφική παράστασή της σε διάγραμμα πίεσης – όγκου (p – V).



Παράδειγμα 10: αδιαβατική διεργασία

Ένα χιλιόγραμμο αέρα εκτονώνεται αδιαβατικά από πίεση 10 bar και θερμοκρασία 200 ^oC μέχρι πίεση 2 bar. Να βρεθεί:

α. ο ειδικός όγκος και η θερμοκρασία στο τέλος της εκτόνωσής του

β. το έργο που απέδωσε ο αέρας.

<u>Λύση</u>:

α. Καθώς έχουμε αδιαβατική μεταβολή και δίνονται οι πιέσεις του αέρα στην αρχική και τελική κατάσταση, ισχύει η σχέση:

$$p_1 \cdot V_1^{\gamma} = p_2 \cdot V_2^{\gamma} \Rightarrow p_1 \cdot \upsilon_1^{\gamma} = p_2 \cdot \upsilon_2^{\gamma} \Leftrightarrow \upsilon_2 = \upsilon_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Η ανωτέρω συνεπαγωγή ισχύει επειδή έχουμε κλειστό σύστημα, άρα η μάζα του αέρα m παραμένει κοινή στις δύο καταστάσεις.

Παράδειγμα 10: αδιαβατική διεργασία

Ο ειδικός όγκος υ_1 στην αρχική κατάσταση μπορεί να υπολογιστεί με απλή εφαρμογή της καταστατικής εξίσωσης:

$$p_1 \cdot \upsilon_1 = R' \cdot T_1 \Leftrightarrow \upsilon_1 = \frac{R' \cdot T_1}{p_1} \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{287\ \mathrm{J/(kg \cdot K)} \cdot 473\ \mathrm{K}}{10 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}} \Leftrightarrow \upsilon_1 = 0{,}136\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}$$

Ο ειδικός όγκος στην κατάσταση 2 προκύπτει (γ=1,4 για τον αέρα από πίνακα):

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Leftrightarrow \upsilon_2 = 0{,}136\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}} \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^{\frac{1}{1{,}4}} \Leftrightarrow \upsilon_2 = 0{,}429\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}$$

Η θερμοκρασία T_2 στο τέλος της εκτόνωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Leftrightarrow T_2 = \frac{T_1}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \Leftrightarrow T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow T_2 = 473\mathrm{K} \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} \Leftrightarrow T_2 = 298{,}6\ \mathrm{K}$$

Παράδειγμα 10: αδιαβατική διεργασία

β. Το έργο που απέδωσε ο αέρας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W=m\cdot\frac{p_2\cdot\upsilon_2-p_1\cdot\upsilon_1}{1-\gamma}\Rightarrow W=1\ \mathrm{kg}\cdot\frac{2\cdot10^5\,\mathrm{Pa}\cdot0{,}429\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}-10\cdot10^5\,\mathrm{Pa}\cdot0{,}136\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}}{1-1{,}4}\Leftrightarrow W=125{,}5\ \mathrm{kJ}$$

Διεργασία υπό σταθερή πίεση σε ανοιχτά συστήματα

- Όπως έχουμε ήδη δει, ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος σε ανοιχτά συστήματα γράφεται:

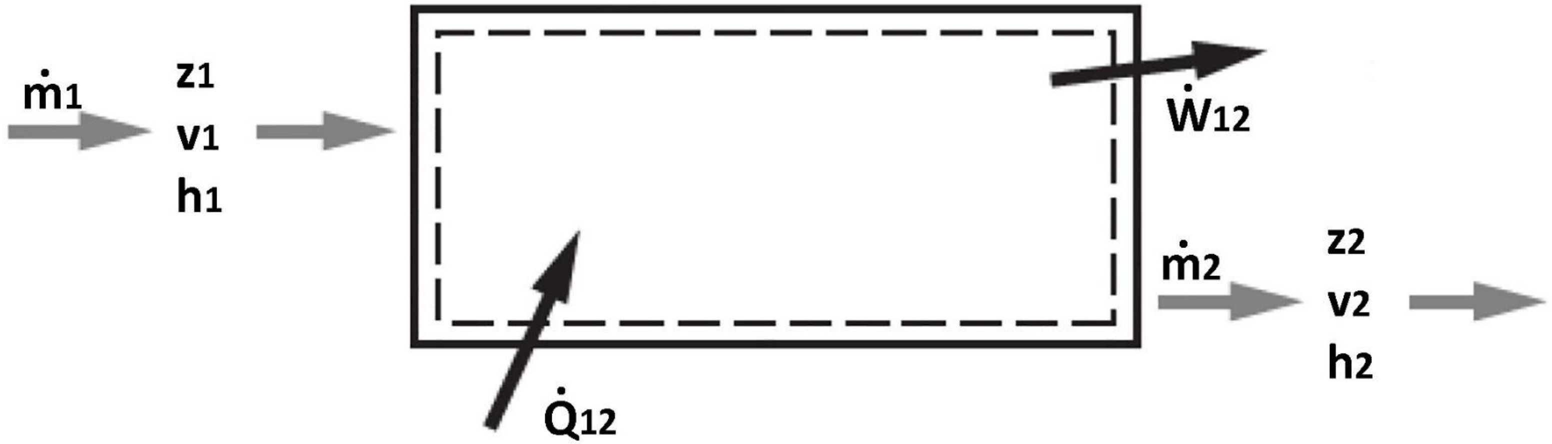
$$\dot{m}_1 \cdot \left(g\cdot z_1+\frac{v_1^2}{2}+h_1\right)+\dot{Q}_{12}=\dot{m}_2\cdot\left(g\cdot z_2+\frac{v_2^2}{2}+h_2\right)+\dot{W}_{12}$$

όπου:

v_1, v_2 : η ταχύτητα εισερχόμενης και εξερχόμενης ροής στο σύστημα σε m/s

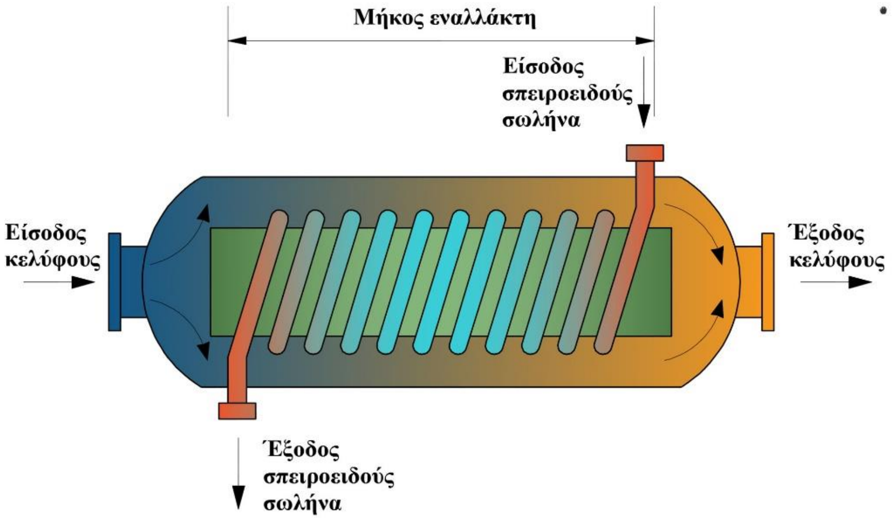
z_1, z_2 : υψομετρική διαφορά από επίπεδο αναφοράς μέτρησης υψομέτρων της στάθμης εισερχόμενης και εξερχόμενης ροής στο θερμοδυναμικό σύστημα σε m

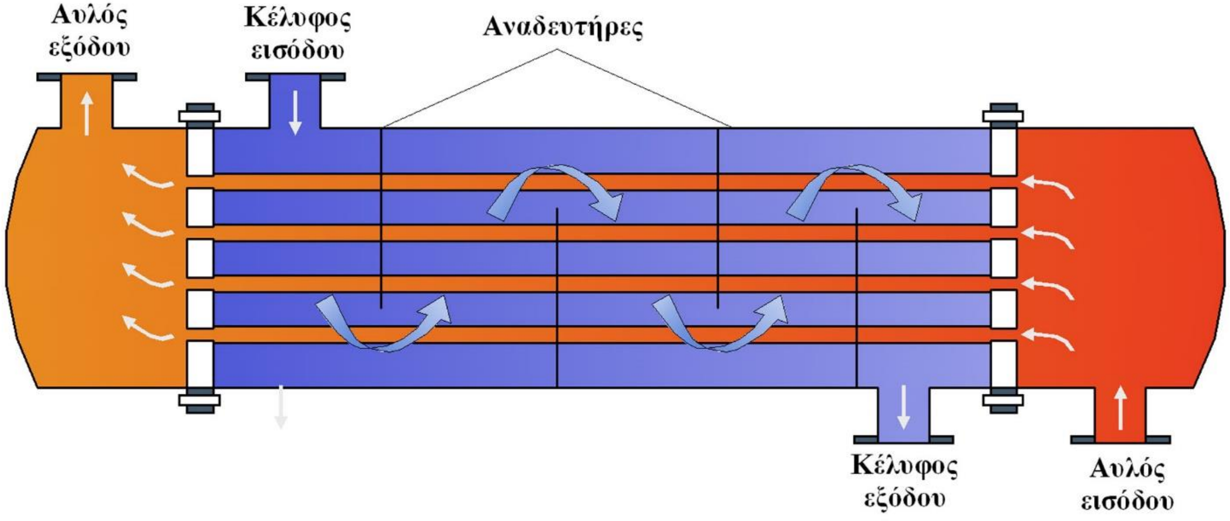
h_1, h_2 : η ειδική ενθαλπία εισερχόμενης και εξερχόμενης ροής στο σύστημα σε kJ/kg
m_1, m_2 : η εισερχόμενη και εξερχόμενη μάζα του μέσου στο σύστημα.



Διεργασία υπό σταθερή πίεση σε ανοιχτά συστήματα

- Συνήθως κατά τη διεργασία υπό σταθερή πίεση σε ανοιχτά συστήματα δεν έχουμε παραγωγή έργου.
- Το πιο γνωστό ανοιχτό σύστημα που εκτελείται διεργασία υπό σταθερή πίεση είναι ο εναλλάκτης θερμότητας, π.χ. στο συμπυκνωτή ενός ψυγείου ή μιας αντλίας θερμότητας.
- Στους εναλλάκτες θερμότητας το πρόσημο της θερμότητας θα είναι θετικό, αν η θερμότητα δίδεται από το περιβάλλον στο σύστημα (π.χ. μια αντλία θερμότητα σε λειτουργία θέρμανσης) ή αρνητικό αν η θερμότητα αποβάλλεται από το σύστημα (π.χ. στο ψυγείο ή σε μία αντλία θερμότητας κατά τη λειτουργία σε ψύξη).





Παράδειγμα 10:
Διεργασία υπό σταθερή πίεση σε ανοιχτά συστήματα

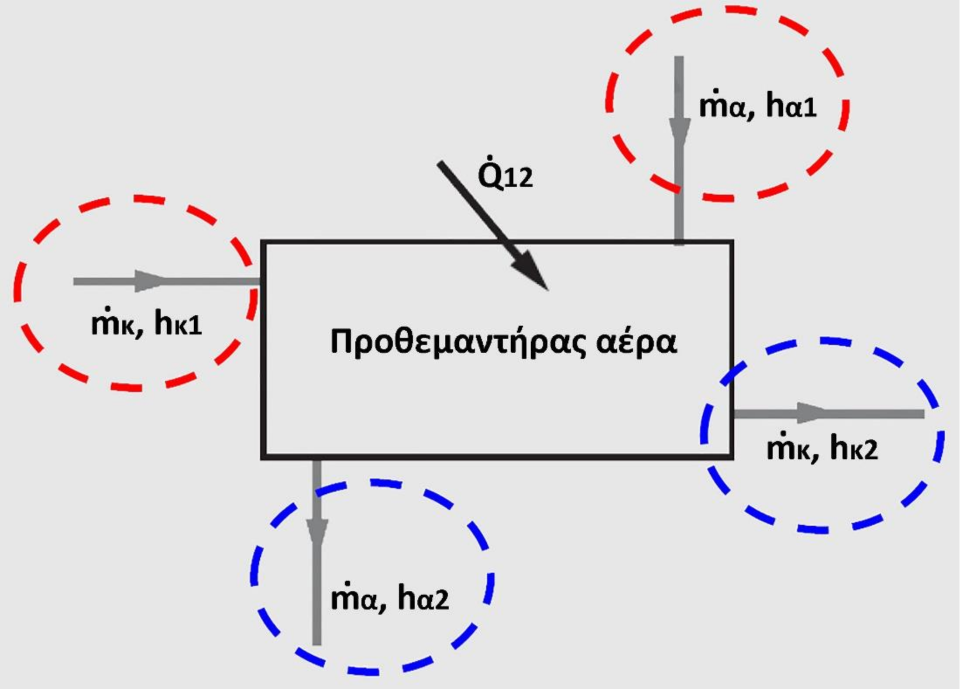
Σε έναν προθερμαντήρα αέρα εισέρχεται αέρας θερμοκρασίας 5 ^{o}C με παροχή μάζας 100 kg/min και εξέρχεται με θερμοκρασία 90 ^{o}C. Στον προθερμαντήρα εισέρχεται επίσης από ανεξάρτητο κύκλωμα, συνεπώς χωρίς να αναμειχθεί με τον αέρα, ζεστό καυσαέριο θερμοκρασίας 70 ^{o}C με παροχή μάζας 450 kg/min και εξέρχεται με θερμοκρασία 50 ^{o}C. Εάν θεωρήσουμε το καυσαέριο ως τέλειο αέριο με ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση 1,05 kJ/(kg·K), ζητείται να υπολογιστεί η απώλεια θερμότητας από το κέλυφος του προθερμαντήρα.

<u>Λύση</u>:

Ο ισολογισμός θερμικής ισχύος στον προθεμαντήρα μπορεί να γραφεί:

$$\dot{Q}_{12}=\dot{Q}_{\alpha}+\dot{Q}_{\kappa}\Leftrightarrow$$

$$\dot{Q}_{12}=\dot{m}_{\alpha}\cdot c_{p\alpha}\cdot\left(T_{2\alpha}-T_{1\alpha}\right)+\dot{m}_{\kappa}\cdot c_{p\kappa}\cdot\left(T_{2\kappa}-T_{1\kappa}\right)$$



Παράδειγμα 10:
Διεργασία υπό σταθερή πίεση σε ανοιχτά συστήματα

Η ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση του αέρα δίνεται από πίνακες 1,0047 kJ/(kg·K). Τα υπόλοιπα μεγέθη στον ισολογισμό θερμικής ισχύος είναι γνωστά, οπότε:

$$\dot{Q}_{12}=\dot{m}_{\alpha}\cdot c_{p\alpha}\cdot\left(T_{2\alpha}-T_{1\alpha}\right)+\dot{m}_{\kappa}\cdot c_{p\kappa}\cdot\left(T_{2\kappa}-T_{1\kappa}\right) \Leftrightarrow$$

$$\dot{Q}_{12}=\frac{100}{60}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\cdot 1{,}0047\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\cdot(90-5)\mathrm{K}+\frac{450}{60}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\cdot 1{,}05\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\cdot(50-70)\mathrm{K} \Leftrightarrow \dot{Q}_{12}=-15{,}167\ \mathrm{kW}$$

Το αρνητικό πρόσημο στην υπολογισμένη θερμική ισχύ συνεπάγεται ότι η απορριπτόμενη θερμότητα από τα καυσαέρια είναι μεγαλύτερη από την προσδιδόμενη στον αέρα.

Διεργασία υπό σταθερή θερμοκρασία σε ανοιχτά συστήματα

- Η διεργασία υπό σταθερή θερμοκρασία, ή ισοθερμοκρασιακή διεργασία, πρακτικά είναι μία πολύ προσεγγιστική διεργασία. Στην περίπτωση αυτή η καταστατική εξίσωση γράφεται:

$$p_1 \cdot V_1 = m \cdot R' \cdot T_1 \Leftrightarrow p_1 \cdot \upsilon_1 = R' \cdot T_1$$

- Θεωρώντας την κινητική και τη δυναμική ενέργεια του συστήματος αμελητέες, το αποδιδόμενο από το σύστημα έργο γράφεται:

$$\dot{W}_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV \Leftrightarrow \dot{W}_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\dot{m} \cdot R' \cdot T}{V} \cdot dV \Leftrightarrow \dot{W}_{12} = \dot{m} \cdot R' \cdot T \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \cdot \Leftrightarrow$$

$$\dot{W}_{12} = \dot{m} \cdot R' \cdot T \cdot [\ln V]_{V_1}^{V_2} \Leftrightarrow \dot{W}_{12} = \dot{m} \cdot R' \cdot T \cdot (\ln V_2 - \ln V_1) \Leftrightarrow \dot{W}_{12} = \dot{m} \cdot R' \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Leftrightarrow \dot{W}_{12} = \dot{m} \cdot R' \cdot T \cdot \ln \frac{\dot{m} \cdot R' \cdot T / p_2}{\dot{m} \cdot R' \cdot T / p_1} \Leftrightarrow \dot{W}_{12} = \dot{m} \cdot R' \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Διεργασία υπό σταθερή θερμοκρασία σε ανοιχτά συστήματα

- Η τελευταία σχέση μπορεί να πάρει τις ακόλουθες μορφές

$$\dot{W}_{12} = \dot{m} \cdot R' \cdot T \cdot \ln\frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow$$

$$\dot{W}_{12} = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln\frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow$$

$$\dot{W}_{12} = p_2 \cdot V_2 \cdot \ln\frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow$$

$$\dot{W}_{12} = \dot{m} \cdot p_1 \cdot \upsilon_1 \cdot \ln\frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow$$

$$\dot{W}_{12} = \dot{m} \cdot p_2 \cdot \upsilon_2 \cdot \ln\frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow$$

Παράδειγμα 11:
Διεργασία υπό σταθερή θερμοκρασία σε ανοιχτά συστήματα

Σε μία μηχανή έχουμε ροή αέρα με σταθερή θερμοκρασία 400 K. Να βρεθεί το έργο ανά μονάδα μάζας, εάν η πίεση του αέρα στην έξοδο είναι το ένα τρίτο της πίεσης στην είσοδο και η πίεση εισόδου είναι 207 kPa.

<u>Λύση</u>:

Το έργο ανά μονάδα μάζας δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{W}_{12}=\dot{m}\cdot p_1\cdot \upsilon_1\cdot \ln\frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{\dot{W}_{12}}{\dot{m}} = p_1\cdot \upsilon_1\cdot \ln\frac{p_1}{p_2}$$

Στην ανωτέρω έκφραση του ειδικού έργου οι πιέσεις είναι γνωστές. Ο ειδικός όγκος του αέρα στην είσοδο της μηχανής μπορεί να υπολογιστεί από την καταστατική εξίσωση:

$$p_1\cdot \upsilon_1= R'\cdot T_1 \Leftrightarrow \upsilon_1=\frac{R'\cdot T_1}{p_1} \Leftrightarrow \upsilon_1=\frac{0{,}287\ \mathrm{kJ/(kg\cdot K)}\cdot 400\ \mathrm{K}}{207\ \mathrm{kPa}} \Leftrightarrow \upsilon_1=0{,}5546\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}$$

Παράδειγμα 11:
Διεργασία υπό σταθερή θερμοκρασία σε ανοιχτά συστήματα

όπου R΄ = 0,287 kJ/(kg·K) η σταθερά του αέρα.

Πλέον μπορούμε να υπολογίσουμε το ειδικό έργο της διεργασίας από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{\dot{W}_{12}}{\dot{m}}=p_1\cdot\upsilon_1\cdot\ln\frac{p_1}{p_2}\Rightarrow\frac{\dot{W}_{12}}{\dot{m}}=207\ \text{kPa}\cdot 0{,}5546\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}\cdot\ln 3\Leftrightarrow\frac{\dot{W}_{12}}{\dot{m}}=126{,}1\ \text{kJ/kg}$$

Σας ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Δημήτρης Αλ. Κατσαπρακάκης