



Θερμοδυναμική Ι

Εντροπία

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Δημήτρης Αλ. Κατσαπρακάκης



Η έννοια της εντροπίας

Η έννοια της εντροπίας

- Ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος σχετίζεται με την έννοια της ενέργειας, η οποία είναι καταστατικό μέγεθος. Τούτο συνεπάγεται ότι η τιμή της εξαρτάται από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα και όχι από τον τρόπο που οδηγήθηκε σε αυτή την κατάσταση.
- Ο δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος σχετίζεται με ένα καταστατικό μέγεθος, το οποίο ονομάζεται εντροπία και συμβολίζεται με S . Η εντροπία ορίστηκε από τον Clausius το 1865 μακροσκοπικά.
- Ο Clausius διατύπωσε την ακόλουθη ανισότητα, γνωστή και ως ανισότητα του Clausius:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

που πρακτικά σημαίνει ότι το κυκλικό ολοκλήρωμα της ποσότητας $\delta Q/T$ είναι πάντα μικρότερο ή ίσο του μηδενός.

Η έννοια της εντροπίας

- Κάθε μεταφορά θερμότητας από και προς το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από διαφορικές ποσότητες θερμότητας. Το κυκλικό ολοκλήρωμα είναι το άθροισμα όλων αυτών των διαφορικών ποσοτήτων μεταφοράς θερμότητας, διαιρεμένο με τη θερμοκρασία στα όρια του συστήματος.
- Η εφαρμογή της ανισότητας του Clausius αφορά σε όλους τους κύκλους (αντιστρεπτούς και μη αντιστρεπτούς).
- Η ισότητα ισχύει στην περίπτωση των αντιστρεπτών μεταβολών, ενώ η ανισότητα στις μη αντιστρεπτές:

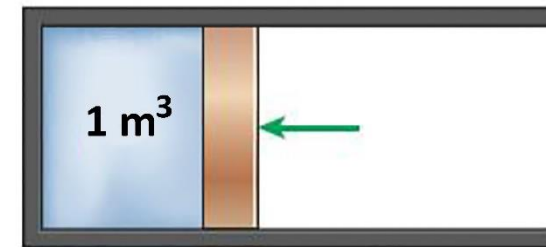
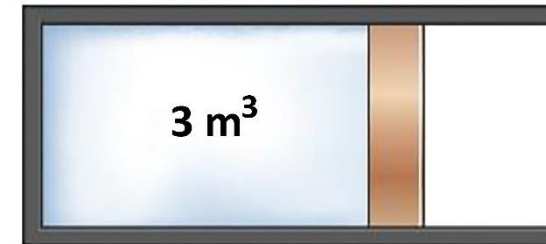
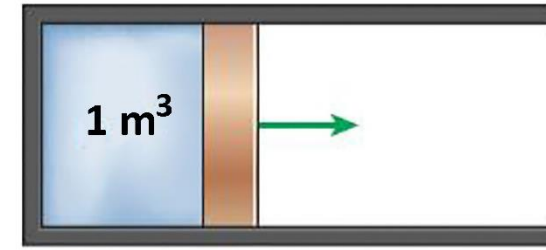
$$\oint \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{αντ}} \leq 0$$

Η έννοια της εντροπίας

- Αν θεωρήσουμε ότι ο όγκος που καταλαμβάνει το αέριο υφίσταται μια κυκλική διεργασία, τότε όταν το έμβολο επανέλθει στην αρχική θέση του και ο όγκος θα επανέλθει στην αρχική τιμή του. Συνεπώς η πραγματική μεταβολή του όγκου θα είναι 0, δηλαδή:

$$\oint dV \leq 0$$

- Δηλαδή το κυκλικό ολοκλήρωμα του όγκου, αλλά και οποιασδήποτε ιδιότητας, είναι 0 και εξαρτάται μόνο από την κατάσταση κι όχι από τη διαδρομή της διεργασίας.
- Συνεπώς η ποσότητα $\delta Q/T$ αντιπροσωπεύει μια ιδιότητα, αφού εξαρτάται μόνο από την κατάσταση κι όχι τη διαδρομή, δεδομένου ότι το κυκλικό ολοκλήρωμά της είναι μηδέν.



Η έννοια της εντροπίας

- Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **εντροπία**, συμβολίζεται με το γράμμα S και ορίζεται ως:

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{αντ}}$$

- Με βάση την ανωτέρω σχέση ορισμού της, η εντροπία μετριέται σε J/K.
- Η εντροπία είναι **εκτατικό** μέγεθος.
- Η ειδική εντροπία s :

$$s = \frac{S}{m}$$

δηλαδή η εντροπία ανά μονάδα μάζας είναι **εντατικό** μέγεθος και έχει μονάδα το J/(kg·K).

Η έννοια της εντροπίας

- Η μεταβολή της εντροπίας σε μια διεργασία ορίζεται με ολοκλήρωση της σχέσης ορισμού της μεταξύ της αρχικής και της τελικής κατάστασης:

$$\delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{αντ}}$$

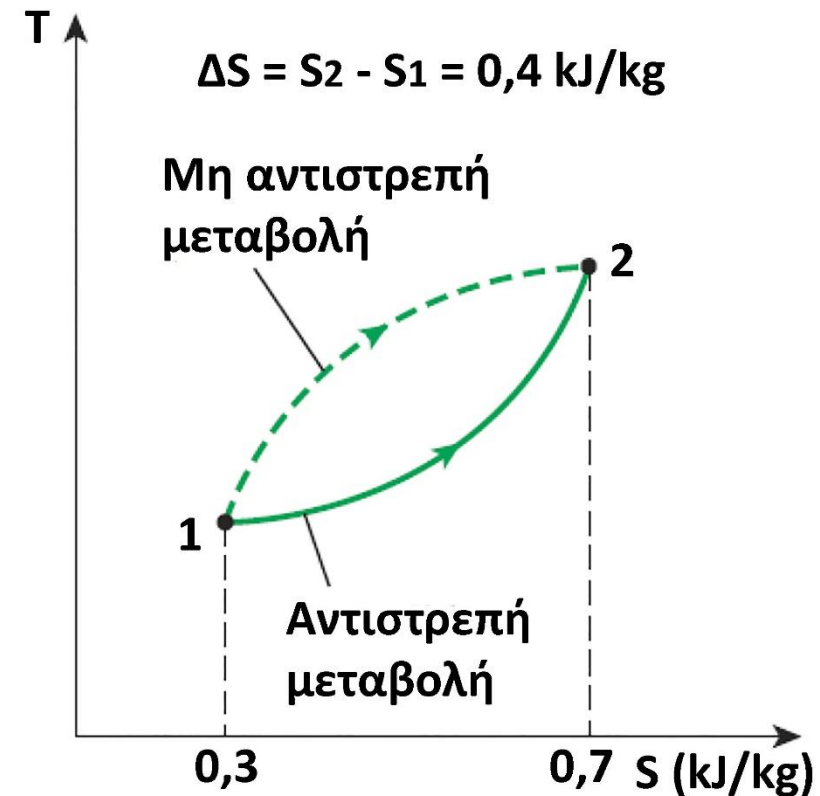
- Για να υπολογιστεί το παραπάνω ολοκλήρωμα πρέπει να είναι γνωστή η σχέση των Q και T κατά τη διεργασία. Όμως η σχέση μεταξύ Q και T δεν είναι συνήθως γνωστή και το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί σε λίγες μόνο περιπτώσεις.
- Για παράδειγμα, σε μια ισοθερμοκρασιακή αντιστρεπτή μεταβολή ιδανικού αερίου έχουμε $\Delta U = 0$, συνεπώς $Q=W$. Με το δεδομένο αυτό, η μεταβολή της εντροπίας γράφεται:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \Leftrightarrow \Delta S = \frac{n \cdot R' \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}}{T} \Leftrightarrow \Delta S = n \cdot R' \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

- Στις περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται δεδομένα εντροπίας υπό μορφή πίνακα.

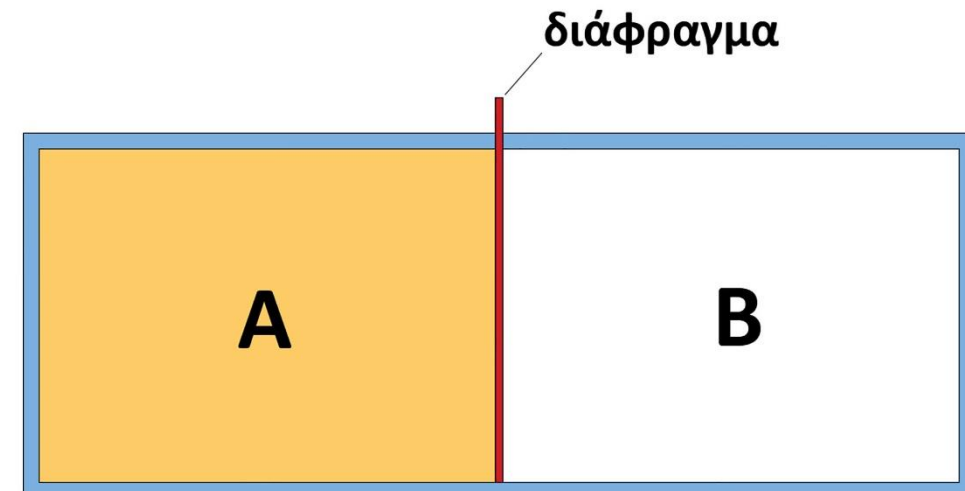
Η έννοια της εντροπίας

- Η εντροπία, ως ιδιότητα έχει συγκεκριμένες τιμές σε καθορισμένες καταστάσεις. Κατά συνέπεια η διαφορά ΔS μεταξύ των δύο καταστάσεων 1 και 2 στο σχήμα είναι η ίδια ανεξάρτητα της διαδρομής ή του κατά πόσο η διεργασία είναι αντιστρεπτή ή μη αντιστρεπτή.



Παράδειγμα 1: ελεύθερη εκτόνωση αερίου

- Θεωρούμε ένα δοχείο με θερμομονωτικά τοιχώματα, το οποίο χωρίζεται με διάφραγμα σε δύο χώρους A και B με όγκους αντίστοιχα V_A , V_B .
- Στο χώρο A έχουμε μια ποσότητα αερίου, ενώ ο χώρος B είναι κενός. Ανασύρουμε το διάφραγμα, οπότε το αέριο διαχέεται ταχύτατα σε όλο το χώρο.
- Η παραπάνω μεταβολή είναι μη αντιστρεπτή και το αέριο δεν παράγει έργο, ούτε ανταλλάσσει θερμότητα με το περιβάλλον.
- Αφού είναι $W = 0$ και $Q = 0$ από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο προκύπτει ότι και $\Delta U = 0$.
- Επειδή δεν μεταβάλλεται η εσωτερική ενέργεια του αερίου, δεν μεταβάλλεται και η θερμοκρασία του. Συνεπώς η μεταβολή της εντροπίας του κατά την ελεύθερη εκτόνωση θα είναι ίδια με τη μεταβολή της εντροπίας για μια ισοθερμοκρασιακή εκτόνωση του αερίου, από την ίδια αρχική στην ίδια τελική κατάσταση: $\Delta S = n \cdot R' \cdot \ln \frac{V_A + V_B}{V_A}$



Παράδειγμα 2: μεταβολή εντροπίας κατά ισοβαρή διεργασία

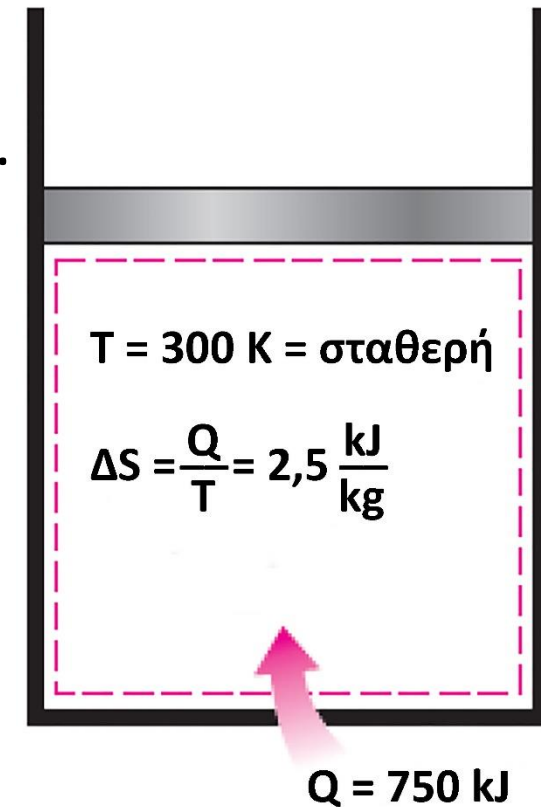
Ένα σύστημα κυλίνδρου – εμβόλου περιέχει μίγμα υδρατμών – νερού (αέριας – υγρής φάσης) σε θερμοκρασία 300 K. Κατά την εκτέλεση μια ισοβαρούς διεργασίας προσδίδονται 750 kJ θερμότητας προς το μίγμα, οδηγώντας σε μερική επιπλέον ατμοποίηση της υγρής φάσης του μίγματος. Υπολογίστε τη μεταβολή της εντροπίας του νερού κατά τη διεργασία.

Λύση:

Θεωρούμε το μίγμα υδρατμών – νερού στον κύλινδρο ως κλειστό σύστημα, καθώς δεν υπάρχει συναλλαγή μάζας διαμέσου των ορίων του. Καθώς η προσφερόμενη θερμότητα οδηγεί μόνο σε αλλαγή φάσης, δηλαδή πρόκειται για λανθάνουσα και όχι για αισθητή θερμότητα, η θερμοκρασία του θα παραμένει σταθερή στους 300 K.

Συνεπώς, το σύστημα υπόκειται σε μία αντιστρεπτή, ισοθερμοκρασιακή μεταβολή, άρα η μεταβολή της εντροπίας του μπορεί να υπολογιστεί απευθείας από τη σχέση:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \Leftrightarrow \Delta S = \frac{750 \text{ kJ}}{300 \text{ K}} \Leftrightarrow \Delta S = 2,5 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

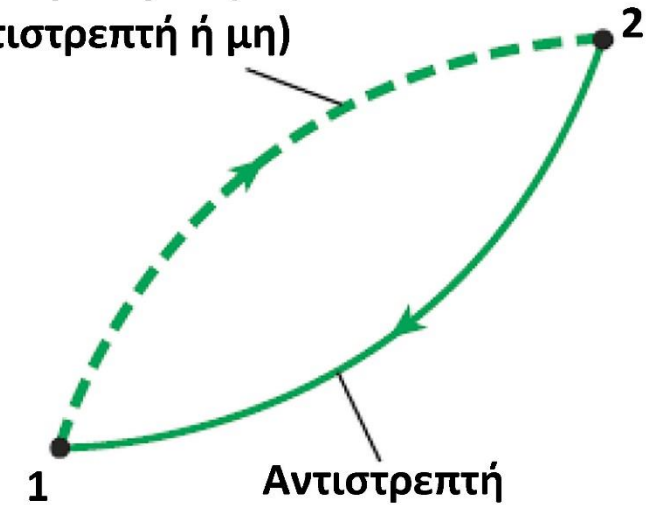


Η αρχή της αύξησης της εντροπίας

- Θεωρούμε μια κυκλική διεργασία η οποία αποτελείται από δύο μεταβολές: τη μεταβολή 1-2 που είναι αυθαίρετη (αντιστρεπτή ή μη αντιστρεπτή) και τη μεταβολή 2-1 που είναι αντιστρεπτή. Από την ανισότητα του Clausius έχουμε:

$$\oint \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{αντ}} \leq 0 \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{αντ}} \leq 0$$

Τυχαία μεταβολή 1-2
(αντιστρεπτή ή μη)



- Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι η μεταβολή της εντροπίας S_1-S_2 κατά την αντιστρεπτή μεταβολή 2-1. Επομένως, η ανωτέρω ανισότητα γράφεται:

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{αντ}} \leq 0 \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + S_1 - S_2 \leq 0 \Leftrightarrow S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \Leftrightarrow \Delta S \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

- Η ισότητα στην τελευταία σχέση ισχύει για εσωτερικά αντιστρεπτές διεργασίες ενώ η ανισότητα για μη αντιστρεπτές.

Η αρχή της αύξησης της εντροπίας

- Συνεπώς η μεταβολή της εντροπίας ενός κλειστού συστήματος μιας **μη αντιστρεπτής** διεργασίας είναι μεγαλύτερη του ολοκληρώματος:

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

- Καθίσταται ίση μόνο στην περίπτωση της αντιστρεπτής διεργασίας.
- Σημειώνεται ότι η θερμοκρασία T είναι αυτή που επικρατεί στα όρια του συστήματος όπου ποσότητα θερμότητας δQ μεταφέρεται μεταξύ του συστήματος και του περιβάλλοντος.

Η αρχή της αύξησης της εντροπίας

- Η ανισότητα στην προηγούμενη εξίσωση υπενθυμίζει ότι η μεταβολή της εντροπίας σε μια μη αντιστρεπτή διεργασία είναι πάντα μεγαλύτερη από την εντροπία που μεταφέρεται (λόγω μεταφοράς θερμότητας).
- **Συνεπώς σε μη αντιστρεπτές διεργασίες κάποια εντροπία δημιουργείται.** Η εντροπία αυτή συμβολίζεται με S_{gen} και τελικά ισχύει:

$$\Delta S = S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + S_{gen}$$

- Η S_{gen} είναι πάντα μια θετική ποσότητα.
- Για ένα μονωμένο σύστημα (ή απλώς αδιαβατικό κλειστό σύστημα) η μεταφορά θερμότητας είναι μηδέν και η προηγούμενη ανισότητα γίνεται:

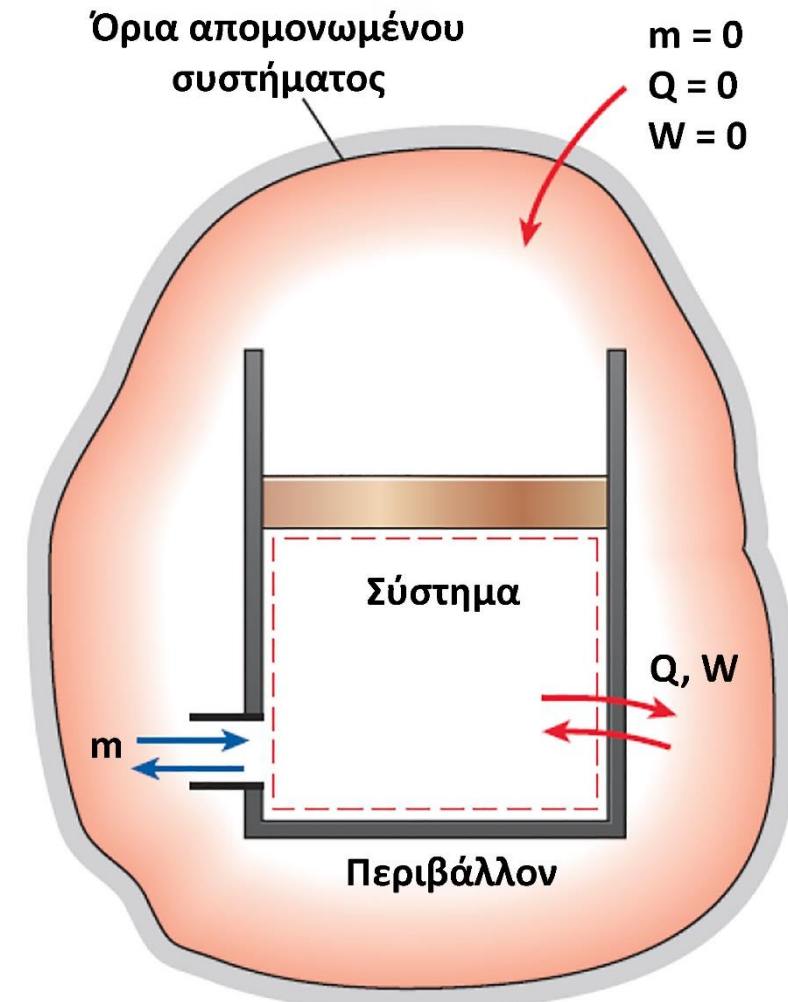
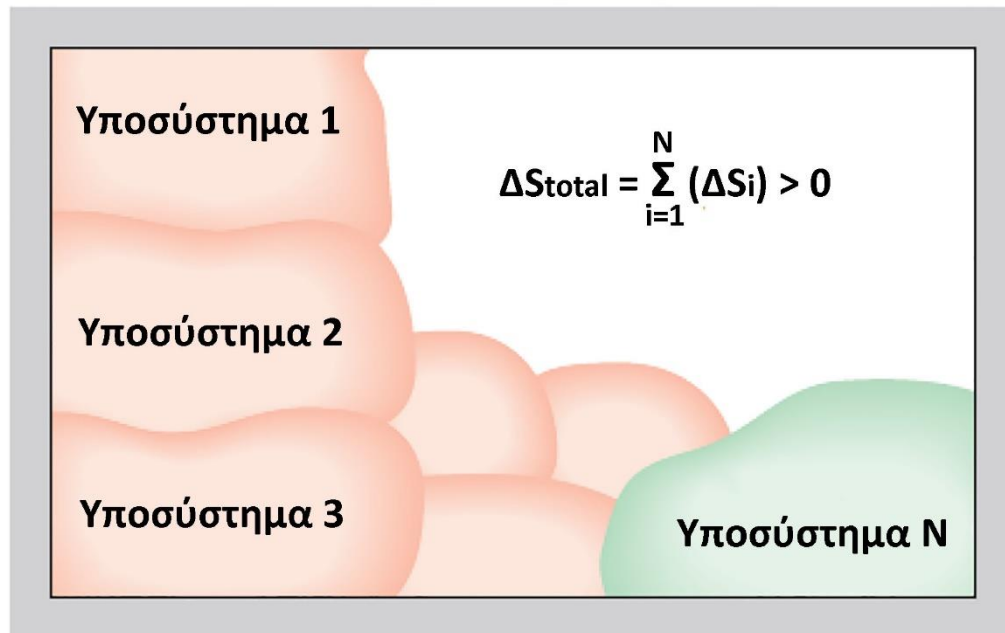
$$\Delta S_{isolated} \geq 0$$

- Η εξίσωση αυτή εκφράζει ότι η εντροπία ενός μονωμένου συστήματος πάντα αυξάνεται ή στην περίπτωση της αντιστρεπτής διεργασίας παραμένει σταθερή. Ποτέ όμως δεν μειώνεται. **Πρόκειται για την αρχή αύξησης της εντροπίας.**

Η αρχή της αύξησης της εντροπίας

- Η εντροπία είναι μια εκτατική ιδιότητα και συνεπώς η ολική εντροπία ενός απομονωμένου συστήματος είναι το άθροισμα των επί μέρους υποσυστημάτων.
- Ένα σύστημα και το περιβάλλον του μπορεί να είναι ένα μονωμένο σύστημα αφού και τα δύο μπορούν να περικλείονται σε ένα πολύ μεγαλύτερο όριο στο οποίο δεν υπάρχει πρακτικά μεταφορά θερμότητας, έργου ή μάζας.

Σύστημα απομονωμένο

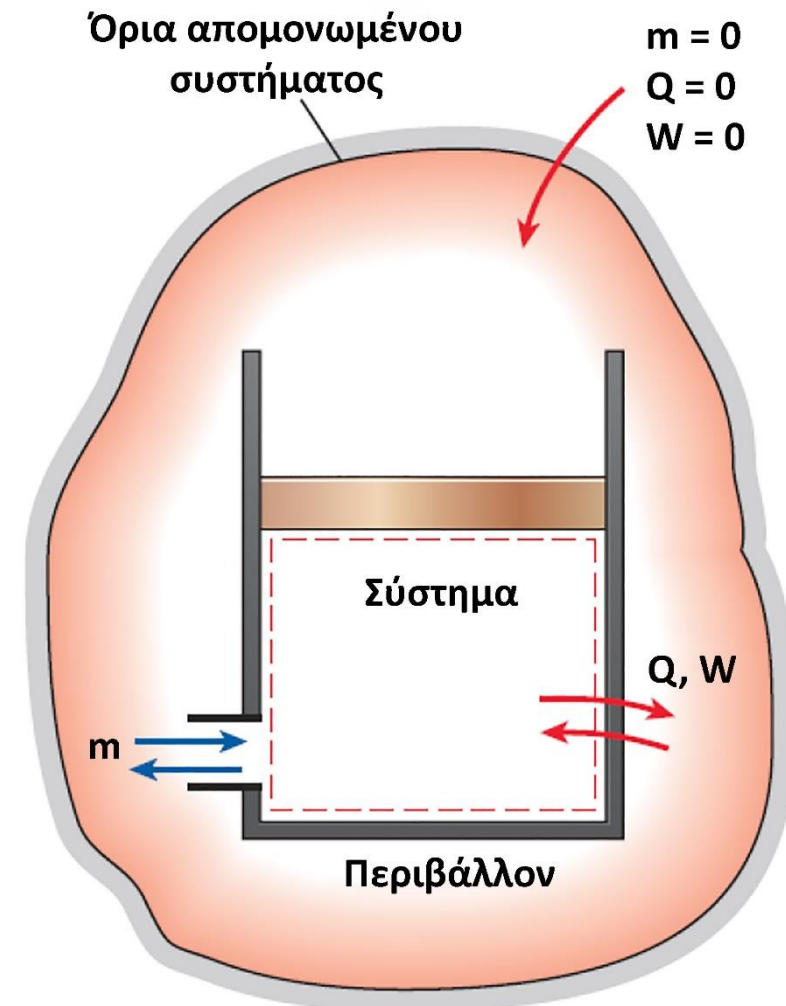


Η αρχή της αύξησης της εντροπίας

- Συνεπώς, ένα σύστημα και το περιβάλλον του μπορεί να θεωρηθούν ως δύο υποσυστήματα ενός μονωμένου συστήματος του οποίου η εντροπία που δημιουργείται είναι το άθροισμα των εντροπιών των υποσυστημάτων του:

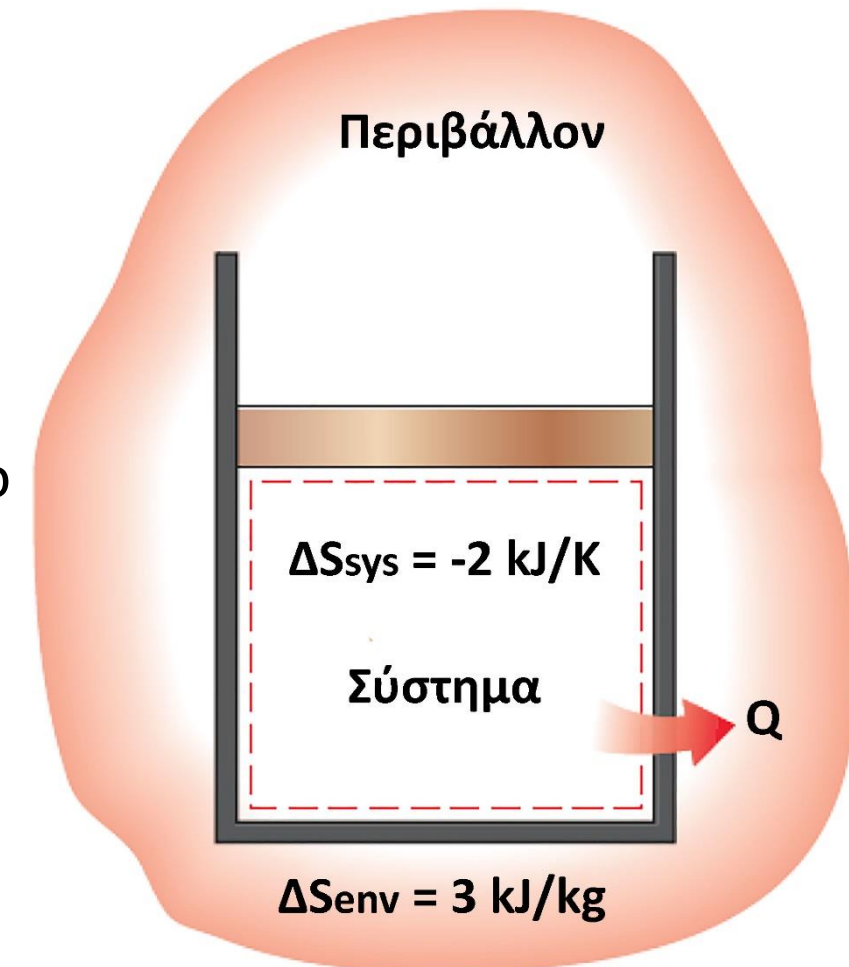
$$S_{\text{gen}} = \Delta S_{\text{total}} = \Delta S_{\text{sys}} + \Delta S_{\text{env}}$$

- Επειδή όλες οι πραγματικές διεργασίες είναι μη αντιστρεπτές συμπεραίνουμε ότι πάντα δημιουργείται κάποια ποσότητα εντροπίας σε μια διεργασία.
- Κατά συνέπεια η εντροπία του σύμπαντος αυξάνεται, αφού τούτο μπορεί να θεωρηθεί ένα μονωμένο σύστημα.



Η αρχή της αύξησης της εντροπίας

- Η αρχή αύξησης της εντροπίας δε συνεπάγεται ότι η εντροπία ενός συστήματος δεν μπορεί να μειωθεί. Η μεταβολή της εντροπίας ενός συστήματος μπορεί να είναι αρνητική, η εντροπία όμως που δημιουργείται (S_{gen}) είναι πάντα θετική.
- Η αρχή αύξησης της εντροπίας συνοψίζεται παρακάτω:
 - > 0 : μη αντιστρεπτή διεργασία
 - $S_{gen} = 0$: αντιστρεπτή διεργασία
 - < 0 : αδύνατη διεργασία
- Η παραπάνω σχέση χρησιμεύει ως κριτήριο για τον καθορισμό του κατά πόσο μια διεργασία είναι μη αντιστρεπτή, αντιστρεπτή ή αδύνατη.





Η αρχή της αύξησης της εντροπίας

Συμπερασματικά μπορούμε να αναφέρουμε τα εξής:

- Οι διεργασίες λαμβάνουν χώρα σε μια συγκεκριμένη κατεύθυνση κι όχι σε οποιαδήποτε κατεύθυνση. Η κατεύθυνση αυτή είναι εκείνη που οδηγεί σε αύξηση της εντροπίας του συστήματος $S_{gen} \geq 0$. Μια διεργασία που παραβιάζει την αρχή αυτή είναι αδύνατη.
- Η εντροπία είναι μια μη διατηρήσιμη ιδιότητα και δεν υπάρχει η έννοια της διατήρησής της. Η εντροπία διατηρείται μόνο κατά τις αντιστρεπτές διεργασίες (ιδεατές) κι όχι κατά τις πραγματικές.
- Η απόδοση των συστημάτων μειώνεται εξαιτίας της παρουσίας μη αντιστρεπτών διεργασιών και η εντροπία αποτελεί ένα μέτρο της παρουσίας των μη αντιστρεπτών διεργασιών στα συστήματα. Όσο εντονότερα είναι τα μη αντιστρεπτά φαινόμενα, τόσο μεγαλύτερη και η δημιουργία εντροπίας.

Εντροπία και αταξία

- Η εντροπία αποτελεί μέτρο της αταξίας ενός συστήματος. Από τη σχέση:

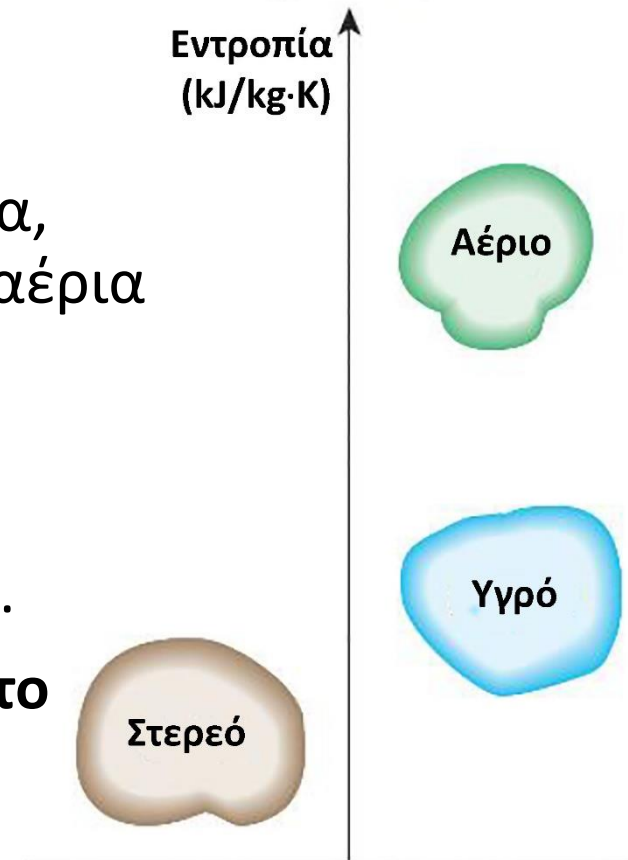
$$\Delta S = \frac{Q}{T} \Leftrightarrow \Delta S = \frac{n \cdot R' \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}}{T} \Leftrightarrow \Delta S = n \cdot R' \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

διαπιστώνουμε ότι σε μια ισοθερμοκρασιακή εκτόνωση αερίου η εντροπία του αυξάνεται, ενώ σε μια ισοθερμοκρασιακή συμπίεση η εντροπία του μειώνεται.

- Το αέριο μετά την εκτόνωσή του βρίσκεται σε κατάσταση **αυξημένης** αταξίας, γιατί τα μόρια κινούνται σε μεγαλύτερο όγκο, έχουν δηλαδή μεγαλύτερη τυχαιότητα ως προς τη θέση. Με την ίδια λογική το αέριο, όταν συμπιεστεί, μειώνει την αταξία του. Συνεπώς, η αύξηση ή η μείωση της εντροπίας συνοδεύεται από την αύξηση ή τη μείωση αντίστοιχα της **αταξίας**.
- Μια φυσική διεργασία οδηγεί συνολικά σε αύξηση της εντροπίας των συστημάτων που παίρνουν μέρος σε αυτή. Μπορούμε πλέον να πούμε ότι κάθε **πραγματική** φυσική διεργασία οδηγεί σε αύξηση της αταξίας.

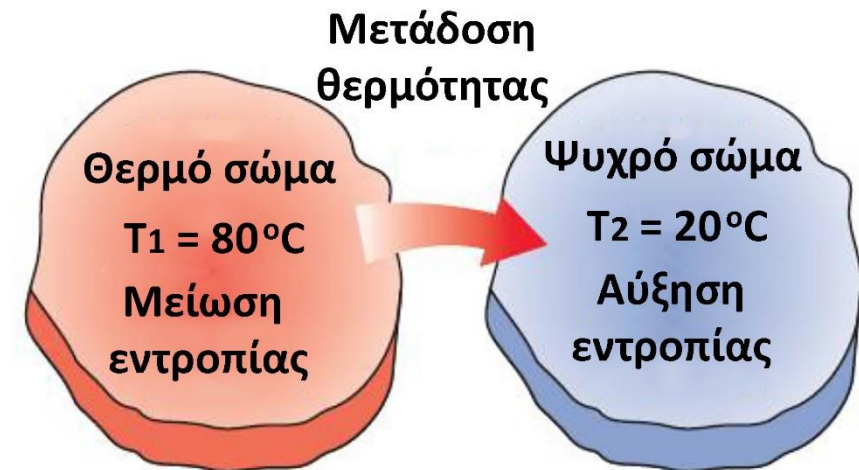
Εντροπία και αταξία

- Όσο η αταξία των μορίων αυξάνεται, τόσο η θέση τους προσδιορίζεται δυσχερέστερα και η εντροπία τους αυξάνεται.
- Έτσι η εντροπία μιας ουσίας είναι μικρότερη στη στερεή κατάσταση απ' ότι στην υγρή ή στην αέρια.
- Στη στερεή κατάσταση τα μόρια ταλαντώνονται γύρω από τη θέση ισορροπίας αλλά δεν κινούνται το ένα σε σχέση με το άλλο και, συνεπώς, η θέση τους μπορεί να προσδιοριστεί με αρκετή ακρίβεια, γεγονός που δε συμβαίνει στην υγρή ή, ακόμα περισσότερο, στην αέρια κατάσταση, όπου η κίνηση γίνεται πλέον σχεδόν τυχαία και η εντροπία τότε λαμβάνει υψηλές τιμές.
- Στη στερεή κατάσταση η ταλάντωση των μορίων εξασθενεί, όσο η θερμοκρασία ελαττώνεται και τελικά μηδενίζεται στο απόλυτο μηδέν.
- Συνεπώς η εντροπία μιας καθαρής κρυσταλλικής ουσίας στο απόλυτο μηδέν είναι μηδέν, αφού δεν υπάρχει αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της θέσης του μορίου.



Εντροπία και αταξία

- Όταν αυξάνεται η αταξία ενός συστήματος, μειώνεται η ικανότητα του για παραγωγή έργου.
- Ας πάρουμε το παράδειγμα της επαφής δύο σωμάτων διαφορετικής θερμοκρασίας. Γνωρίζουμε ότι θα μεταφερθεί θερμότητα από το θερμό σώμα στο ψυχρό, έως ότου εξισωθούν οι θερμοκρασίες των δύο σωμάτων. Αρχικά το σύστημα έχει μικρότερη αταξία, γιατί είναι **διαχωρισμένα** τα μόρια σε μια θερμή και μια ψυχρή περιοχή. Δηλαδή σε μια περιοχή με μεγάλη μέση κινητική ενέργεια και σε μια περιοχή με μικρή μέση κινητική ενέργεια. Μετά τη θερμική ισορροπία, αυτή η ταξινόμηση χάνεται ανεπιστρεπτί, δηλαδή αυξάνει η αταξία του συστήματος των σωμάτων.
- Πριν την επαφή, τα δύο σώματα μπορούσαν να αποτελέσουν τη θερμή και την ψυχρή δεξαμενή μιας θερμικής μηχανής και έτσι να έχουμε παραγωγή έργου. Από τη στιγμή της θερμικής ισορροπίας, χάθηκε για πάντα αυτή η ευκαιρία μετατροπής της θερμότητας σε έργο.



Εντροπία και αταξία

- Κατά την ανωτέρω διεργασία, αν T_1 και T_2 είναι οι θερμοκρασίες του θερμού και του ψυχρού σώματος αντίστοιχα και Q η μεταφερόμενη θερμότητα από το θερμό στο ψυχρό σώμα, τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$T_1 > T_2 \Leftrightarrow \frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_2} \Leftrightarrow \frac{Q}{T_1} < \frac{Q}{T_2} \Leftrightarrow s_1 < s_2 \Leftrightarrow s_2 - s_1 > 0 \Leftrightarrow \Delta s > 0$$

- Με την παραπάνω ανάλυση εκφράζεται μαθηματικά η αύξηση της εντροπίας κατά τη διαδικασία μεταφοράς θερμότητας από το θερμό προς το ψυχρό σώμα.
- Από όλα τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, παρόλο που διατηρείται η ενέργεια του σύμπαντος, η εντροπία και η αταξία αυξάνονται με την πάροδο του χρόνου και υποβαθμίζεται η ενέργειά του.



Εντροπία καθαρής ουσίας



Μεταβολή της εντροπίας καθαρής ουσίας

- Η εντροπία είναι μια ιδιότητα και συνεπώς η τιμή της καθορίζεται όταν καθοριστεί η θερμοδυναμική κατάσταση στην οποία βρίσκεται το θερμοδυναμικό σύστημα.
- Ο καθορισμός δύο ανεξάρτητων **εντατικών** ιδιοτήτων καθορίζει την κατάσταση ενός απλού συμπιεστού συστήματος και, συνεπώς, όλες τις υπόλοιπες ιδιότητες (συμπεριλαμβανομένης της εντροπίας) στη συγκεκριμένη κατάσταση.
- Η εντροπία, όπως και άλλες ιδιότητες (π.χ. ενθαλπία, όγκος, εσωτερική ενέργεια κλπ) παρέχονται από σχετικούς πίνακες.
- Οι τιμές της εντροπίας δίνονται σε σχέση με μια αυθαίρετη τιμή αναφοράς.

Μεταβολή της εντροπίας καθαρής ουσίας

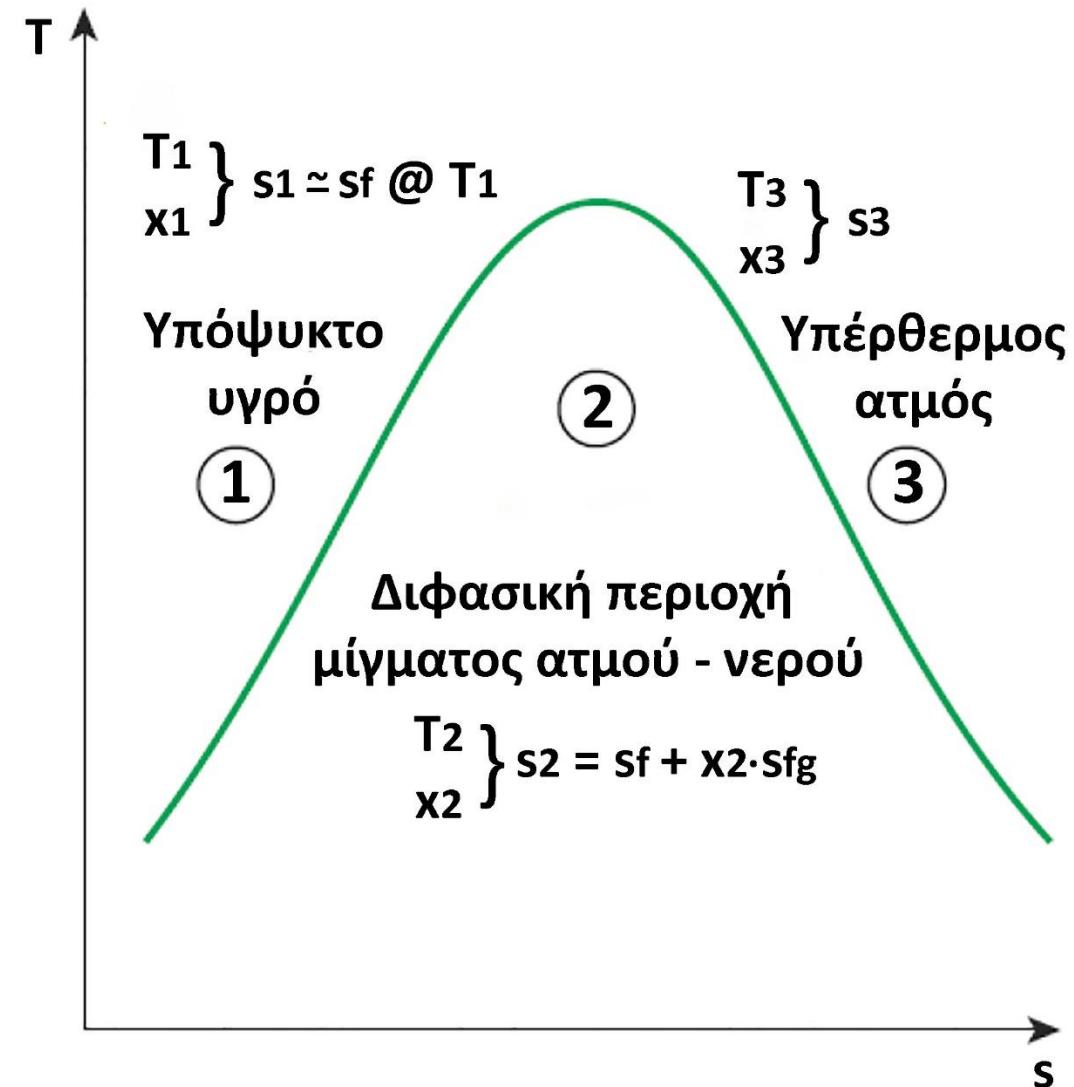
- Στους πίνακες υδρατμού η ειδική εντροπία κορεσμένου υγρού s_f στους $0,01\text{ }^\circ\text{C}$ έχει την τιμή 0.
- Οι τιμές της γίνονται αρνητικές σε χαμηλότερες θερμοκρασίες από αυτήν της αναφοράς.
- Η εντροπία στην υπόψυκτη και την υπέρθερμη περιοχή μπορεί να ληφθεί απευθείας από τους πίνακες ιδιοτήτων.
- Στη διφασική περιοχή η τιμή της ορίζεται από τη σχέση:

$$s = s_f + x \cdot s_{fg}$$

ή την ισοδύναμη σχέση:

$$s = (1-x) \cdot s_f + x \cdot s_g$$

όπου x είναι η ξηρότητα του μίγματος και s_f , s_{fg} οι ειδικές ενθαλπίες κορεσμένου υγρού και ατμού αντίστοιχα, οι οποίες παρέχονται από πίνακες.



Ξηρότητα (x)

- Κατά τη διεργασία της ατμοποίησης, η ουσία είναι εν μέρει σε κατάσταση υγρού κι εν μέρει σε κατάσταση ατμού. Δηλαδή πρόκειται για μίγμα κορεσμένου υγρού και κορεσμένου ατμού.
- Για να αναλυθεί το μίγμα αυτό χρειάζεται να γνωρίζουμε την αναλογία μεταξύ της υγρής και της αέριας φάσης στο μίγμα. Αυτό καθίσταται εφικτό εισάγοντας μια νέα ιδιότητα που καλείται ξηρότητα (x) και είναι ο λόγος της μάζας του ατμού προς την ολική μάζα του μίγματος:

$$x = \frac{m_{\text{vapor}}}{m_{\text{total}}}$$

όπου:

$$m_{\text{total}} = m_{\text{liquid}} + m_{\text{vapor}} = m_f + m_g$$

Ξηρότητα (x)

- Η τιμή κάθε εκτατικής ιδιότητας (π.χ. εσωτερική ενέργεια, όγκος, ενθαλπία κλπ) εντός της καμπύλης κορεσμού εκφράζεται ως:

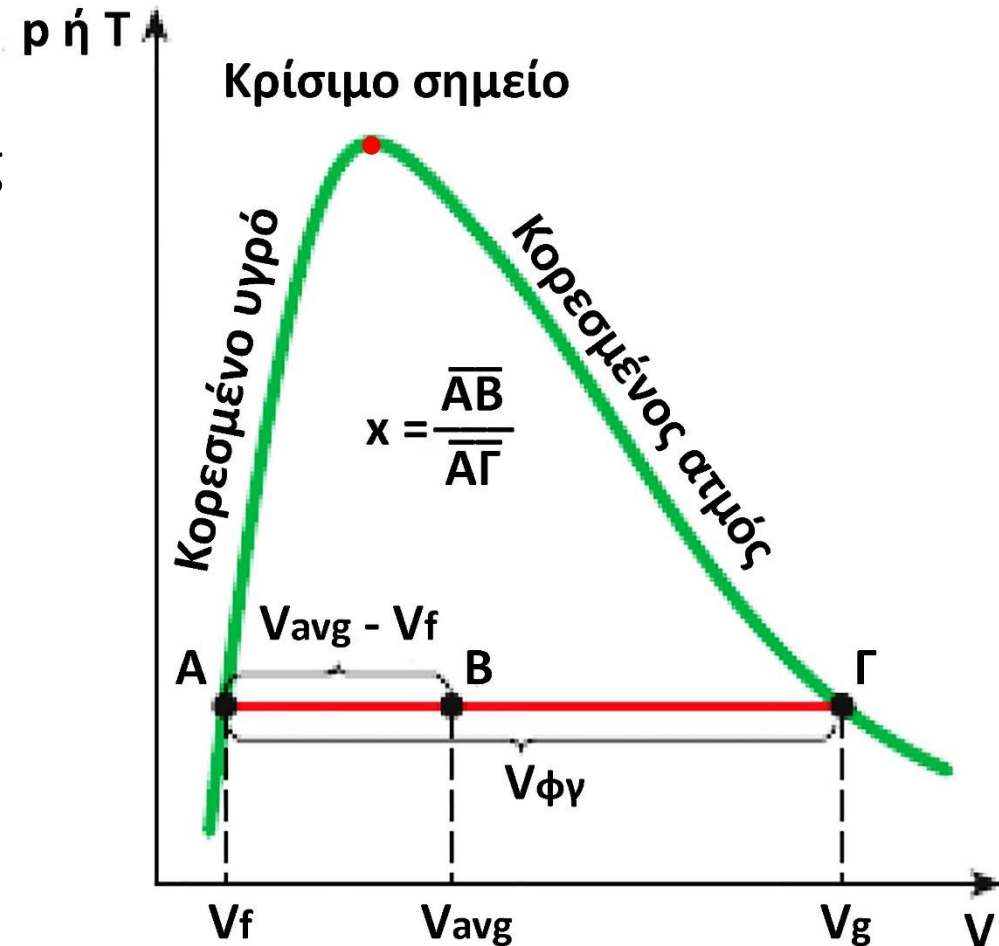
$$y_{avg} = y_f + x \cdot y_{fg}$$

ή την ισοδύναμη σχέση:

$$y_{avg} = (1-x) \cdot y_f + x \cdot y_g$$

- Προφανώς, στη διφασική περιοχή ισχύει:

$$y_f \leq y_{avg} \leq y_g$$



Παράδειγμα 3: Ξηρότητα

Μία άκαμπτη δεξαμενή περιέχει 10 kg νερού στους 90 °C. Αν τα 8 kg του νερού είναι σε υγρή φάση και τα υπόλοιπα 2 kg σε αέρια φάση, υπολογίστε:

α. την πίεση στη δεξαμενή, β. τον όγκο της δεξαμενής.

Λύση:

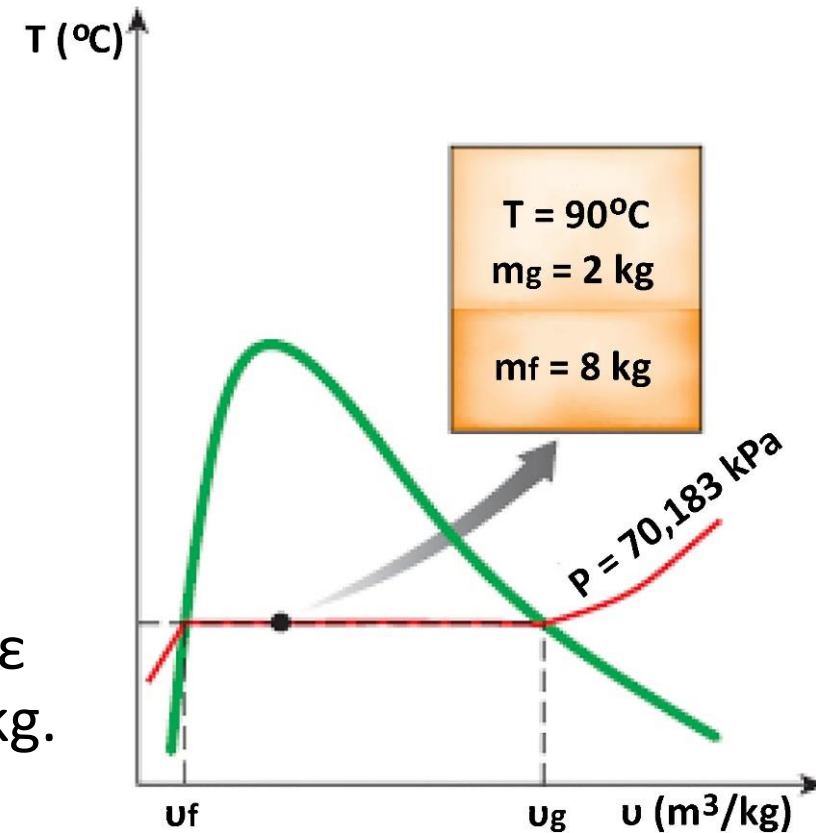
α. Όταν συνυπάρχουν η υγρή και η αέρια φάση νερού σε ένα μίγμα, τότε και οι δύο βρίσκονται σε κατάσταση κορεσμού.

Συνεπώς, από τους πίνακες κορεσμένων υδρατμών για τη θερμοκρασία των 90 °C βρίσκουμε την πίεση του μίγματος ίση με 70,183 kPa.

β. Για την ίδια θερμοκρασία και από τον ίδιο πίνακα βρίσκουμε τους ειδικούς όγκους $u_f = 0,001036 \text{ m}^3/\text{kg}$ και $u_g = 2,3593 \text{ m}^3/\text{kg}$.

Ο συνολικός όγκος του μίγματος θα ισούται με:

$$V = V_f + V_g \Leftrightarrow V = u_f \cdot m_f + u_g \cdot m_g \Rightarrow V = 0,001036 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot 8 \text{ kg} + 2,3593 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot 2 \text{ kg} \Leftrightarrow V = 4,73 \text{ m}^3$$



Παράδειγμα 3: Ξηρότητα

Ο όγκος του μίγματος μπορεί επίσης να υπολογιστεί υπολογίζοντας πρώτα την ξηρότητα του μίγματος:

$$x = \frac{m_g}{m_t} \Rightarrow x = \frac{2 \text{ kg}}{8 \text{ kg}} \Leftrightarrow x = 0,2$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το συνολικό μέσο ειδικό όγκο του μίγματος από τη σχέση:

$$\begin{aligned} v_{avg} &= v_f + x \cdot v_{fg} \Leftrightarrow v_{avg} = v_f + x \cdot (v_g - v_f) \Rightarrow \\ v_{avg} &= 0,001036 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} + 0,2 \cdot (2,3593 - 0,001036) \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \Leftrightarrow v_{avg} = 0,473 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \end{aligned}$$

Τέλος, ο όγκος του μίγματος υπολογίζεται απλά από τη σχέση:

$$V = v_{avg} \cdot m_t \Rightarrow V = 0,473 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot 10 \text{ kg} \Leftrightarrow V = 4,73 \text{ m}^3$$

Παράδειγμα 4: Ξηρότητα

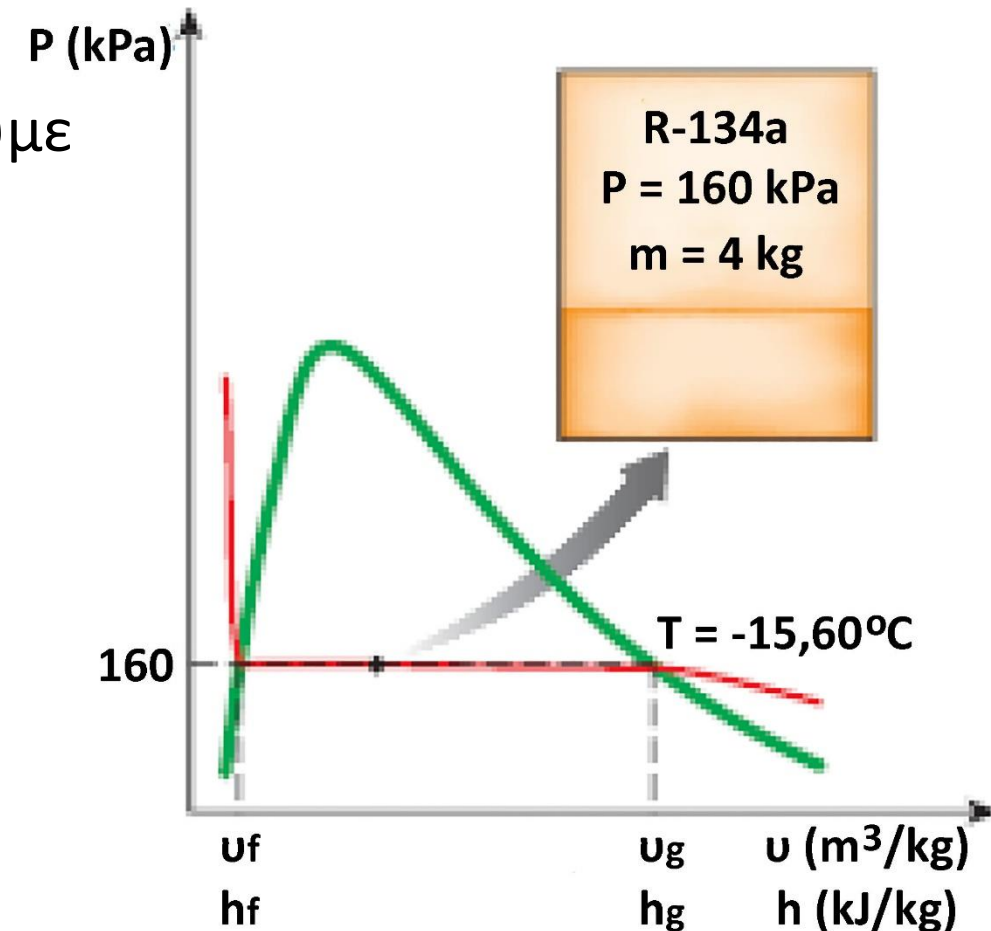
Ένα δοχείο χωρητικότητας 80 L περιέχει 4 kg ψυκτικού μέσου R-134a σε πίεση 160 kPa. Υπολογίστε: α. τη θερμοκρασία, β. την ποιότητα, γ. την ενθαλπία του ψυκτικού μέσου και δ. τον όγκο που καταλαμβάνει η αέρια φάση.

Λύση:

α. Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν βρισκόμαστε εντός ή εκτός της διφασικής περιοχής.

Για να το μάθουμε αυτό, υπολογίζουμε τον ειδικό όγκο του ψυκτικού μέσου:

$$v = \frac{V}{m} \Rightarrow v = \frac{0,080 \text{ m}^3}{4 \text{ kg}} \Leftrightarrow v = 0,020 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$



Παράδειγμα 4: Ξηρότητα

Από τους πίνακες κορεσμένου ατμού του ψυκτικού μέσου R-134a βρίσκουμε για πίεση 160 kPa ότι:

$$u_f = 0,0007 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} < 0,020 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} < u_g = 0,1234 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

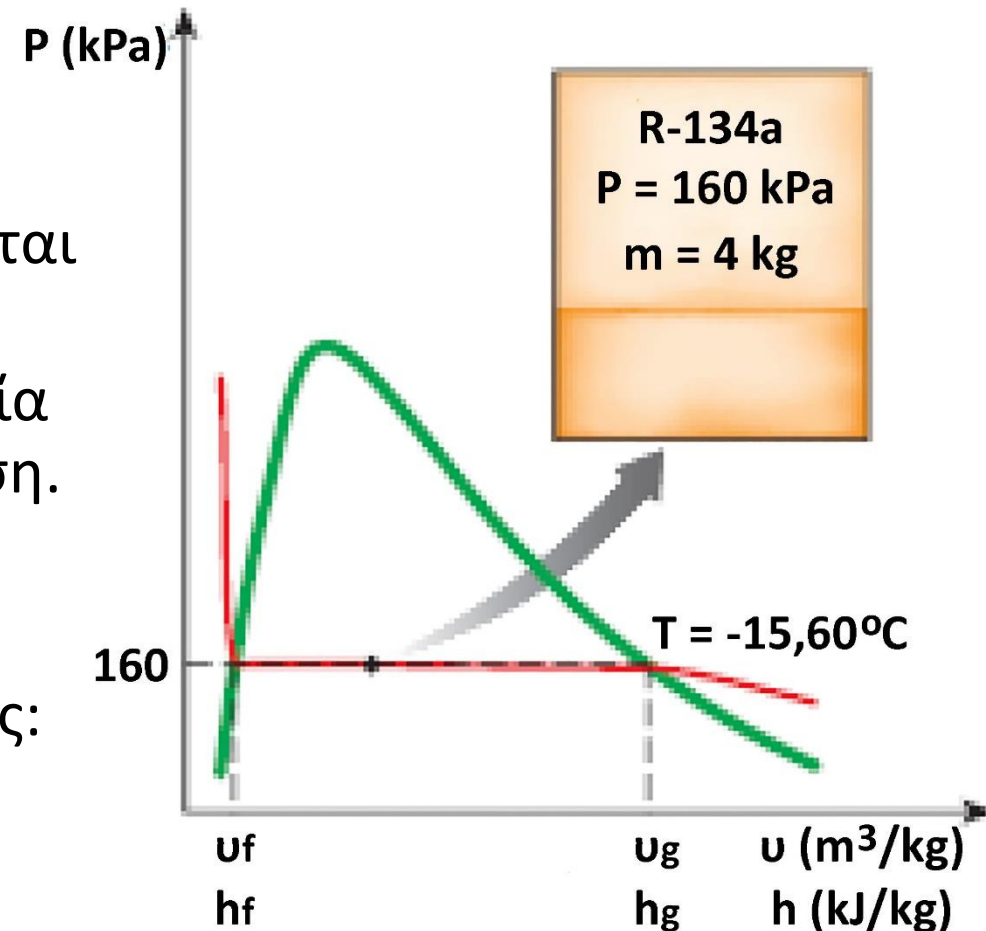
που σημαίνει ότι το ψυκτικό μέσο βρίσκεται εντός της διφασικής περιοχής, άρα και οι δύο φάσεις του βρίσκονται σε κατάσταση κορεσμού.

Άρα η θερμοκρασία του μίγματος θα είναι η θερμοκρασία του για την κατάσταση κορεσμού στη συγκεκριμένη πίεση.

Από τους ίδιους πίνακες βρίσκουμε ότι: $T_{\text{sat}} = -15,58 \text{ }^\circ\text{C}$.

β. Η ποιότητα του μίγματος μπορεί να εκφραστεί με βάση την ξηρότητά του, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως:

$$x = \frac{u - u_f}{u_g - u_f} \Rightarrow x = \frac{0,02 - 0,0007}{0,1234 - 0,0007} \Leftrightarrow x = 0,157$$



Παράδειγμα 4: Ξηρότητα

γ. Επίσης, από τους πίνακες κορεσμένου ατμού του ψυκτικού μέσου R-134a βρίσκουμε για πίεση 160 kPa: $h_f = 179,4$ kJ/kg και $h_g = 389,5$ kJ/kg.

Η ειδική ενθαλπία του μίγματος υπολογίζεται απλά από τη σχέση:

$$h_{avg} = h_f + x \cdot h_{fg} \Leftrightarrow h_{avg} = h_f + x \cdot (h_g - h_f) \Rightarrow$$

$$h_{avg} = 179,4 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} + 0,157 \cdot (389,5 - 179,4) \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \Leftrightarrow h_{avg} = 212,4 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

δ. Η μάζα του ατμού προκύπτει από τη σχέση:

$$m_g = x \cdot m_t \Rightarrow m_g = 0,157 \cdot 4 \text{ kg} \Leftrightarrow m_g = 0,628 \text{ kg}$$

Ο όγκος που καταλαμβάνει η αέρια φάση του μίγματος του ψυκτικού μέσου προκύπτει από τη σχέση ορισμού του ειδικού όγκου:

$$V_g = v_g \cdot m_g \Rightarrow V_g = 0,1234 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot 0,628 \text{ kg} \Leftrightarrow V_g = 0,077 \text{ m}^3 = 77 \text{ L}$$

Μεταβολή της εντροπίας καθαρής ουσίας

- Στην περίπτωση που δεν είναι διαθέσιμες τιμές στην υπόψυκτη περιοχή, τότε μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά η τιμή της ειδικής εντροπίας κορεσμένου υγρού:

$$s_{@ T,P} = s_{@ T} \text{ σε } \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$$

- Η μεταβολή της εντροπίας για συγκεκριμένη μάζα m του μέσου ισούται απλά με:

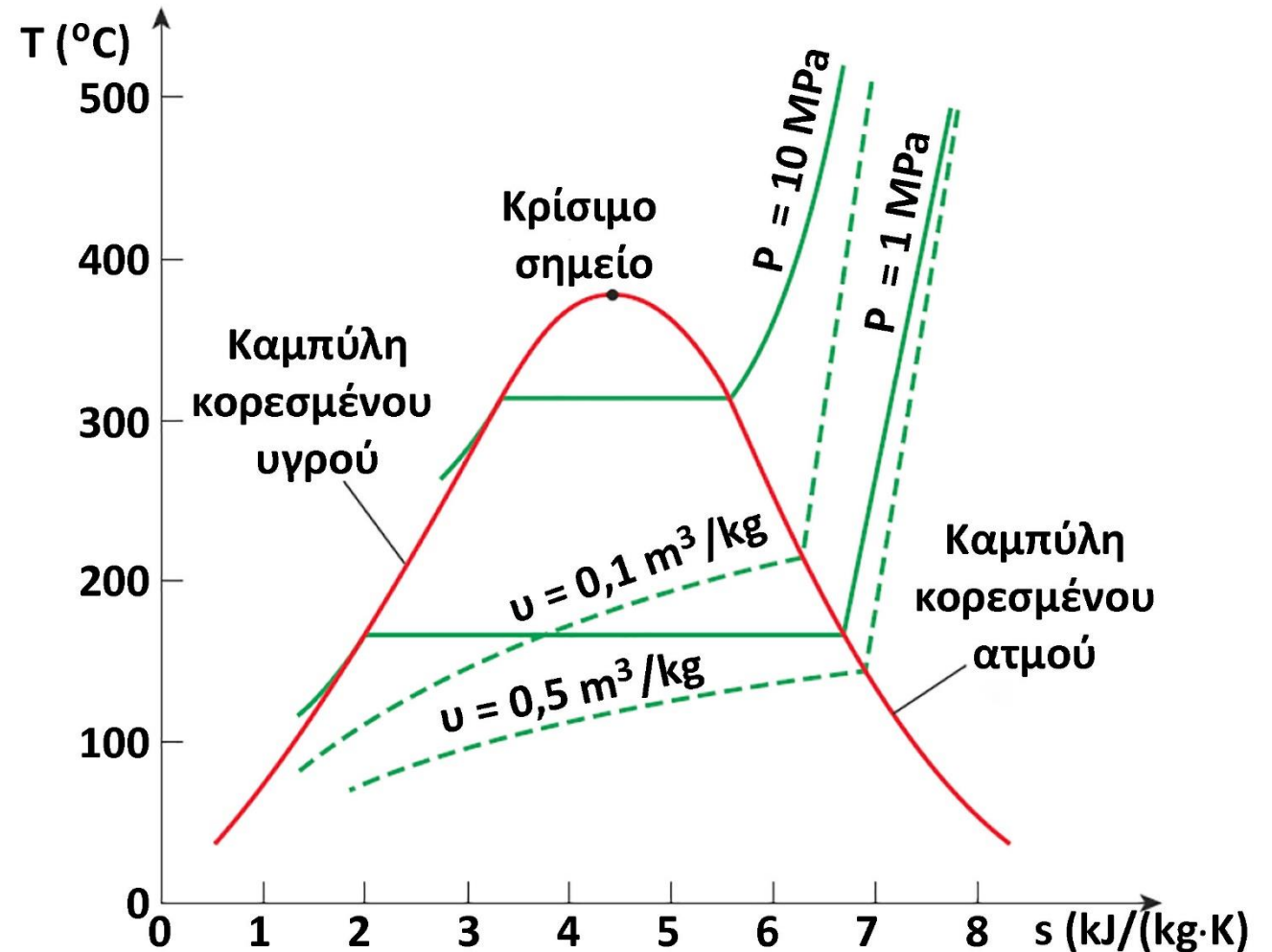
$$\Delta S = m \cdot \Delta s = m \cdot (s_2 - s_1) \text{ σε } \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

που είναι απλά η διαφορά των εντροπιών μεταξύ τελικής και αρχικής κατάστασης.

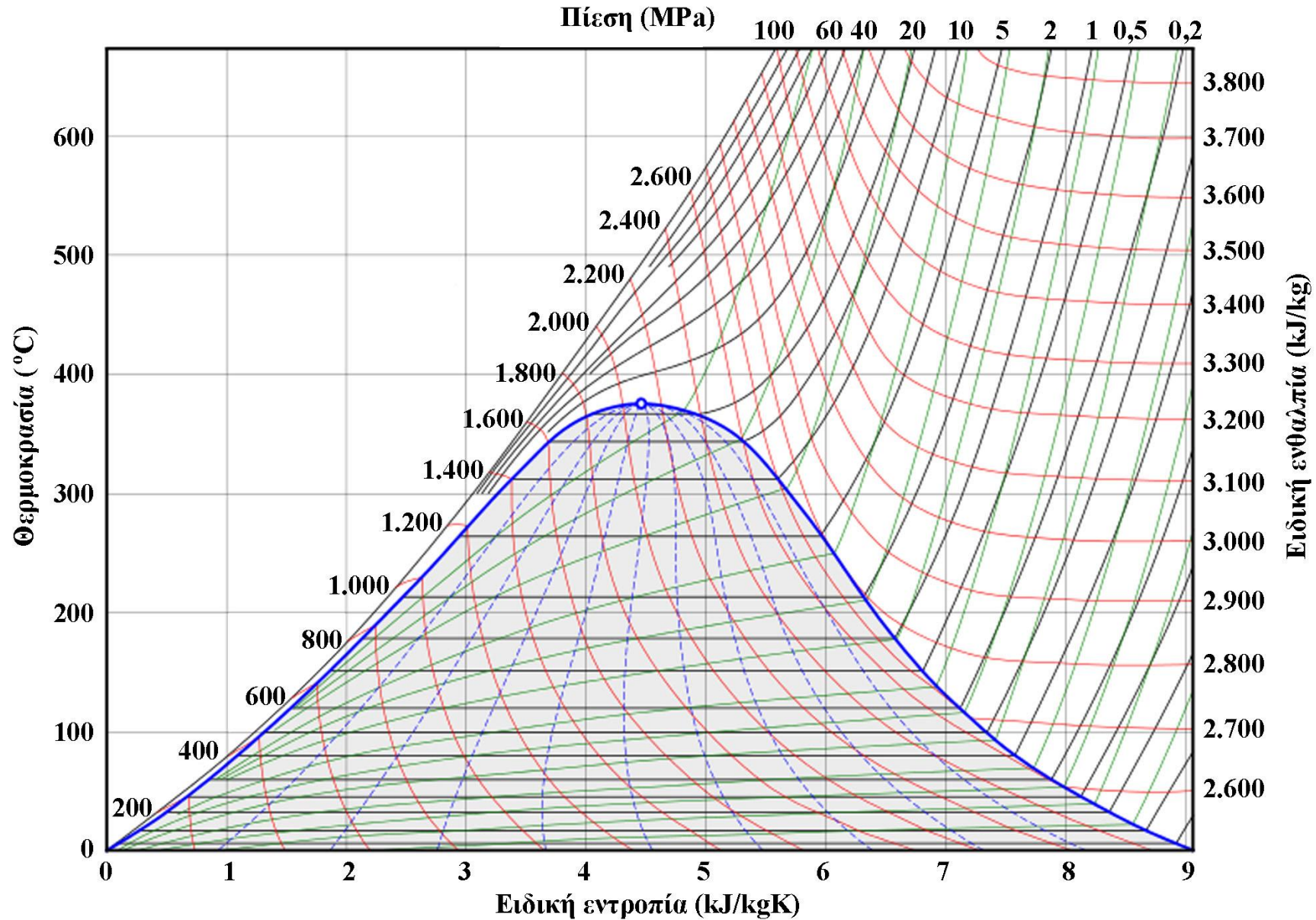
- Η εντροπία παρουσιάζεται γενικά στον άξονα των x σε διαγράμματα $T-s$ και $h-s$.

Μεταβολή της εντροπίας καθαρής ουσίας

- Στο διάγραμμα για το νερό παρατηρείται ότι οι ισόογκες γραμμές είναι πιο απότομες από τις ισόθλιπτες, ενώ οι ισόθλιπτες είναι παράλληλες με τις ισοθερμοκρασιακές εντός της καμπύλης κορεσμού.



Μεταβολή της εντροπίας καθαρής ουσίας



Παράδειγμα 5: Ιδιότητες υγρών υδρατμών

Να υπολογιστούν η θερμοκρασία, ο ειδικός όγκος και η ειδική ενθαλπία υγρού ατμού περιεκτικότητας σε υδρατμούς 20%. Η πίεση του μίγματος είναι 150 kPa.

Λύση:

Από τον πίνακα ιδιοτήτων υδρατμών βρίσκουμε τις ακόλουθες τιμές για κορεσμένο υγρό και ατμό στα 150 kPa:

- θερμοκρασία: $T_{\text{sat}} = 111,35 \text{ }^\circ\text{C}$
- ειδικός όγκος κορεσμένου υγρού: $v_f = 0,001053 \text{ m}^3/\text{kg}$
- ειδικός όγκος κορεσμένου ατμού: $v_g = 1,1594 \text{ m}^3/\text{kg}$
- ειδική ενθαλπία κορεσμένου υγρού: $h_f = 467,13 \text{ kJ/kg}$
- ειδική ενθαλπία κορεσμένου ατμού: $h_g = 2.693,1 \text{ kJ/kg}$.

Παράδειγμα 5: Ιδιότητες υγρών υδρατμών

Ο ειδικός όγκος υπολογίζεται ως εξής:

$$v_{avg} = (1-x) \cdot v_f + x \cdot v_g \Rightarrow v_{avg} = (1-0,20) \cdot 0,001053 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} + 0,20 \cdot 1,1594 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \Leftrightarrow$$
$$v_{avg} = 0,2327 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

Ομοίως, η ειδική ενθαλπία υπολογίζεται από τη σχέση:

$$h_{avg} = (1-x) \cdot h_f + x \cdot h_g \Rightarrow h_{avg} = (1-0,20) \cdot 467,13 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} + 0,20 \cdot 2.693,1 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \Leftrightarrow$$
$$h_{avg} = 912,32 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$



Παράδειγμα 6: Μεταβολή εντροπίας καθαρής ουσίας

Μία άκαμπτη δεξαμενή περιέχει 5 kg ψυκτικού μέσου R-134a αρχικά σε θερμοκρασία 20 °C και πίεση 140 kPa. Το ψυκτικό ψύχεται καθώς αναμιγνύεται μέχρι η πίεσή του να πέσει στα 100 kPa. Υπολογίστε τη μεταβολή της εντροπίας του ψυκτικού μέσου κατά την εν λόγω διεργασία.

Λύση:

Θεωρούμε τη δεξαμενή και το ψυκτικό σε αυτήν ως το θερμοδυναμικό σύστημα. Το σύστημα αυτό είναι κλειστό, καθώς δεν υπάρχει συναλλαγή μάζας του μέσου με το περιβάλλον. Ο όγκος της δεξαμενής είναι σταθερός, όπως και η περιεχόμενη μάζα του ψυκτικού μέσου σε αυτήν, συνεπώς $v_1 = v_2$.

Η μεταβολή της εντροπίας του μέσου κατά τη διεργασία ισούται με τη διαφορά των εντροπιών αρχικής και τελικής κατάστασης.

Παράδειγμα 6: Μεταβολή εντροπίας καθαρής ουσίας

Η αρχική κατάσταση του μέσου είναι πλήρως καθορισμένη, καθώς δίνονται:

- θερμοκρασία: $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
- πίεση: 140 kPa.

$$p = 0,14 \text{ MPa}$$

Με τις τιμές αυτών των καταστατικών μεγεθών, από τον πίνακα υπέρθερμου ατμού ψυκτικού μέσου R-134a βρίσκουμε για την αρχική κατάσταση:

- ειδική εντροπία:
 $s_1 = 1,0624 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
- ειδικός όγκος κορεσμένου υγρού:
 $u_1 = 0,1654 \text{ m}^3/\text{kg}$

Θερμοκρασία T ($^\circ\text{C}$)	Ειδικός όγκος u (m^3/kg)	Ειδική ενθαλπία h (kJ/kg)	Ειδική εντροπία s (kJ/kg·K)
Sat.	0,1402	239,18	0,94462
-10	0,1461	246,4	0,972
0	0,1526	254,6	1,003
10	0,1591	262,9	1,033
20	0,1654	271,4	1,062
30	0,1717	280,0	1,091
40	0,1780	288,7	1,120
50	0,1841	297,6	1,147
60	0,1903	306,6	1,175
70	0,1964	315,8	1,202
80	0,2024	325,1	1,229
90	0,2085	334,6	1,255
100	0,2145	344,2	1,282

Παράδειγμα 6: Μεταβολή εντροπίας καθαρής ουσίας

Για την κατάσταση 2 ξέρουμε ότι η πίεση είναι 100 kPa και ότι $u_1 = u_2 = 0,1654 \text{ m}^3/\text{kg}$.

Από τον πίνακα κορεσμένου ατμού του μέσου R134a και για 100 kPa βρίσκουμε:

$$u_f = 0,0007 \text{ m}^3/\text{kg} < u_2 = 0,1654 \text{ m}^3/\text{kg} < u_g = 0,1925 \text{ m}^3/\text{kg}.$$

Τούτο σημαίνει ότι στην κατάσταση 2 θα έχουμε μίγμα ψυκτικού μέσου στη διφασική περιοχή. Η ξηρότητα του μίγματος σε αυτή την κατάσταση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x = \frac{u_2 - u_f}{u_g - u_f} \Rightarrow x = \frac{0,1654 - 0,0007}{0,1925 - 0,0007} \Leftrightarrow x = 0,859$$

Από τον πίνακα κορεσμένου ατμού του μέσου R134a βρίσκουμε: $s_f = 0,88008 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ και $s_g = 0,95191 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$

Η ειδική εντροπία του μίγματος στην κατάσταση 2 ισούται με:

$$s_2 = (1-x) \cdot s_f + x \cdot s_g \Rightarrow s_2 = (1-0,859) \cdot 0,88008 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} + 0,859 \cdot 0,95191 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \Leftrightarrow s_2 = 0,94178 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$$



Παράδειγμα 6: Μεταβολή εντροπίας καθαρής ουσίας

Η μεταβολή της εντροπίας του μίγματος κατά τη διεργασία ισούται με:

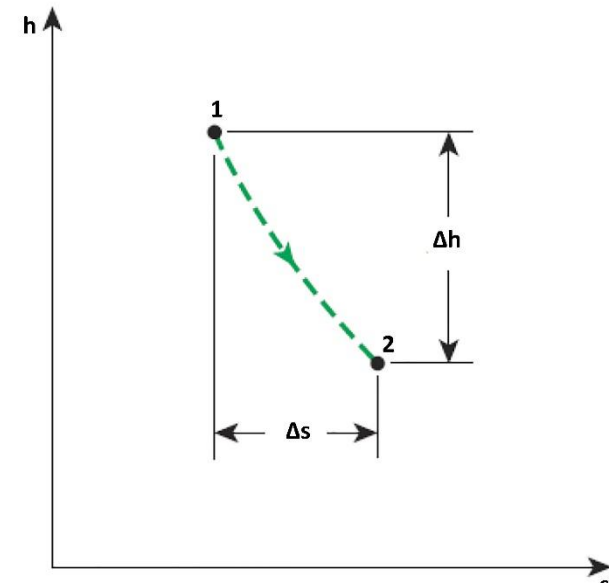
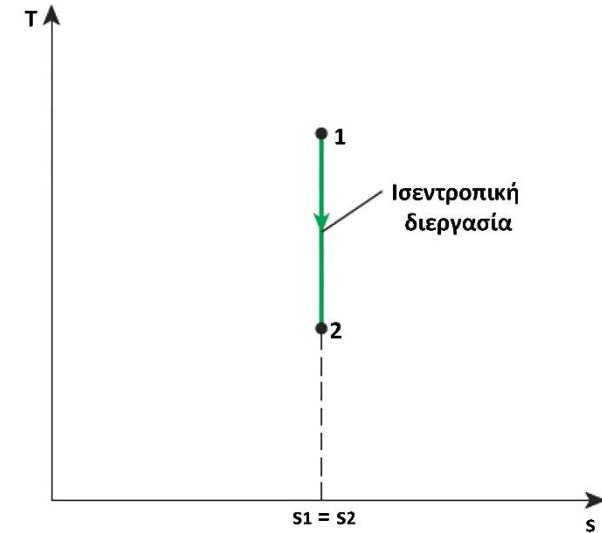
$$\Delta S = m \cdot \Delta s = m \cdot (s_2 - s_1) \Rightarrow \Delta S = 5 \text{ kg} \cdot (0,9418 - 1,0624) \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \Leftrightarrow \Delta S = -0,603 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$



Διαγράμματα ιδιοτήτων εντροπίας

Διαγράμματα ιδιοτήτων εντροπίας

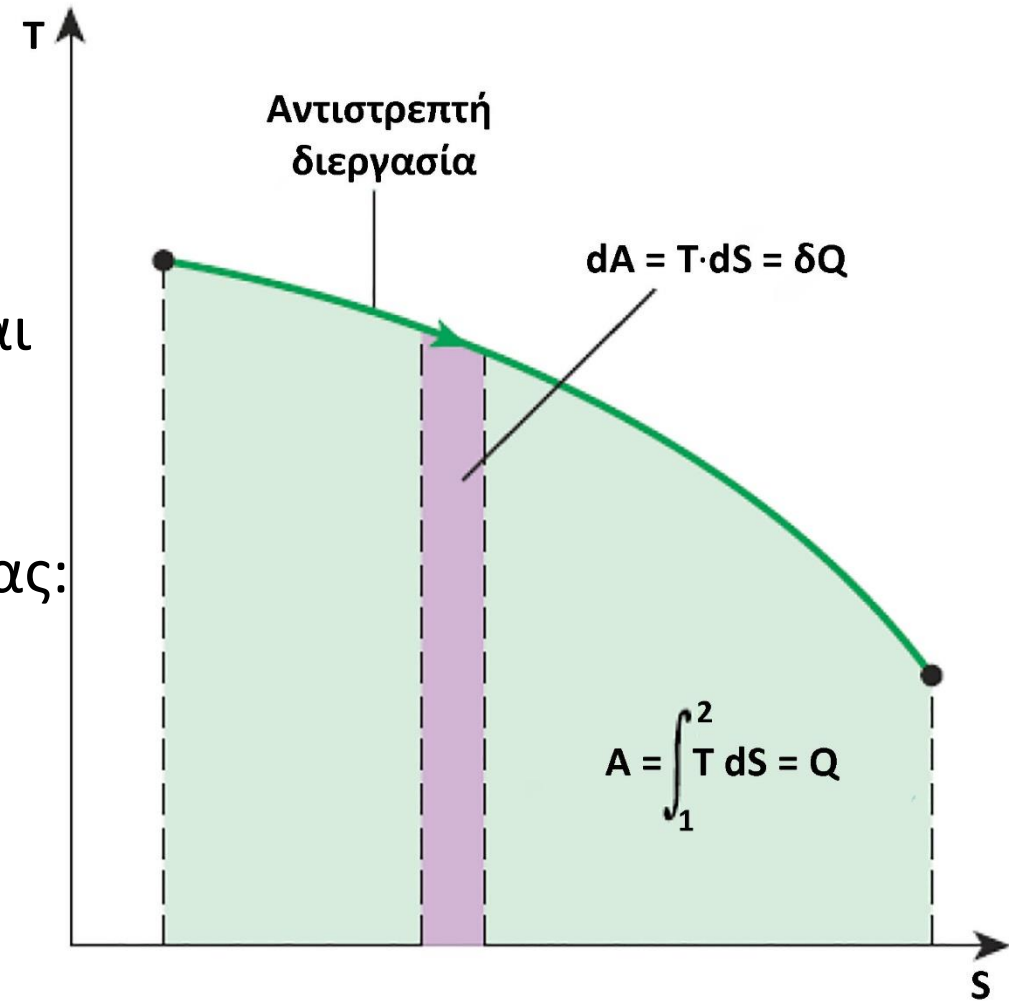
- Μια άλλη ειδική κατηγορία διεργασίας είναι η ισεντροπική διεργασία. Μια ισεντροπική διεργασία σε διάγραμμα T-s αναγνωρίζεται απλά ως ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα.
- Ένα άλλο διάγραμμα που χρησιμοποιείται ευρέως είναι το διάγραμμα ενθαλπίας-εντροπίας, h-s. Η κατακόρυφη μεταβολή Δh αντιπροσωπεύει το έργο που παράγεται (ή απορροφάται) από μια μηχανή (π.χ. στρόβιλο), ενώ η οριζόντια μεταβολή Δs δείχνει το κατά πόσο η διεργασία είναι μη αντιστρεπτή.
- Το διάγραμμα h-s είναι γνωστό και ως διάγραμμα **Mollier**.



Διαγράμματα ιδιοτήτων εντροπίας

- Τα διαγράμματα ιδιοτήτων παρέχουν μια πολύ σημαντική οπτικοποιημένη πληροφορία στη θερμοδυναμική.
- Στην ανάλυση του 2^{ου} θερμοδυναμικού νόμου βοηθά πολύ η μια συντεταγμένη των διαγραμμάτων να είναι η εντροπία.
- Τα διαγράμματα που συνήθως χρησιμοποιούνται είναι αυτά της Θερμοκρασίας-Εντροπίας και της Ενθαλπίας-Εντροπίας.
- Με βάση τη θεμελιώδη εξίσωση ορισμού της εντροπίας:

$$dS = \frac{\Delta Q_{\text{αντ.}}}{T} \Leftrightarrow \Delta Q_{\text{αντ.}} = T \cdot dS$$

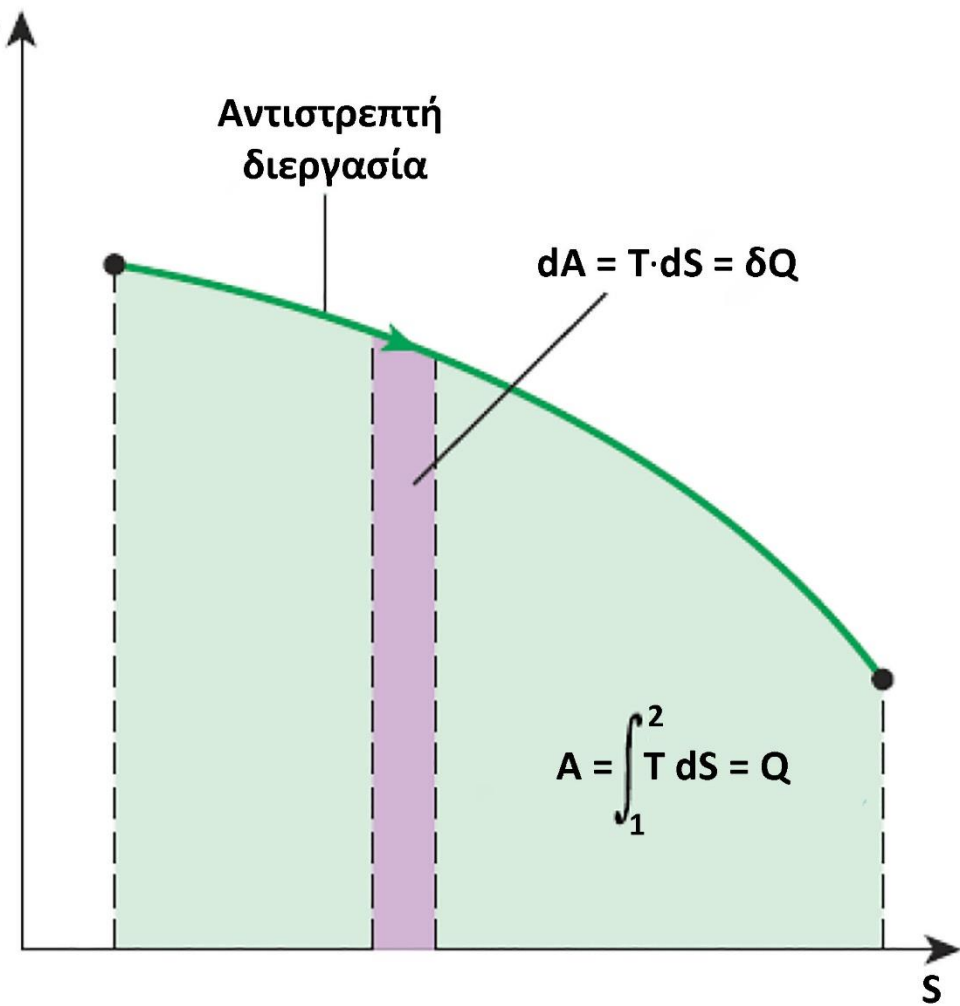


Διαγράμματα ιδιοτήτων εντροπίας

- Το στοιχειώδες εμβαδόν $\delta Q_{\text{αντ.}}$ στο σχήμα αντιπροσωπεύει θερμότητα.
- Συνεπώς το ολικό ποσό θερμότητας που μεταφέρεται T προκύπτει ως εξής:

$$Q_{\text{αντ.}} = \int_1^2 T \cdot dS$$

και παριστάνεται από το εμβαδό κάτω από την καμπύλη στο T-S διάγραμμα. Το εμβαδό αυτό αντιπροσωπεύει θερμότητα σε αντιστρεπτές διεργασίες και δεν έχει έννοια σε μη αντιστρεπτές διεργασίες.



Διαγράμματα ιδιοτήτων εντροπίας

- Οι παραπάνω εξισώσεις μπορεί να εκφραστούν και ανά μονάδα μάζας:

$$\delta q_{\text{αντ.}} = T \cdot dS$$

$$q_{\text{αντ.}} = \int_1^2 T \cdot dS$$

- Για να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα θα πρέπει η σχέση μεταξύ T και s να είναι γνωστή.



Η ισοθερμοκρασιακή μεταβολή



Η μεταβολή της εντροπίας σε ισοθερμοκρασιακή μεταβολή

- Μια ειδική περίπτωση είναι η αντιστρεπτή ισοθερμοκρασιακή μεταφορά θερμότητας για την οποία ισχύει:

$$Q_{\text{αντ.}} = T_0 \cdot \delta S \text{ (σε kJ)}$$

$$q_{\text{αντ.}} = T_0 \cdot \delta s \text{ (σε kJ/kg)}$$

Όπου T_0 η θερμοκρασία και ΔS η μεταβολή της εντροπίας.

- Σε μία ισοθερμοκρασιακή μεταβολή ισχύει $\Delta U = 0$, άρα από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο έχουμε: $Q = W$.

Η εντροπία σε αντιστρεπτή, ισοθερμοκρασιακή μεταβολή

- Η ισοθερμοκρασιακή μεταφορά θερμότητας είναι μια εσωτερικά αντιστρεπτή διεργασία. Συνεπώς βάσει της σχέσης ορισμού της η μεταβολή της εντροπίας υπολογίζεται ως:

$$\delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{αντ}} = \frac{1}{T} \int_1^2 (\delta Q)_{\text{αντ}}$$

ή τελικά:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \Leftrightarrow \Delta S = \frac{n \cdot R' \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}}{T} \Leftrightarrow \Delta S = n \cdot R' \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

όπου T είναι η σταθερή θερμοκρασία του συστήματος και Q η θερμότητα που μεταφέρεται κατά την εσωτερικά αντιστρεπτή διεργασία.

- Η ανωτέρω σχέση είναι σημαντική για τον καθορισμό της μεταβολής της εντροπίας σε θερμοδοχεία, που προσδίδουν και απορρίπτουν θερμότητα υπό σταθερή θερμοκρασία.
- Η μεταβολή της εντροπίας είναι θετική όταν προσδίδεται θερμότητα στο σύστημα και αρνητική όταν απορρίπτεται θερμότητα από το σύστημα.

Η μεταβολή της εντροπίας σε μη ισοθερμοκρασιακή μεταβολή

- Αν έχουμε μια αντιστρεπτή μεταβολή AB, που δεν είναι ισοθερμοκρασιακή μπορούμε να τη χωρίσουμε σε πολύ μικρές (απειροστές) επιμέρους μεταβολές, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ισοθερμοκρασιακές.
- Σε κάθε μικρή μεταβολή το σύστημα ανταλλάσει με το περιβάλλον ποσό θερμότητας ΔQ υπό σταθερή (πρακτικά) θερμοκρασία T .
- Η στοιχειώδης μεταβολή της εντροπίας σε απειροστή μεταβολή θα είναι $\Delta Q/T$.
- Για να βρούμε τη μεταβολή της εντροπίας για όλη τη μεταβολή AB, αθροίζουμε τις επιμέρους μεταβολές, δηλαδή:

$$\Delta S = \sum \frac{\Delta Q}{T}$$

- Είναι προφανές από τα παραπάνω ότι σε μια αντιστρεπτή αδιαβατική μεταβολή ισχύει $\Delta S = 0$ ή S σταθερό.



Η σχέση $T \cdot ds$

Η σχέση $T \cdot ds$

- Η ποσότητα $(\delta Q/T)_{\text{αντ.}}$ είναι η στοιχειώδης μεταβολή της εντροπίας και η συνολική μεταβολή υπολογίζεται από το ολοκλήρωμά της.
- Για ισοθερμοκρασιακή μεταβολή το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα, όταν όμως η θερμοκρασία δεν είναι σταθερή πρέπει να είναι γνωστή η συνάρτηση μεταξύ δQ και T .
- Για κλειστό σύστημα που περιέχει συμπιεστό ρευστό η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας εκφράζεται ως εξής:

$$\delta Q_{\text{αντ.}} - \delta W_{\text{αντ.}} = dU$$

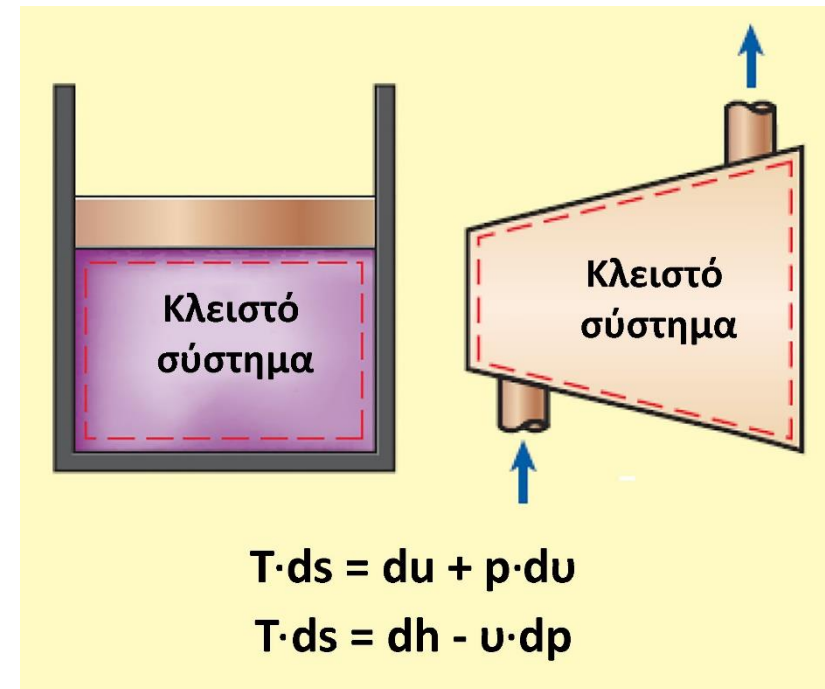
- Όμως:

$$\delta Q_{\text{αντ.}} = T \cdot dS \text{ και } \delta W_{\text{αντ.}} = p \cdot dV$$

συνεπώς:

$$T \cdot dS - p \cdot dV = dU \Leftrightarrow T \cdot dS = dU + p \cdot dV \quad \text{ή} \quad T \cdot ds = du + p \cdot du$$

- Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως η 1^η εξίσωση $T \cdot ds$ ή αλλιώς ως εξίσωση του Gibbs.



Η σχέση $T \cdot ds$

- Η δεύτερη $T \cdot ds$ εξίσωση λαμβάνεται όταν αντικατασταθεί ο όρος du στην πρώτη σχέση από την ενθαλπία: $h = u + p \cdot v$. Συγκεκριμένα:

$$h = u + p \cdot v \Rightarrow dh = d(u + p \cdot v) \Leftrightarrow dh = du + dp \cdot v + p \cdot dv \Leftrightarrow du = dh - dp \cdot v - p \cdot dv$$

- Από την τελευταία σχέση, η σχέση του Gibbs γράφεται:

$$T \cdot ds = du + p \cdot dv \Leftrightarrow T \cdot ds = dh - dp \cdot v - p \cdot dv + p \cdot dv \Leftrightarrow T \cdot ds = dh - dp \cdot v$$

- Οι ανωτέρω δύο εξισώσεις είναι πολύ σημαντικές διότι συνδέουν τη μεταβολή της εντροπίας με άλλες θερμοδυναμικές ιδιότητες (u , h , v , P). Οι σχέσεις αυτές αναπτύχθηκαν για αντιστρεπτές διεργασίες. Ισχύουν όμως και για μη αντιστρεπτές, αφού η εντροπία είναι ιδιότητα και η μεταβολή μιας ιδιότητας είναι ανεξάρτητη της διαδρομής της διεργασίας.
- Οι εξισώσεις τελικά ισχύουν για αντιστρεπτές και μη διεργασίες, αλλά και για κλειστά και ανοιχτά συστήματα.

Η σχέση $T \cdot ds$

- Λύνοντας τις ανωτέρω δύο εξισώσεις ως προς ds μπορούμε να υπολογίσουμε τη μεταβολή της εντροπίας:

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{p \cdot du}{T}$$

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{u \cdot dp}{T}$$

- Η μεταβολή της εντροπίας υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα των παραπάνω εξισώσεων που απαιτεί τη γνώση της συνάρτησης μεταξύ u και T ($du = c_v \cdot dT$) ή h και T ($dh = c_p \cdot dT$).



Εντροπία στερεών και υγρών
Εντροπία ιδανικού αερίου

Μεταβολή της εντροπίας σε στερεά και υγρά

- Τα στερεά και τα υγρά μπορούν να θεωρηθούν ως μη συμπιεστές ουσίες αφού ο ειδικός όγκος τους παραμένει σχεδόν σταθερός σε μια διεργασία. Συνεπώς $du=0$, άρα:

$$ds = \frac{du}{T} = \frac{c \cdot dT}{T}$$

- Επειδή για μη συμπιεστά σώματα $c_v = c_p = c$ και $du = c \cdot dT$, η μεταβολή της εντροπίας για στερεά και υγρά εκφράζεται ως:

$$\delta s = s_2 - s_1 = \int_1^2 c(T) \cdot \frac{dT}{T} \cong c_{avg} \cdot \frac{\ln T_2}{\ln T_1}$$

όπου c_{avg} είναι η μέση ειδική θερμότητα σε ένα εύρος θερμοκρασίας.

- Για μη συμπιεστά σώματα η εντροπία εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία, κι όχι από την πίεση.

Μεταβολή της εντροπίας σε στερεά και υγρά

- Για ισεντροπική μεταβολή σε στερεά και υγρά προκύπτει (αφού τεθεί $\Delta s=0$) ότι:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_{avg} \cdot \frac{\ln T_2}{\ln T_1} = 0 \Rightarrow \frac{\ln T_2}{\ln T_1} = 1 \Leftrightarrow T_1 = T_2$$

- Δηλαδή η θερμοκρασία παραμένει σταθερή όταν μια μη συμπιεστή ουσία υπόκειται σε ισεντροπική διεργασία. Δηλαδή η ισεντροπική μεταβολή είναι επίσης και ισοθερμοκρασιακή.

Μεταβολή της εντροπίας ιδανικού αερίου

- Μια πρώτη εξίσωση για τη μεταβολή της εντροπίας ιδανικού αερίου προκύπτει από τη σχέση:

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{p \cdot du}{T}$$

Αντικαθιστώντας με τις εξισώσεις του ιδανικού αερίου: $du = c_v \cdot dT$ και $p = \frac{R' \cdot T}{u}$ έχουμε:

$$ds = c_v \cdot \frac{du}{T} + R' \cdot \frac{du}{u}$$

- Με ολοκλήρωση της ανωτέρω σχέσης έχουμε:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 c_v(T) \cdot \frac{dT}{T} + R' \cdot \ln \frac{u_2}{u_1}$$

Μεταβολή της εντροπίας ιδανικού αερίου

- Μια δεύτερη εξίσωση για τη μεταβολή της εντροπίας ιδανικού αερίου προκύπτει από τη σχέση:

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{v \cdot dp}{T}$$

Αντικαθιστώντας με τις εξισώσεις του ιδανικού αερίου: $dh = c_p \cdot dT$ και $v = \frac{R' \cdot T}{p}$ έχουμε:

$$dh = c_p \cdot \frac{dT}{T} - R' \cdot \frac{dp}{p}$$

- Με ολοκλήρωση της ανωτέρω σχέσης έχουμε:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 c_p(T) \cdot \frac{dT}{T} - R' \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}$$

- Οι ειδικές θερμότητες είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας και η ολοκλήρωση είναι δυσχερής. Συνήθως τα c_v και c_p παρέχονται από πίνακες ή θεωρείται μια σταθερή μέση τιμή τους.

Σταθερές ειδικές θερμότητες

- Η μεταβολή της εντροπίας ιδανικού αερίου, με την υπόθεση ότι η τιμή των ειδικών θερμότητων μπορεί να αντικατασταθεί από τις μέσες τιμές $c_{v,avg}$ και $c_{p,avg}$, οδηγεί στις παρακάτω εξισώσεις μετά από ολοκλήρωση (σε kJ/kg·K):

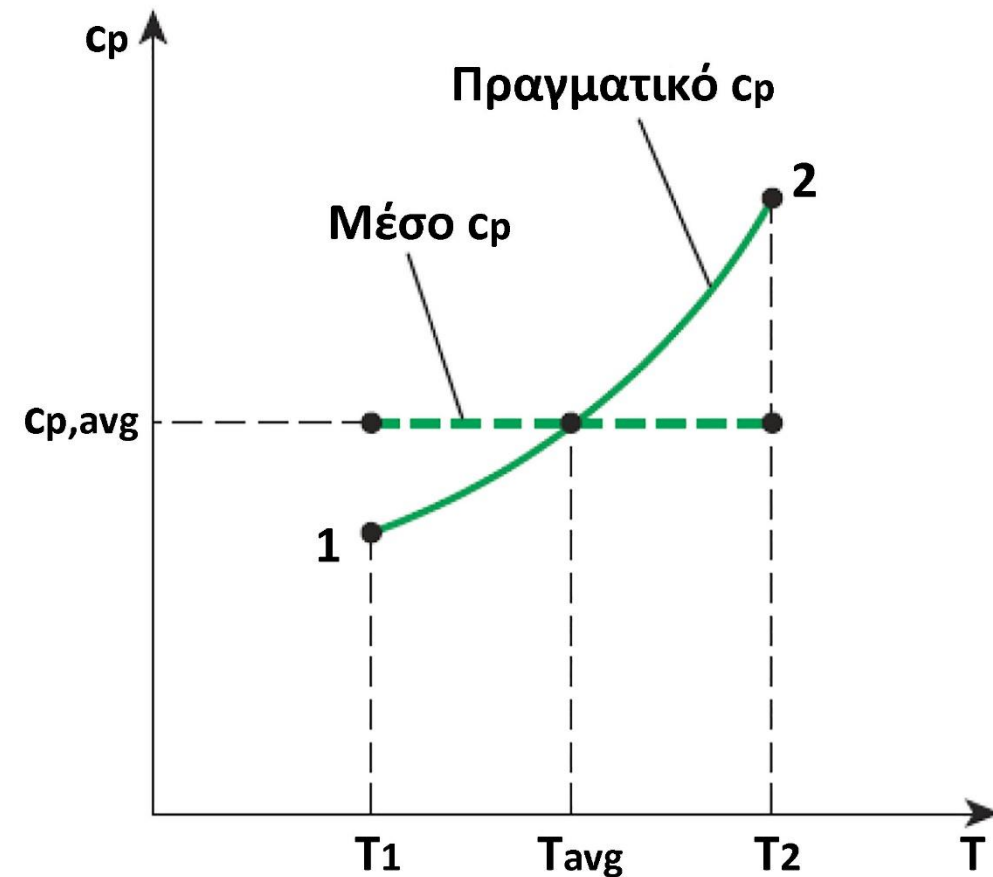
$$s_2 - s_1 = c_{v,avg} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + R' \cdot \ln \frac{u_2}{u_1}$$

$$s_2 - s_1 = c_{p,avg} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R' \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}$$

- Οι παραπάνω εξισώσεις εκφράζονται και ανά kmol ως εξής (σε kJ/kmol·K):

$$\bar{s}_2 - \bar{s}_1 = \bar{c}_{v,avg} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + R_u \cdot \ln \frac{u_2}{u_1}$$

$$\bar{s}_2 - \bar{s}_1 = \bar{c}_{p,avg} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R_u \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}$$



Παράδειγμα 7: Σταθερές ειδικές θερμότητες

Αέρας μάζας 3 kg θερμαίνεται από 27 °C σε 527 °C, ενώ η πίεσή του αυξάνεται από 100 kPa σε 500 kPa. Να προσδιοριστεί η μεταβολή της εντροπίας του αέρα θεωρώντας τις ειδικές θερμότητες σταθερές.

Λύση:

Από τα δεδομένα του προβλήματος και με βάση τον πίνακα ιδιοτήτων του αέρα ως ιδανικό αέριο για $T_1 = 27 + 273 = 300$ K έχουμε $c_{p1} = 1,005$ kJ/kg·K και $R' = 0,287$ kJ/kg·K.

Για $T_2 = 527 + 273 = 800$ K έχουμε $c_{p2} = 1,099$ kJ/kg·K και $R' = 0,287$ kJ/kg·K.

Η μέση τιμή της ειδικής θερμότητας για τις δύο θερμοκρασίες είναι: $c_{p,avg} = 1,052$ kJ/kg·K.

Η μεταβολή της ειδικής εντροπίας ισούται με:

$$s_2 - s_1 = c_{p,avg} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R' \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow s_2 - s_1 = 1,053 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \ln \frac{800}{300} - 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \ln \frac{500}{100}$$
$$\Leftrightarrow s_2 - s_1 = 0,571 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Παράδειγμα 7: Σταθερές ειδικές θερμότητες

Η μεταβολή της συνολικής εντροπίας το αέρα κατά τη συμπίεση ισούται με:

$$S=s \cdot m \Rightarrow S=0,571 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 3\text{kg} \Leftrightarrow S=1,713 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Μεταβλητές ειδικές θερμότητες

- Τελικά οι μεταβολές της εντροπίας υπολογίζονται ως (σε kJ/kg·K):

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 c_p(T) \cdot \frac{dT}{T} - R' \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} = s_2^0 - s_1^0 - R' \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}$$

ή ανά kmol σε (kJ/kmol·K):

$$\bar{s}_2 - \bar{s}_1 = \int_1^2 c_p(T) \cdot \frac{dT}{T} - R_u \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} = \bar{s}_2^0 - \bar{s}_1^0 - R_u \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}$$

- Σημειώνεται ότι η εντροπία μεταβάλλεται ως συνάρτηση τόσο της θερμοκρασίας όσο της πίεσης ή του ειδικού όγκου. Η ποσότητα s^0 είναι εξάρτηση αποκλειστικά της θερμοκρασίας. Ο τελευταίος όρος της ανωτέρω σχέσης δείχνει την εξάρτηση της εντροπίας από την πίεση.

Παράδειγμα 8: Μεταβλητές ειδικές θερμότητες

Αέρας συμπιέζεται από μία αρχική κατάσταση με πίεση 100 kPa και θερμοκρασία 17 °C σε μία τελική κατάσταση με πίεση 600 kPa και θερμοκρασία 57 °C. Υπολογίστε τη μεταβολή της εντροπίας του αέρα κατά αυτή τη συμπίεσή του χρησιμοποιώντας: α. τιμές ιδιοτήτων από τους σχετικούς πίνακες, β. μέσες τιμές για τις ειδικές θερμοχωρητικότητες.

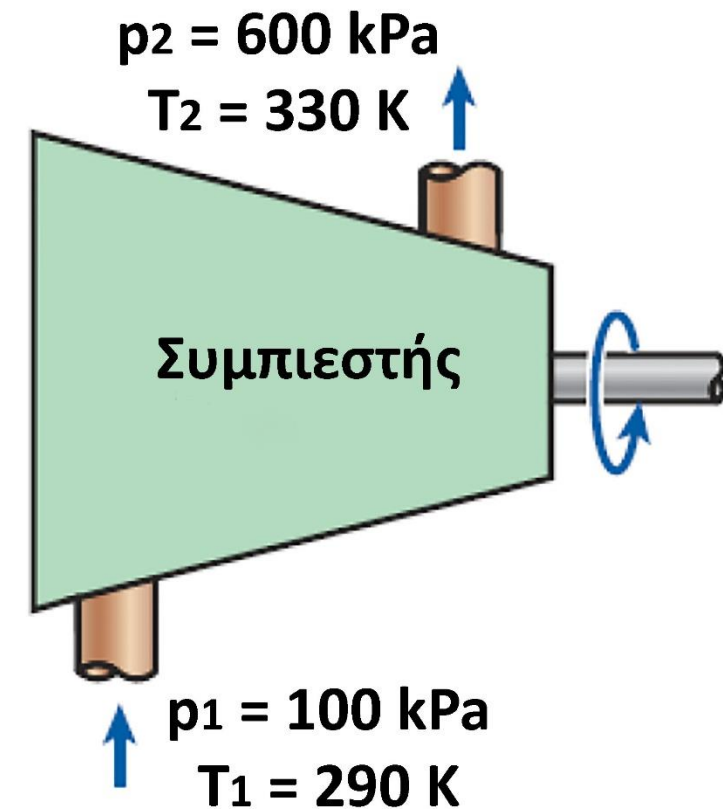
Λύση:

Ο αέρας μπορεί να θεωρηθεί ως ιδανικό αέριο καθώς βρίσκεται σε υψηλές θερμοκρασίες και χαμηλές πιέσεις αναφορικά με το κρίσιμο σημείο του. Συνεπώς, μπορούν να εφαρμοστούν οι σχέσεις υπολογισμού της εντροπίας για το ιδανικό αέριο.

α. Από τον πίνακα ιδιοτήτων του αέρα ως ιδανικό αέριο έχουμε:

$$\text{Για } T_1 = 17 \text{ }^\circ\text{C} = 290 \text{ K, } s_1^0 = 1,66802 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$$

$$\text{Για } T_2 = 57 \text{ }^\circ\text{C} = 330 \text{ K, } s_2^0 = 1,79783 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$$



Παράδειγμα 8: Μεταβλητές ειδικές θερμότητες

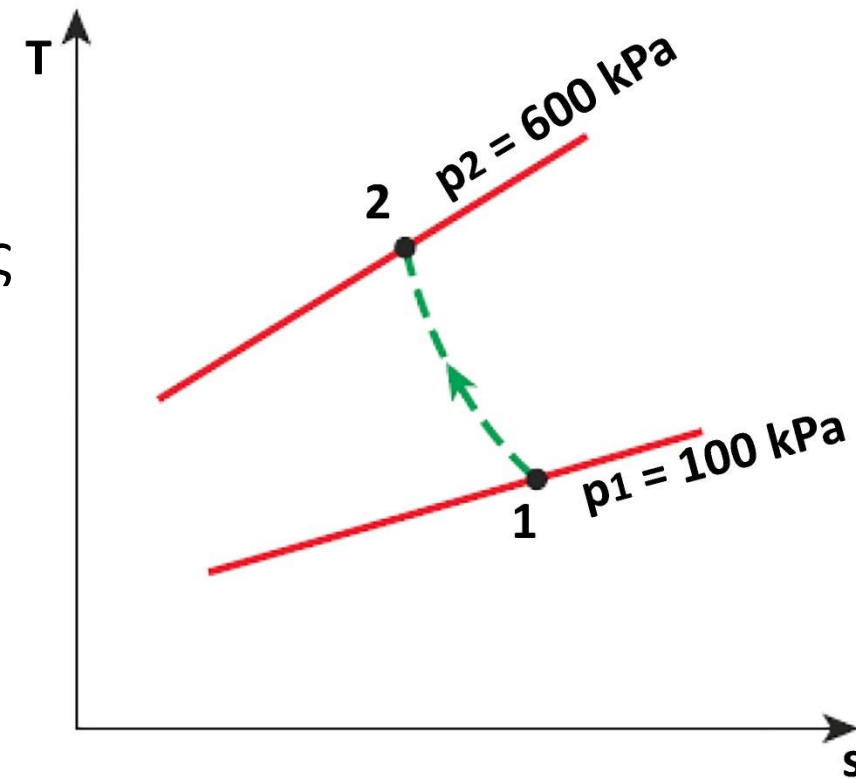
Η μεταβολή της εντροπίας ισούται με:

$$s_2 - s_1 = s_2^0 - s_1^0 - R' \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow s_2 - s_1 = (1,79783 - 1,66802) \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} - 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \ln \frac{600 \text{ kPa}}{100 \text{ kPa}} \Leftrightarrow$$
$$s_2 - s_1 = -0,384 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

β. Η μεταβολή της εντροπίας του αέρα κατά την εκτόνωση μπορεί επίσης να υπολογιστεί από την ακόλουθη σχέση, θεωρώντας μία μέση τιμή της ειδικής θερμότητας υπό σταθερή πίεση $c_{p,avg}$ για τη μέση θερμοκρασία της μεταβολής η οποία ισούται με $(57 + 17)/2 = 37 \text{ }^\circ\text{C} = 310 \text{ K}$.

Για τη θερμοκρασία αυτή, η ειδική θερμότητα του αέρα υπό σταθερή πίεση βρίσκεται με γραμμική παρεμβολή ίση με

$$1,006 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$



Παράδειγμα 8: Μεταβλητές ειδικές θερμότητες

Τελικά η μεταβολή της εντροπίας υπολογίζεται από την αντίστοιχη σχέση για σταθερές ειδικές θερμότητες:

$$s_2 - s_1 = c_{p,avg} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R' \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow s_2 - s_1 = 1,006 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \ln \frac{330 \text{ K}}{290 \text{ K}} - 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \ln \frac{600 \text{ kPa}}{100 \text{ kPa}} \Leftrightarrow$$
$$s_2 - s_1 = -0,384 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Παρατηρείται η σχεδόν απόλυτη ταύτιση των αποτελεσμάτων. Τούτο οφείλεται στο ότι η διαφορά θερμοκρασίας κατά τη διεργασία ήταν μικρή. Σε διεργασίες με σημαντική θερμοκρασιακή διαφορά, η διαφορά στο αποτέλεσμα μεταξύ των δύο υπολογισμών θα είναι επίσης μεγάλη.



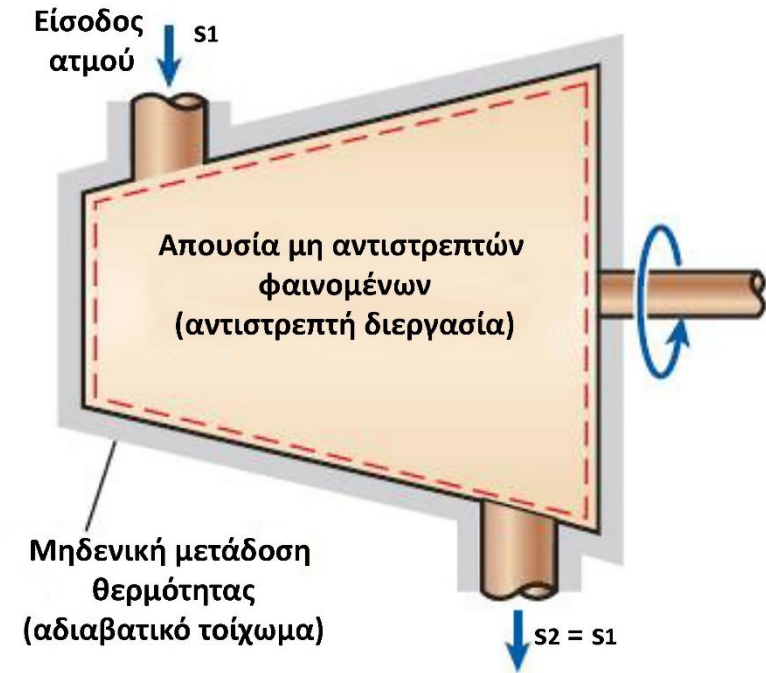
Ισεντροπικές διεργασίες

Ισεντροπική διεργασία

- Η εντροπία μιας μάζας αλλάζει εξαιτίας:
 - α. μεταφοράς θερμότητας
 - β. μη αντιστρεπτών φαινομένων.
- Η εντροπία δεν μεταβάλλεται όταν η διεργασία είναι εσωτερικά **αντιστρεπτή και αδιαβατική**.
- Η διεργασία κατά την οποία η εντροπία παραμένει σταθερή, ονομάζεται **ισεντροπική**:

$$\Delta S = 0 \text{ ή } s_2 = s_1.$$

- Τούτο σημαίνει ότι το εργαζόμενο μέσο θα έχει στο τέλος της διεργασίας την ίδια τιμή εντροπίας με την αρχική τιμή.
- Η ισεντροπική διεργασία χρησιμεύει ως μέτρο σύγκρισης με τις πραγματικές διεργασίες που λαμβάνουν χώρα σε διάφορες μηχανές (αντλίες, στρόβιλοι, ακροφύσια, διαχύτες κλπ) κυρίως σχετικά με το βαθμό απόδοσης.





Ισεντροπική διεργασία

- Σημειώνεται ότι μια αντιστρεπτή και αδιαβατική διεργασία είναι ισεντροπική. Όμως μια ισεντροπική διεργασία δεν είναι απαραίτητα αδιαβατική και αντιστρεπτή.
- Κι αυτό διότι η αύξηση της εντροπίας λόγω μη αντιστρεπτών φαινομένων μπορεί να αντισταθμιστεί από απώλειες θερμότητας.

Παράδειγμα 9: Ισεντροπική διεργασία

Ατμός εισάγεται σε έναν αδιαβατικό στρόβιλο με πίεση 5 MPa και θερμοκρασία 450 °C και εξέρχεται από αυτόν με πίεση 1,4 MPa. Υπολογίστε το αποδιδόμενο έργο από το στρόβιλο ανά μονάδα παροχής μάζας του ατμού, θεωρώντας τη διεργασία ως ισεντροπική.

Λύση:

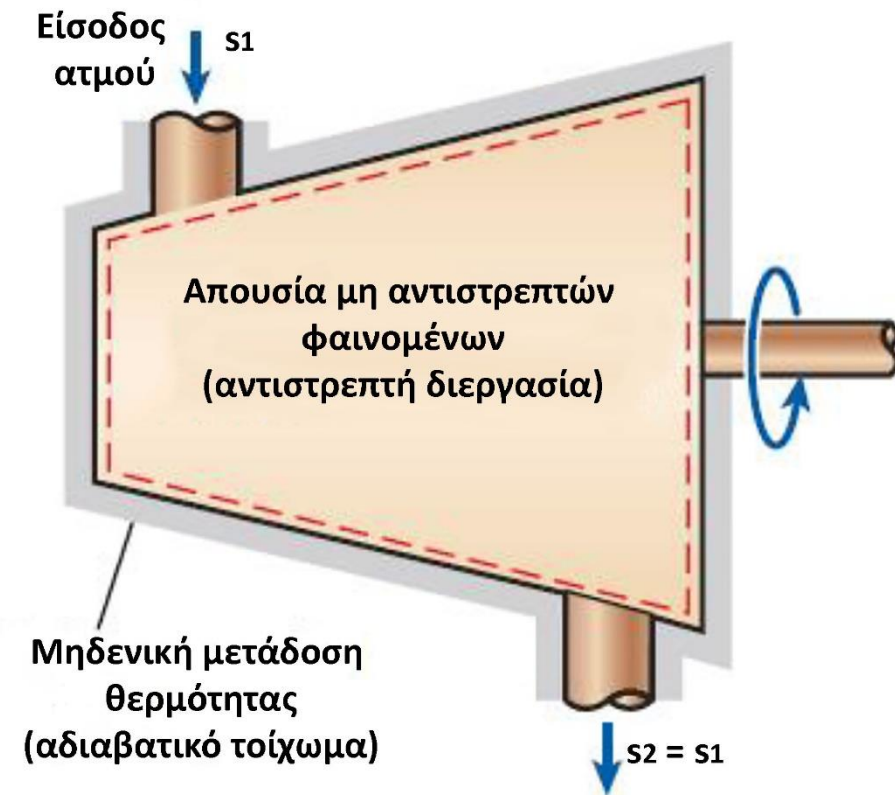
Θεωρούμε το στρόβιλο με τον ατμό ως το θερμοδυναμικό σύστημα με μία είσοδο και μία έξοδο.

Λόγω της αρχής της συνέχειας της παροχής μάζας θα ισχύει:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

Θεωρώντας μηδενική την κινητική και τη δυναμική ενέργεια του συστήματος, το αποδιδόμενο έργο από το στρόβιλο θα προκύψει με εφαρμογή ενεργειακού ισολογισμού (2^{ος} θερμοδυναμικός νόμος):

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = \frac{dE}{dt} = 0$$



Παράδειγμα 9: Ισεντροπική διεργασία

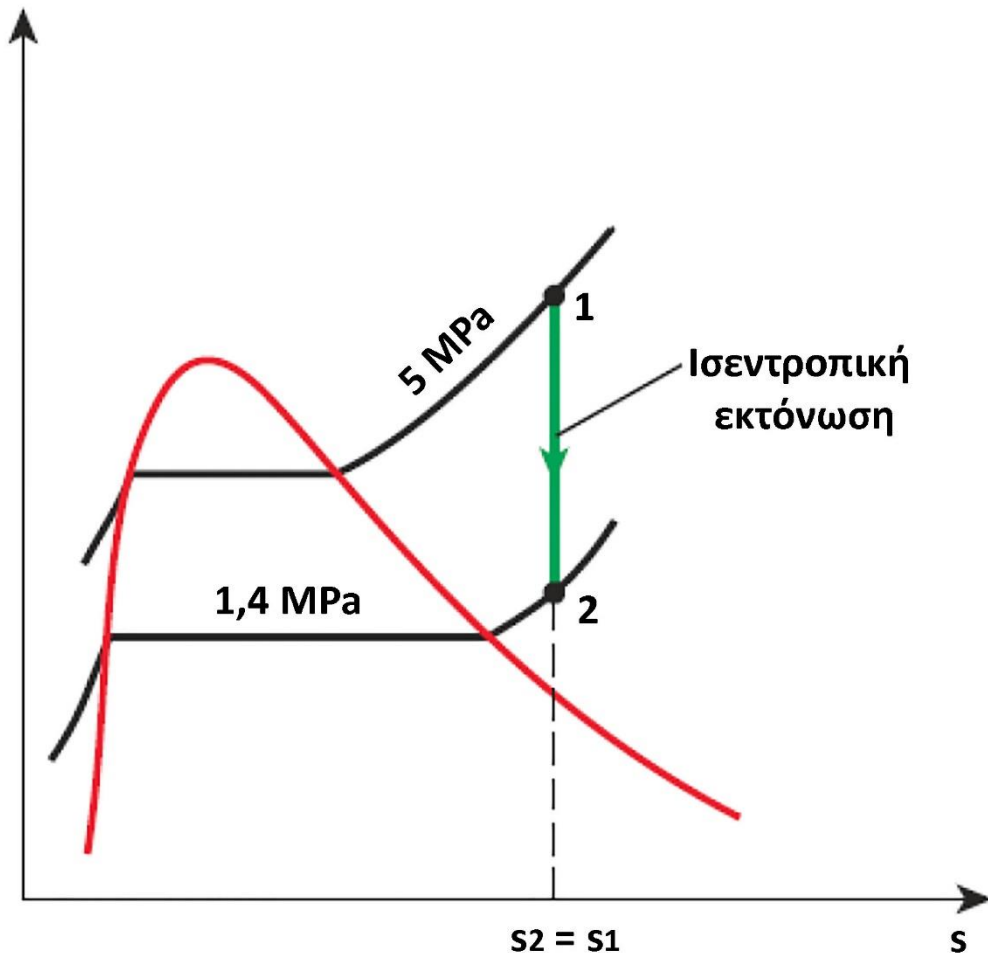
όπου $\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out}$ η μεταφερόμενη ενέργεια μέσω έργου, θερμότητας και μάζας

και $\frac{dE}{dt}$ ο ρυθμός μεταβολής της εσωτερικής, κινητικής και δυναμικής ενέργειας, ο οποίος ισούται με μηδέν.

Ο ενεργειακός ισολογισμός γράφεται:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = 0 \Leftrightarrow \dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \Leftrightarrow \dot{m} \cdot h_1 = \dot{m} \cdot h_2 + \dot{W}_{out} \Leftrightarrow \dot{W}_{out} = \dot{m} \cdot (h_1 - h_2)$$

Από τον πίνακα ιδιοτήτων υπέρθερμου ατμού για πίεση 5 MPa και θερμοκρασία 450 °C βρίσκουμε $h_1 = 3.317,2 \text{ kJ/kg}$ και $s_1 = 6,8210 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.



Παράδειγμα 9: Ισεντροπική διεργασία

4.5 MPa ($t_s = 257.437 \text{ }^\circ\text{C}$)				$t_s, \text{ }^\circ\text{C}$	5.0 MPa ($t_s = 263.941 \text{ }^\circ\text{C}$)				$t_s, \text{ }^\circ\text{C}$	5.5 MPa ($t_s = 269.965 \text{ }^\circ\text{C}$)			
v	ρ	h	s		v	ρ	h	s		v	ρ	h	s
51.378	19.464	2944.2	6.2854	300	45.346	22.053	2925.7	6.2110	300	40.373	24.769	2906.2	6.1397
52.873	18.913	2973.4	6.3359	310	46.766	21.383	2956.6	6.2646	310	41.740	23.958	2939.1	6.1966
54.317	18.410	3001.6	6.3838	320	48.130	20.777	2986.2	6.3149	320	43.043	23.233	2970.3	6.2496
55.720	17.947	3028.9	6.4295	330	49.446	20.224	3014.7	6.3626	330	44.294	22.576	3000.1	6.2995
57.087	17.517	3055.5	6.4732	340	50.724	19.714	3042.4	6.4080	340	45.502	21.977	3028.9	6.3468
58.423	17.117	3081.5	6.5153	350	51.969	19.242	3069.3	6.4516	350	46.675	21.425	3056.8	6.3920
59.733	16.741	3107.0	6.5560	360	53.186	18.802	3095.6	6.4935	360	47.817	20.913	3084.0	6.4352
61.021	16.388	3132.1	6.5953	370	54.378	18.390	3121.5	6.5340	370	48.934	20.436	3110.5	6.4769
62.288	16.054	3156.9	6.6336	380	55.549	18.002	3146.9	6.5732	380	50.027	19.989	3136.6	6.5171
63.538	15.739	3181.4	6.6708	390	56.702	17.636	3171.9	6.6112	390	51.101	19.569	3162.3	6.5561
64.772	15.439	3205.6	6.7070	400	57.837	17.290	3196.7	6.6483	400	52.158	19.173	3187.5	6.5939
65.991	15.153	3229.7	6.7425	410	58.958	16.961	3221.2	6.6844	410	53.199	18.797	3212.5	6.6307
67.199	14.881	3253.5	6.7771	420	60.066	16.648	3245.4	6.7196	420	54.226	18.441	3237.2	6.6666
68.394	14.621	3277.2	6.8111	430	61.162	16.350	3269.5	6.7541	430	55.241	18.102	3261.7	6.7017
69.580	14.372	3300.8	6.8443	440	62.248	16.065	3293.4	6.7879	440	56.245	17.779	3286.0	6.7360
70.756	14.133	3324.2	6.8770	450	63.323	15.792	3317.2	6.8210	450	57.239	17.471	3310.1	6.7696
71.924	13.904	3347.6	6.9091	460	64.390	15.530	3340.9	6.8535	460	58.224	17.175	3334.1	6.8025
73.083	13.683	3370.9	6.9406	470	65.449	15.279	3364.4	6.8854	470	59.200	16.892	3357.9	6.8348
74.236	13.471	3394.1	6.9716	480	66.500	15.038	3387.9	6.9168	480	60.169	16.620	3381.7	6.8666
75.381	13.266	3417.2	7.0022	490	67.545	14.805	3411.3	6.9477	490	61.131	16.358	3405.3	6.8978
76.521	13.068	3440.4	7.0323	500	68.583	14.581	3434.7	6.9781	500	62.086	16.107	3428.9	6.9285

Παράδειγμα 9: Ισεντροπική διεργασία

Για να βρούμε την ειδική ενθαλπία στην έξοδο του ατμού από το στρόβιλο έχουμε την πίεση 1,4 MPa και το δεδομένο ότι η μεταβολή είναι ισενθαλπική, άρα $s_1 = s_2 = 6,8210 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$.

1.2 MPa ($t_s = 187.957 \text{ }^\circ\text{C}$)				$t_s, \text{ }^\circ\text{C}$	1.3 MPa ($t_s = 191.605 \text{ }^\circ\text{C}$)				$t_s, \text{ }^\circ\text{C}$	1.4 MPa ($t_s = 195.039 \text{ }^\circ\text{C}$)			
v	ρ	h	s		v	ρ	h	s		v	ρ	h	s
1.138 50	878.35	798.33	2.2159	$t_s(\text{L})$	1.143 80	874.28	814.60	2.2508	$t_s(\text{L})$	1.148 92	870.39	829.97	2.2835
163.26	6.1251	2783.7	6.5217	$t_s(\text{V})$	151.19	6.6144	2786.5	6.4936	$t_s(\text{V})$	140.78	7.1034	2788.8	6.4675
1.090 01	917.42	632.63	1.8410	150	1.089 95	917.48	632.69	1.8409	150	1.089 88	917.53	632.75	1.8408
1.095 69	912.67	654.18	1.8916	155	1.095 62	912.72	654.24	1.8915	155	1.095 55	912.78	654.30	1.8914
1.101 57	907.80	675.81	1.9419	160	1.101 50	907.86	675.87	1.9417	160	1.101 42	907.92	675.93	1.9416
1.107 65	902.81	697.52	1.9917	165	1.107 57	902.87	697.57	1.9916	165	1.107 50	902.93	697.63	1.9914
1.113 95	897.71	719.31	2.0411	170	1.113 87	897.77	719.36	2.0410	170	1.113 79	897.83	719.42	2.0409
1.120 47	892.48	741.18	2.0902	175	1.120 39	892.55	741.23	2.0901	175	1.120 31	892.61	741.29	2.0900
1.127 23	887.13	763.15	2.1390	180	1.127 14	887.20	763.20	2.1388	180	1.127 06	887.26	763.25	2.1387
1.134 24	881.65	785.23	2.1874	185	1.134 15	881.72	785.27	2.1873	185	1.134 06	881.79	785.32	2.1871
164.32	6.0857	2789.4	6.5340	190	1.141 41	876.11	807.45	2.2354	190	1.141 32	876.18	807.50	2.2353
166.86	5.9931	2803.0	6.5631	195	152.83	6.5434	2796.0	6.5141	195	1.148 86	870.43	829.79	2.2831
169.34	5.9053	2816.1	6.5909	200	155.19	6.4439	2809.6	6.5431	200	143.03	6.9918	2803.0	6.4975
174.17	5.7415	2841.3	6.6437	210	159.76	6.2595	2835.7	6.5975	210	147.38	6.7850	2829.9	6.5538
178.87	5.5908	2865.7	6.6937	220	164.18	6.0907	2860.7	6.6487	220	151.58	6.5970	2855.5	6.6062
183.46	5.4508	2889.5	6.7414	230	168.50	5.9347	2884.9	6.6973	230	155.66	6.4241	2880.2	6.6559
187.97	5.3200	2912.7	6.7872	240	172.73	5.7895	2908.5	6.7439	240	159.65	6.2637	2904.3	6.7033
192.41	5.1973	2935.6	6.8313	250	176.88	5.6536	2931.8	6.7887	250	163.56	6.1139	2927.9	6.7488
196.79	5.0817	2958.2	6.8740	260	180.97	5.5258	2954.6	6.8320	260	167.41	5.9735	2951.0	6.7926
201.11	4.9723	2980.5	6.9155	270	185.01	5.4051	2977.2	6.8739	270	171.20	5.8411	2973.8	6.8350
205.40	4.8686	3002.6	6.9558	280	189.00	5.2909	2999.5	6.9146	280	174.95	5.7160	2996.4	6.8762
209.64	4.7700	3024.5	6.9951	290	192.96	5.1825	3021.6	6.9543	290	178.65	5.5975	3018.8	6.9162

Παράδειγμα 9: Ισεντροπική διεργασία

Για να βρούμε την ειδική ενθαλπία h_2 κάνουμε γραμμική παρεμβολή ανάμεσα στις δύο ειδικές εντροπίες μεταξύ των οποίων εμπεριέχεται η τιμή της ειδικής εντροπίας s_2 :

$$h_2 = h_a + \frac{s_2 - s_a}{s_b - s_a} \cdot (h_b - h_a) \Rightarrow h_2 = 2.951,0 + \frac{6,8210 - 6.7926}{6,8350 - 6.7926} \cdot (2.973,8 - 2.951,0) \Leftrightarrow$$
$$h_2 = 2.966,3 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Το παραγόμενο έργο ανά μονάδα μάζας πλέον μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\dot{W}_{\text{out}} = \dot{m} \cdot (h_1 - h_2) \Leftrightarrow \frac{\dot{W}_{\text{out}}}{\dot{m}} = \dot{w}_{\text{out}} = h_1 - h_2 \Rightarrow \dot{w}_{\text{out}} = (3.317,2 - 2.966,3) \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$
$$\Leftrightarrow \dot{w}_{\text{out}} = 350,9 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Ισεντροπική διεργασία ιδανικού αερίου με σταθερές ειδικές θερμότητες

- Από την πρώτη σχέση που αναπτύχθηκε για τη μεταβολή της εντροπίας με σταθερές ειδικές θερμότητας, θέτοντας $\Delta s = 0$

$$s_2 - s_1 = 0 = c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + R' \cdot \ln \frac{u_2}{u_1} \Leftrightarrow \ln \frac{T_2}{T_1} = -\frac{R'}{c_v} \cdot \ln \frac{u_2}{u_1} \Leftrightarrow \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^{-\frac{R'}{c_v}} \Leftrightarrow$$
$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \left(\frac{u_1}{u_2} \right)^{\frac{R'}{c_v}} \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{u_1}{u_2} \right)^{\frac{R'}{c_v}}$$

- Και επειδή είναι:

$R = c_p - c_v$ και $\gamma = c_p/c_v$, εύκολα προκύπτει ότι $R/c_v = \gamma - 1$, οπότε η τελευταία σχέση γράφεται ως ακολούθως και αποτελεί την πρώτη ισεντροπική εξίσωση ιδανικού αερίου:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{u_1}{u_2} \right)^{\gamma - 1}$$

Ισεντροπική διεργασία ιδανικού αερίου με σταθερές ειδικές θερμότητες

- Με ανάλογο τρόπο λαμβάνεται και η δεύτερη ισεντροπική εξίσωση του ιδανικού αερίου, από την αντίστοιχη δεύτερη σχέση που είχε αναπτυχθεί για τη μεταβολή της εντροπίας με σταθερές ειδικές θερμότητες:

$$s_2 - s_1 = 0 = c_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R' \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} \Leftrightarrow \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{R'}{c_p} \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} \Leftrightarrow \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{R'}{c_p}} \Leftrightarrow$$
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{R'}{c_p}} \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Ισεντροπική διεργασία ιδανικού αερίου με σταθερές ειδικές θερμότητες

- Τέλος, η τρίτη ισεντροπική εξίσωση του ιδανικού αερίου λαμβάνεται αντικαθιστώντας την τελευταία στην προτελευταία εξίσωση:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Leftrightarrow \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Leftrightarrow \frac{u_1}{u_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Leftrightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{\gamma}$$

- Οι παραπάνω εξισώσεις εκφράζονται κι ως εξής:

$$T \cdot u^{\gamma-1} = \text{σταθερό}$$

$$T \cdot p^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{σταθερό}$$

$$p \cdot u^{\gamma} = \text{σταθερό}$$

- Οι ανωτέρω σχέσεις ισχύουν για ισεντροπικές διεργασίες ιδανικών αερίων με σταθερές ειδικές θερμότητες.

Ισεντροπικές διεργασίες ιδανικού αερίου

- Μεταβλητές ειδικές θερμότητες:

Όταν οι ειδικές θερμότητες *δεν είναι σταθερές*, οι εξισώσεις που αναπτύχθηκαν προηγούμενα δεν παρέχουν ακριβή αποτελέσματα. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε την ακόλουθη εξίσωση που παρέχει την ειδική θερμότητα ως συνάρτηση της θερμοκρασίας:

$$0 = s_2^0 - s_1^0 - R' \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} \Leftrightarrow s_2^0 = s_1^0 + R' \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Ισεντροπικές διεργασίες ιδανικού αερίου

- Σχετική πίεση και σχετικός ειδικός όγκος:

Η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ακριβή υπολογισμό μεταβολής ιδιοτήτων σε ισεντροπικές διεργασίες, αφού λαμβάνει υπόψη τη μεταβολή των ειδικών θερμοτήτων με τη θερμοκρασία.

Επειδή όμως οι υπολογισμοί καθίστανται δυσχερείς όταν αντί για το λόγο πίεσης δίδεται ο λόγος όγκων, εισάγονται δύο αδιάστατα μεγέθη. Το πρώτο προκύπτει από την προηγούμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned} s_2^0 - s_1^0 - R' \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} = 0 &\Leftrightarrow s_2^0 - s_1^0 = R' \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} \Leftrightarrow \frac{s_2^0 - s_1^0}{R'} = \ln \frac{p_2}{p_1} \Leftrightarrow \frac{p_2}{p_1} = e^{\frac{s_2^0 - s_1^0}{R'}} \\ &\Leftrightarrow \frac{p_2}{p_1} = e^{\frac{s_2^0}{R'}} \cdot e^{\frac{-s_1^0}{R'}} \Leftrightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{e^{\frac{s_2^0}{R'}}}{e^{\frac{s_1^0}{R'}}} \end{aligned}$$

Ισεντροπικές διεργασίες ιδανικού αερίου

- Σχετική πίεση και σχετικός ειδικός όγκος:

Η ποσότητα $e^{\frac{s_2^0}{R}}$ ονομάζεται σχετική πίεση, συμβολίζεται με p_r , οπότε καταλήγουμε στη σχέση:

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{s=\text{σταθ.}} = \frac{p_{r2}}{p_{r1}}$$

Η σχετική πίεση είναι αδιάστατο μέγεθος και εξαρτάται αποκλειστικά από τη θερμοκρασία (ως συνάρτηση του s^0).

Συνεπώς οι τιμές της σχετικής πίεσης p_r μπορούν να έχουν τη μορφή πίνακα ως συνάρτηση της θερμοκρασίας.

Ισεντροπικές διεργασίες ιδανικού αερίου

- Σχετική πίεση και σχετικός ειδικός όγκος:

Σε κάποιες περιπτώσεις, αντί του λόγου πίεσης είναι διαθέσιμος ο λόγος ειδικών όγκων, ειδικά στις περιπτώσεις της ανάλυσης των μηχανών εσωτερικής καύσης. Τότε ορίζεται ένα άλλο μέγεθος που σχετίζεται με το λόγο ειδικών όγκων για ισεντροπικές μεταβολές. Χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων έχουμε:

$$\frac{p_1 \cdot v_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot v_2}{T_2} \Leftrightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{p_{r1}}{p_{r2}} \Leftrightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2/p_{r2}}{T_1/p_{r1}}$$

Η ποσότητα T/p_r είναι συνάρτηση μόνο της θερμοκρασίας και ορίζεται ως ο **σχετικός ειδικός όγκος**, συμβολίζεται με v_r , οπότε:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_{r2}}{v_{r1}}$$

Οι εξισώσεις αυτές ισχύουν **αυστηρά** για ισεντροπικές μεταβολές του ιδανικού αερίου. Είναι πιο ακριβείς από τις εξισώσεις τρεις εξισώσεις της ισεντροπικής μεταβολής, διότι λαμβάνουν υπόψη τη μεταβολή των ειδικών θερμοτήτων.

Παράδειγμα 10: σχετική πίεση και σχετικός όγκος

Σε έναν κινητήρα αυτοκινήτου αέρας συμπιέζεται από μία αρχική κατάσταση 22 °C και 95 kPa με αναστρέψιμο και αδιαβατικό τρόπο. Αν ο λόγος συμπίεσης u_1/u_2 του κινητήρα ισούται με 8, υπολογίστε την τελική θερμοκρασία του αέρα.

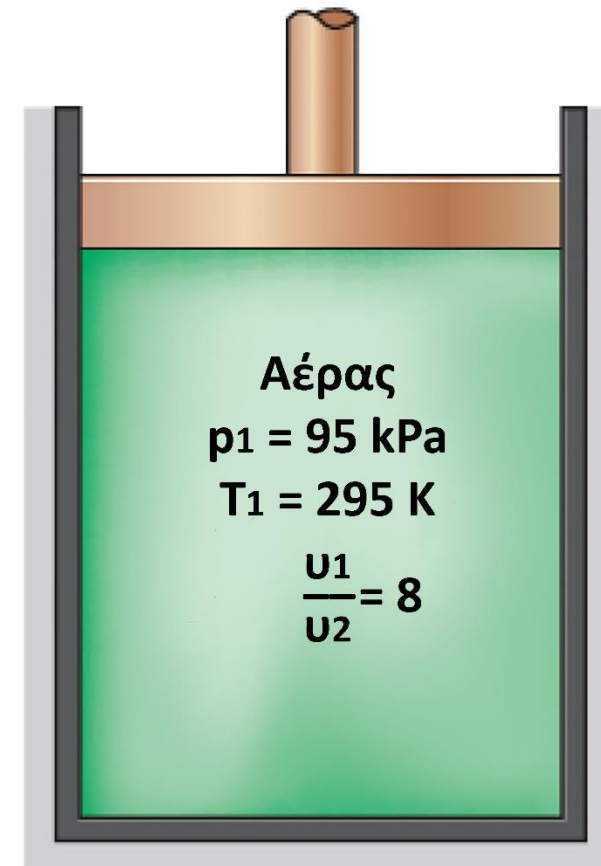
Λύση:

Ο αέρας θα θεωρηθεί ως τέλειο αέριο, συνεπώς, θα ισχύουν οι αντίστοιχες σχέσεις. Η μεταβολή δίνεται ότι είναι αναστρέψιμη και αδιαβατική, συνεπώς είναι και ισεντροπική.

Η τελική θερμοκρασία μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_{r2}}{u_{r1}}$$

Για την αρχική θερμοκρασία $T_1 = 22 \text{ °C} = 295 \text{ K}$, από τον πίνακα ιδιοτήτων αέρα ως ιδανικό αέριο βρίσκουμε $u_{r1} = 647,9$.



Παράδειγμα 10: σχετική πίεση και σχετικός όγκος

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τη σχέση του λόγου των ειδικών όγκων:

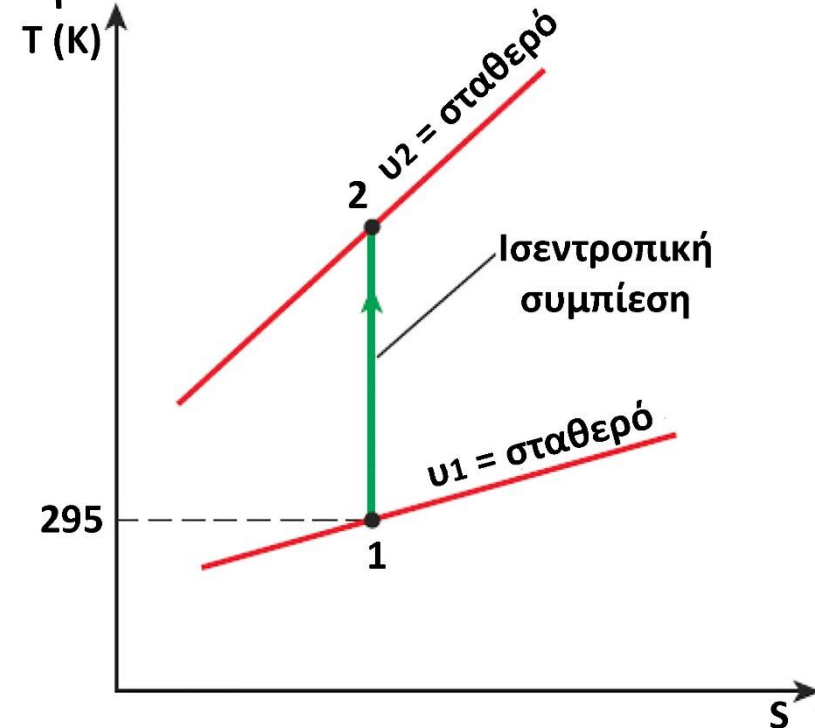
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_{r2}}{v_{r1}} \Leftrightarrow v_{r2} = v_{r1} \cdot \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow v_{r2} = 647,9 \cdot \frac{1}{8} \Leftrightarrow v_{r2} = 80,99$$

Στον πίνακα ιδιοτήτων του αέρα ως ιδανικό αέριο βρίσκουμε:

- για $T_\alpha = 660 \text{ K}$, $v_{r\alpha} = 81,89$
- για $T_\beta = 670 \text{ K}$, $v_{r\beta} = 78,61$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση της γραμμικής παρεμβολής για φθίνουσα συνάρτηση έχουμε:

$$T_2 = T_\alpha + \frac{v_{r2} - v_{r\beta}}{v_{r\alpha} - v_{r\beta}} \cdot (T_\beta - T_\alpha) \Rightarrow T_2 = 660 \text{ K} + \frac{80,99 - 78,61}{81,89 - 78,61} \cdot (670 - 660) \text{ K} \Leftrightarrow T_2 = 667,2 \text{ K} \\ = 394,2 \text{ }^\circ\text{C}$$



Παράδειγμα 10: σχετική πίεση και σχετικός όγκος

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό υποθέτοντας σταθερή ειδική θερμότητα c_p και χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma-1}$$

Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μία μέση τιμή για το λόγο γ των ειδικών θερμοτήτων, η οποία θα πρέπει να αντιστοιχεί στη μέση θερμοκρασία της μεταβολής, δηλαδή στη μέση τιμή των T_1 και T_2 . Όμως η θερμοκρασία T_2 δεν είναι γνωστή, αντιθέτως είναι το ζητούμενο του προβλήματος. Συνεπώς, με αυτή την προσέγγιση θα πρέπει να γίνει μία επαναληπτική διαδικασία με υποθέσεις και επαληθεύσεις.

Υποθέτοντας μία μέση τιμή της διεργασίες στους 450 K, από τον πίνακα ιδιοτήτων του αέρα ως ιδανικό αέριο βρίσκουμε $\gamma=1,391$.

Παράδειγμα 10: σχετική πίεση και σχετικός όγκος

Η θερμοκρασία T_2 τότε υπολογίζεται:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = 295 \text{ K} \cdot (8)^{1,391-1} \Leftrightarrow T_2 = 665,2 \text{ K}$$

Με την ανωτέρω τιμή για την T_2 , η μέση θερμοκρασία της διεργασίας προκύπτει:

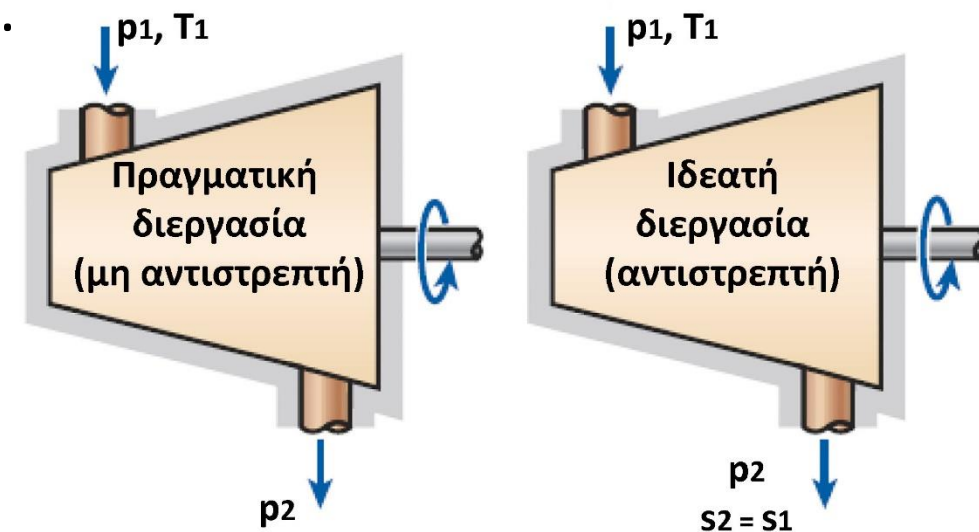
$$T_{\text{avg}} = \frac{T_1 + T_2}{2} \Rightarrow T_{\text{avg}} = \frac{295 + 665,2}{2} \Leftrightarrow T_{\text{avg}} = 480,1 \text{ K}$$

Για τη νέα μέση τιμή, από τον πίνακα ιδιοτήτων του αέρα ως ιδανικό αέριο βρίσκουμε $\gamma = 1,388$, δηλαδή προκύπτει σφάλμα στην τιμή του γ σε σχέση με την αρχική τιμή ίσο με 0,2%. Συνεπώς ο υπολογισμός αυτός με τη συγκεκριμένη προσέγγιση θεωρείται ακριβής.

Το σφάλμα στον υπολογισμό της θερμοκρασίας T_2 υπολογίζεται 0,3%.

Ισεντροπικές αποδόσεις μόνιμων ροών

- Οι πραγματικές διεργασίες, όπως έχει τονιστεί επανειλημμένα, είναι μη αντιστρεπτές και για το λόγο αυτό εμφανίζουν μειωμένη απόδοση σε σχέση με τις αντιστρεπτές.
- Στις επόμενες διαφάνειες θα ασχοληθούμε με **κύκλους** στους οποίους οι αντιστρεπτές διεργασίες χρησιμεύουν ως μέτρο σύγκρισης (μοντέλο) με τους πραγματικούς κύκλους. Το θεωρητικό αυτό, ιδανικό μοντέλο (πλήρως αντιστρεπτό) θέτει και το όριο απόδοσης των πραγματικών κύκλων.
- Ο **ισεντροπικός βαθμός απόδοσης** είναι ένα μέγεθος που εκφράζει ποσοτικά την απόκλιση της πραγματικής διεργασίας από την ιδανική.
- Οι ισεντροπικοί βαθμοί απόδοσης εκφράζονται με διαφορετικό τρόπο, ανάλογα με το είδος της κάθε μηχανής (κάθε μηχανή επιτελεί ένα διαφορετικό σκοπό, π.χ. αντλία-στρόβιλος).



Ισεντροπικές αποδόσεις μόνιμων ροών

Ισεντροπικός βαθμός απόδοσης στροβίλου

- Για έναν στρόβιλο σε **μόνιμη ροή**, οι πιέσεις εισόδου και εξόδου είναι καθορισμένες.
- Η ιδανική διεργασία (εκτόνωση) πραγματοποιείται ισεντροπικά και η **ισεντροπική απόδοση του στροβίλου** ορίζεται ως ο λόγος του πραγματικού έργου που παράγει ως στρόβιλος προς εκείνο που θα παρήγαγε εφόσον η διεργασία μεταξύ της κατάστασης εισόδου και εξόδου πραγματοποιείτο ισεντροπικά.

$$\eta_T = \frac{\text{πραγματικό παραγόμενο έργο}}{\text{ισεντροπικά παραγόμενο έργο}} = \frac{w_a}{w_s}$$

Ισεντροπικές αποδόσεις μόνιμων ροών

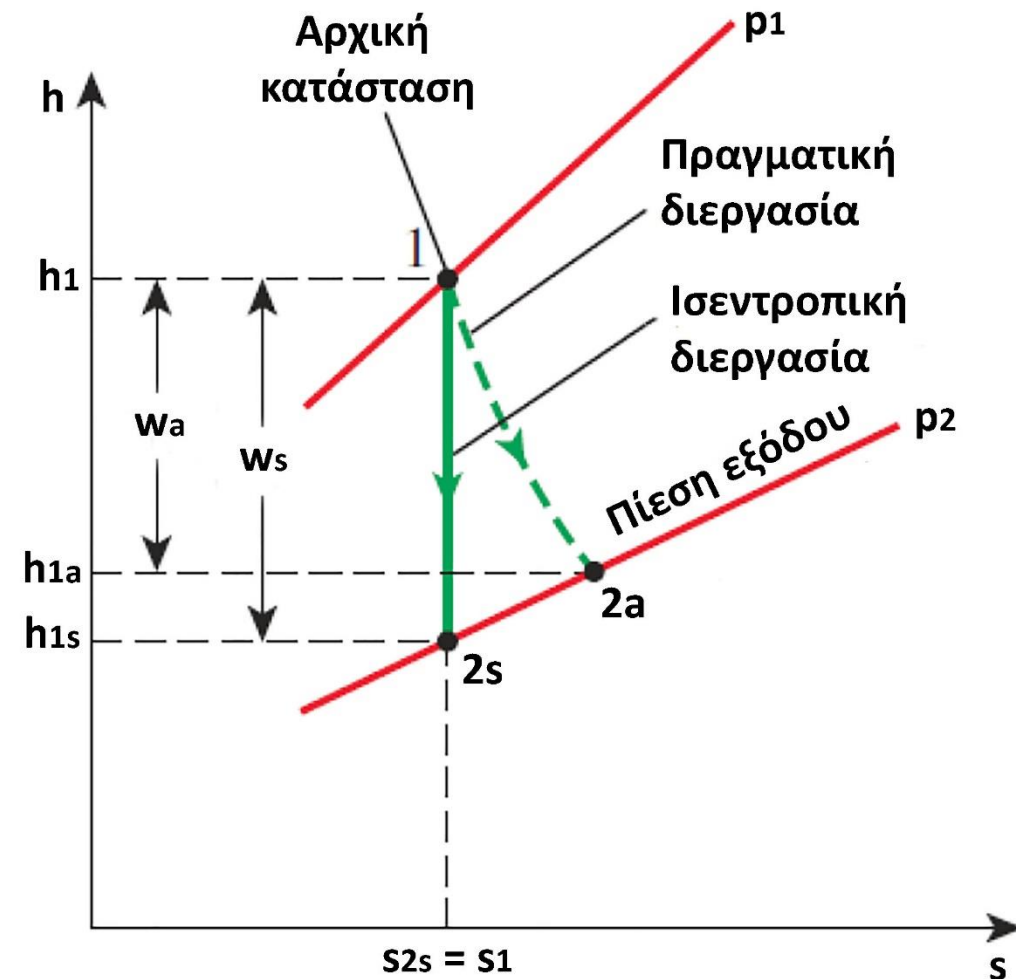
- Επειδή οι παράγοντες της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας είναι μικροί σε σχέση με τη μεταβολή της ενθαλπίας, ισχύει:

$$\eta_T \approx \frac{h_1 - h_{2a}}{h_1 - h_{2s}}$$

Όπου h_{2a} και h_{2s} είναι οι ενθαλπίες στην κατάσταση εξόδου για την πραγματική και ιδανική μεταβολή.

Οι τιμές της ισεντροπικής απόδοσης εξαρτώνται από το σχεδιασμό.

Καλά σχεδιασμένες μηχανές εκτόνωσης (στρόβιλοι, εκτονωτές κλπ) μπορεί να έχουν ισεντροπικό βαθμό απόδοση της τάξης του 90%.



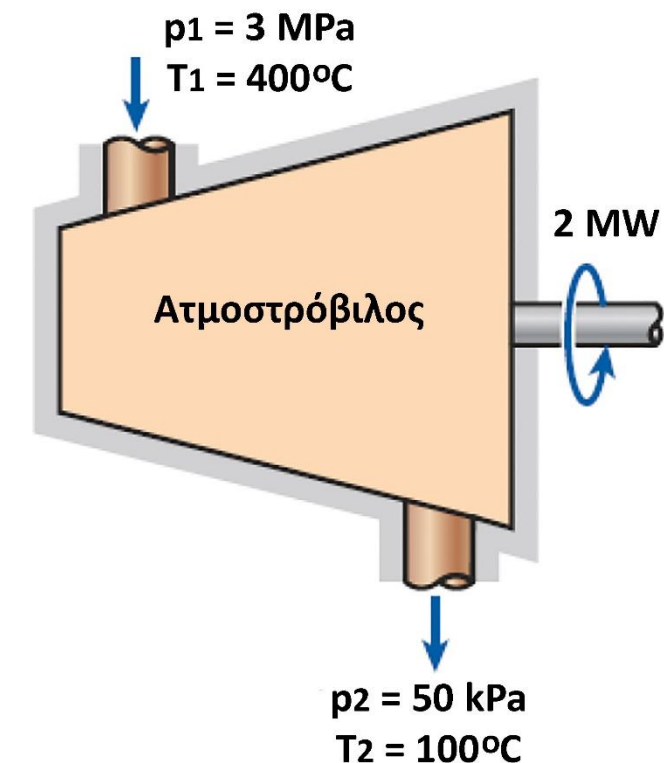
Παράδειγμα 11: Ισεντροπικές αποδόσεις μόνιμων ροών

Ατμός εισάγεται σε αδιαβατικό στρόβιλο υπό μόνιμες συνθήκες πίεσης 3 MPa και θερμοκρασίας 400 °C και εξέρχεται από αυτόν με πίεση 50 kPa και θερμοκρασία 100 °C. Αν η παραγωγή μηχανικής ισχύος από το στρόβιλο ισούται με 2 MW, υπολογίστε: α. τον ισεντροπικό βαθμό απόδοσης του στροβίλου και β. την παροχή μάζας του ατμού που διέρχεται διά μέσω του στροβίλου.

Λύση:

α. Για την κατάσταση εισόδου και εξόδου του ατμού στο στρόβιλο δίνονται δύο μεγέθη, οπότε από τους σχετικούς πίνακες υπέρθερμου ατμού βρίσκουμε:

- για την είσοδο ($p_1 = 3 \text{ MPa}$, $T_1 = 400 \text{ °C}$):
 $h_1 = 3.231,7 \text{ kJ/kg}$, $s_1 = 6,9235 \text{ (kJ/kg}\cdot\text{K)}$
- για την έξοδο ($p_2 = 50 \text{ kPa}$, $T_2 = 100 \text{ °C}$):
 $h_2 = 2.682,4 \text{ kJ/kg}$



Παράδειγμα 11: Ισεντροπικές αποδόσεις μόνιμων ροών

t_s , °C	0.05 MPa ($t_s = 81.317$ °C)			
	v	ρ	h	s
$t_s(L)$	1.029 93	970.94	340.54	1.0912
$t_s(V)$	3240.0	0.308 64	2645.2	7.5930
0	1.000 18	999.82	0.01	-0.000 15
5	1.000 06	999.94	21.07	0.076 25
10	1.000 32	999.68	42.07	0.151 08
15	1.000 92	999.08	63.03	0.224 46
20	1.001 82	998.18	83.96	0.296 47
25	1.002 98	997.02	104.87	0.367 21
30	1.004 39	995.63	125.78	0.436 74
35	1.006 03	994.01	146.67	0.505 11
40	1.007 87	992.19	167.57	0.572 39
45	1.009 91	990.19	188.47	0.638 60
50	1.012 13	988.01	209.37	0.703 79
55	1.014 54	985.67	230.29	0.768 01
60	1.017 11	983.17	251.21	0.831 28
65	1.019 86	980.53	272.14	0.893 64
70	1.022 76	977.74	293.08	0.955 12
75	1.025 83	974.82	314.04	1.0158
80	1.029 05	971.77	335.01	1.0756
85	3275.4	0.305 30	2652.6	7.6138
90	3323.3	0.300 90	2662.6	7.6415
95	3371.1	0.296 64	2672.5	7.6686
100	3418.7	0.292 51	2682.4	7.6953

t_s , °C	5.0 MPa ($t_s = 263.941$ °C)			
	v	ρ	h	s
300	45.346	22.053	2925.7	6.2110
310	46.766	21.383	2956.6	6.2646
320	48.130	20.777	2986.2	6.3149
330	49.446	20.224	3014.7	6.3626
340	50.724	19.714	3042.4	6.4080
350	51.969	19.242	3069.3	6.4516
360	53.186	18.802	3095.6	6.4935
370	54.378	18.390	3121.5	6.5340
380	55.549	18.002	3146.9	6.5732
390	56.702	17.636	3171.9	6.6112
400	57.837	17.290	3196.7	6.6483
410	58.958	16.961	3221.2	6.6844
420	60.066	16.648	3245.4	6.7196
430	61.162	16.350	3269.5	6.7541
440	62.248	16.065	3293.4	6.7879

Παράδειγμα 11: Ισεντροπικές αποδόσεις μόνιμων ροών

Για να βρούμε τον ισεντροπικό βαθμό απόδοσης της διεργασίας, χρειαζόμαστε με βάση τη σχέση ορισμού του, τις ειδικές ενθαλπίες h_1 , h_2 και h_{2s} .

Η ειδική ενθαλία εξόδου του ατμού h_{2s} καθορίζεται από το δεδομένο ότι κατά την ισεντροπική μεταβολή 1-2s η εντροπία του ατμού πρέπει να παραμένει σταθερή: $s_{2s} = s_1$.

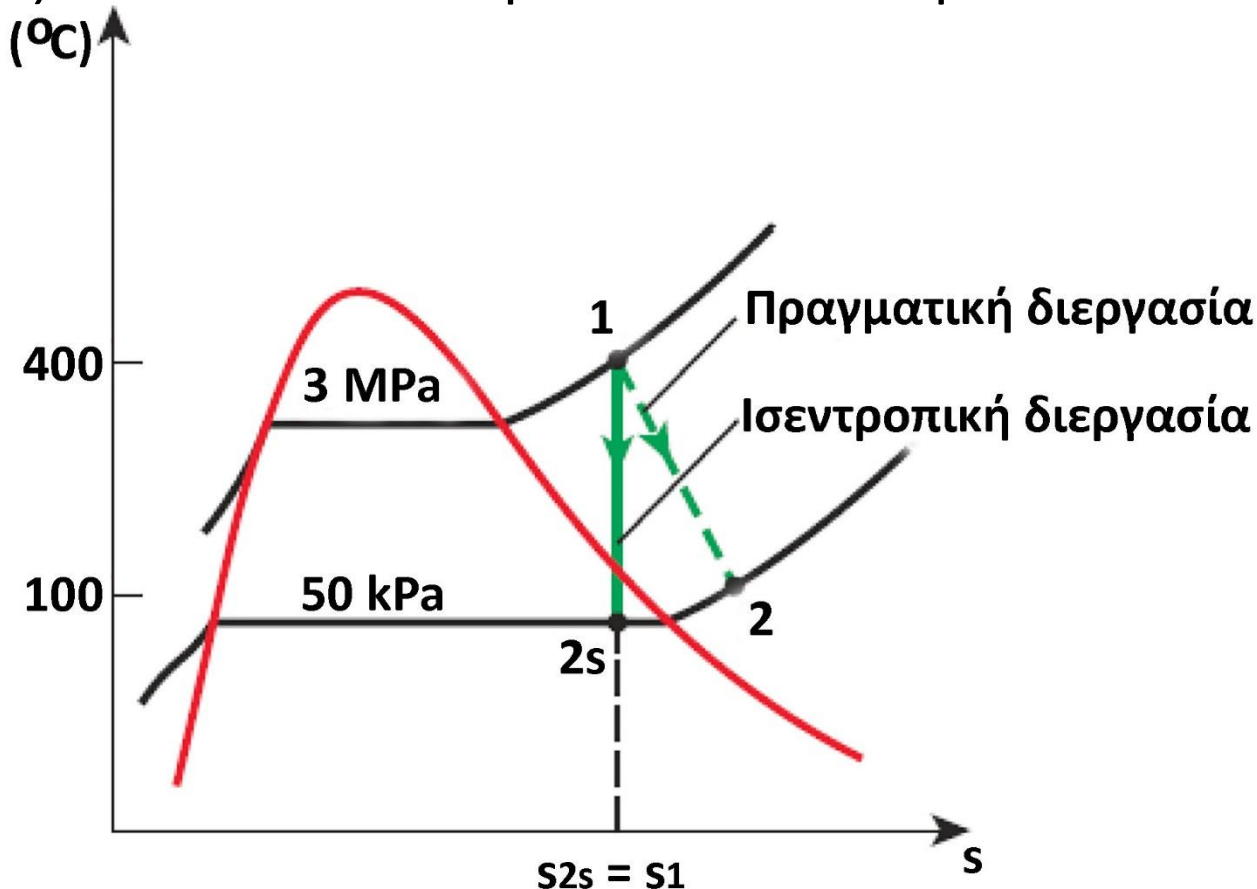
Για την πίεση των 50 kPa, από τους πίνακες κορεσμένου ατμού βρίσκουμε:

$$s_f = 1,0912 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}, s_g = 7,5931 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$$

$$\text{Καθώς } s_{2s} = s_1 = 6,9235 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K},$$

$$\text{έχουμε: } s_f < s_{2s} < s_g,$$

κατά την ισεντροπική εκτόνωση ο ατμός εξέρχεται στη διφασική περιοχή, με τις δύο φάσεις του να βρίσκονται σε κατάσταση κορεσμού (όπως στο σχήμα).



Παράδειγμα 11: Ισεντροπικές αποδόσεις μόνιμων ροών

Η ξηρότητα του ατμού στην έξοδό του κατά την ισεντροπική εκτόνωση ισούται με:

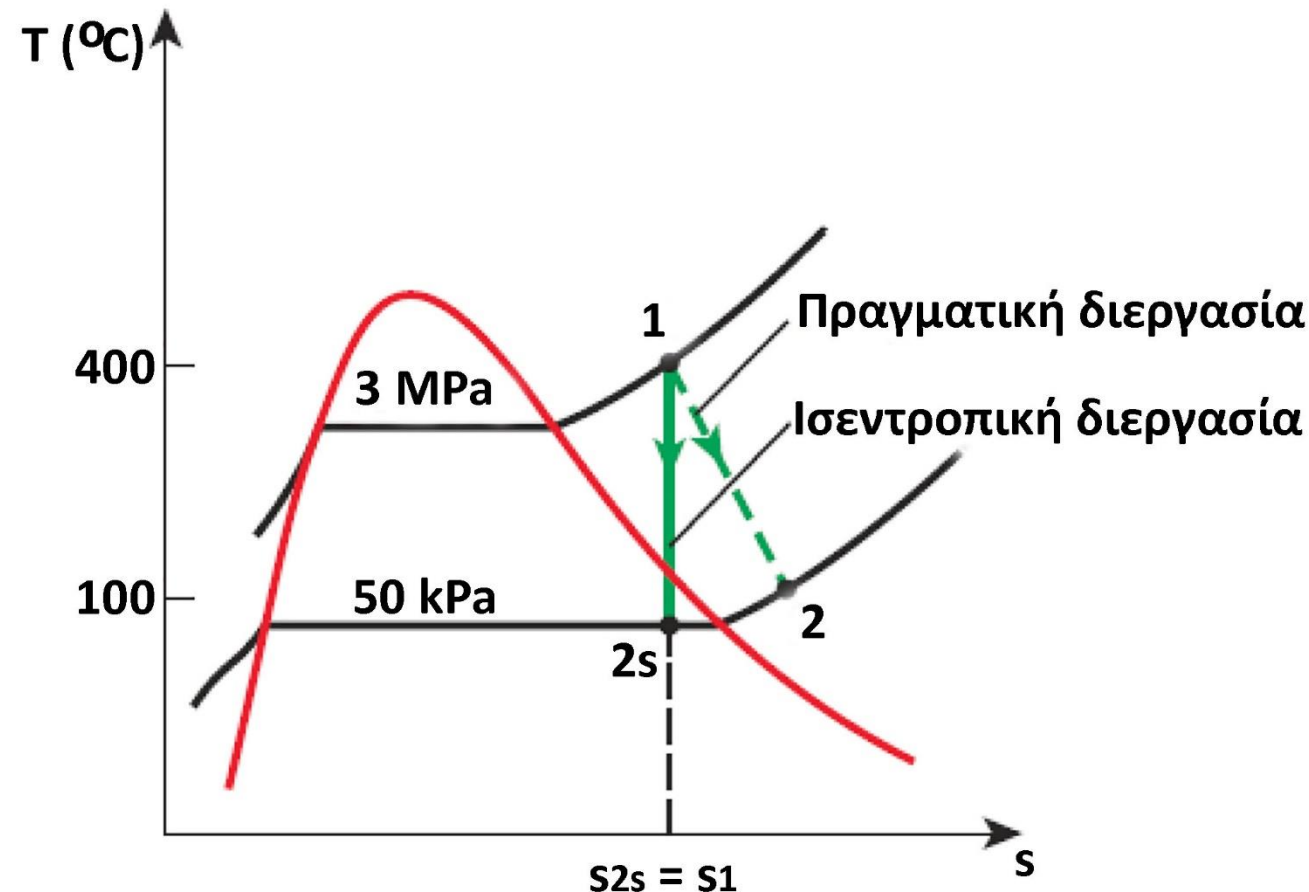
$$x = \frac{s_{2s} - s_f}{s_g - s_f} \Rightarrow x = \frac{6,9235 - 1,0912}{7,5931 - 1,0912} \Leftrightarrow x = 0,897$$

$$s_f = 1,0912 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}, s_g = 7,5931 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$$

Για τα 50 kPa, από τους πίνακες κορεσμένου ατμού, επίσης βρίσκουμε:

$$h_f = 340,54 \text{ kJ/kg}, h_g = 2.645,2 \text{ kJ/kg}$$

και $h_{fg} = 2.304,7 \text{ kJ/kg}$.



Παράδειγμα 11: Ισεντροπικές αποδόσεις μόνιμων ροών

Η ειδική ενθαλπία του ατμού h_{2s} κατά την έξοδό του από την ισεντροπική διεργασία ισούται με:

$$h_{2s} = h_f + x \cdot h_{fg} \Rightarrow h_{2s} = 340,54 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} + 0,897 \cdot 2.304,7 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \Leftrightarrow h_{2s} = 2.407,9 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Πλέον ο ισεντροπικός βαθμός απόδοσης της διεργασίας μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της σχέσης ορισμού του:

$$\eta_T = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2s}} \Rightarrow \eta_T = \frac{3.231,7 - 2.682,4}{3.231,7 - 2.407,9} \Leftrightarrow \eta_T = 66,7\%$$

β. Αγνοώντας την κινητική και τη δυναμική ενέργεια του ατμού, η παροχή μάζας του κατά τη διέλευσή του από το στρόβιλο υπολογίζεται με απλό ισολογισμό ισχύος:

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \Rightarrow \dot{m} \cdot h_1 = \dot{m} \cdot h_2 + \dot{W} \Leftrightarrow \dot{m} = \frac{\dot{W}}{h_1 - h_2} \Rightarrow \dot{m} = \frac{2.000 \text{ kW}}{(3.231,7 - 2.682,4) \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}} \\ \Leftrightarrow \dot{m} = 3,64 \text{ kg/s}$$

Ισεντροπικές αποδόσεις μόνιμων ροών

Ισεντροπικός βαθμός απόδοσης συμπιεστή:

- Η **ισεντροπική απόδοση του συμπιεστή** ορίζεται ως ο λόγος του ισεντροπικού έργου που θα απορροφούσε ο συμπιεστής για την αύξηση της πίεσης του αερίου προς το πραγματικό έργο που απορροφά.

$$\eta_C = \frac{\text{ισεντροπικά απορροφούμενο έργο}}{\text{πραγματικά απορροφούμενο έργο}} = \frac{w_s}{w_a}$$

- Το w_a είναι μεγαλύτερο του w_s γι' αυτό και συνεπώς ο ισεντροπικός βαθμός απόδοσης είναι μικρότερος της μονάδας.
- Αντίστοιχα με αυτά που ειπώθηκαν για τους στροβίλους έχουμε:

$$\eta_C = \frac{h_{2s} - h_1}{h_{2a} - h_1}$$

Ισεντροπικές αποδόσεις μόνιμων ροών

Ισεντροπικός βαθμός απόδοσης αντλίας:

- Σε μια αντλία (όπου ο ειδικός όγκος μπορεί να θεωρηθεί σταθερός) ισχύει:

$$\eta_p = \frac{w_s}{w_a} = \frac{u \cdot (p_2 - p_1)}{h_{2a} - h_1}$$



Η εντροπία του κύκλου Carnot

Η εντροπία του κύκλου Carnot

- Θεωρούμε τον κύκλο Carnot του σχήματος. Η μεταβολή της εντροπίας για όλο τον κύκλο είναι:

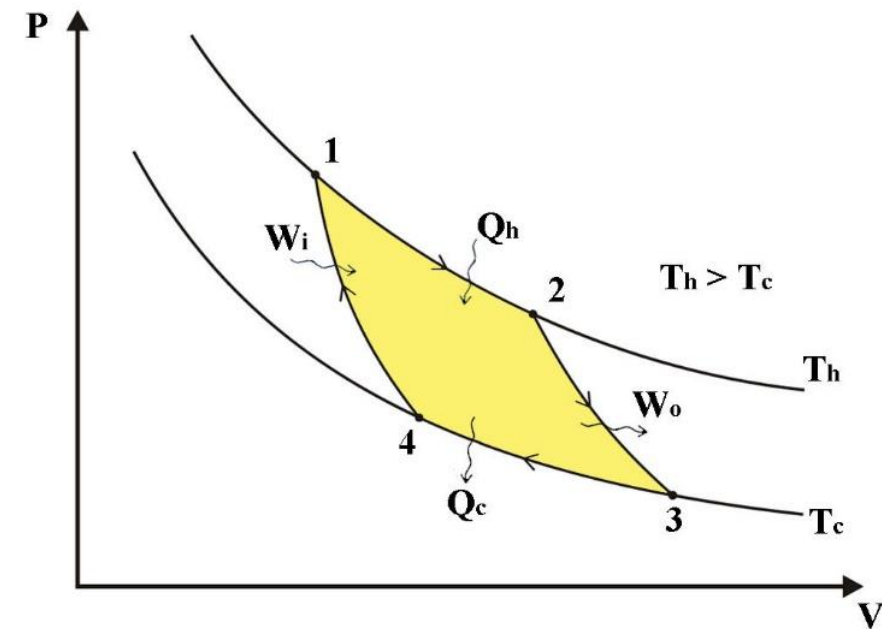
$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} \quad \text{ή}$$

$$\Delta S = \frac{Q_h}{T_h} + 0 + \frac{Q_c}{T_c} + 0 \Leftrightarrow \Delta S = \frac{Q_h}{T_h} + \frac{Q_c}{T_c} \Leftrightarrow \Delta S = \frac{Q_h}{T_h} - \frac{|Q_c|}{T_c}$$

- Όμως, γνωρίζουμε ότι:

$$\dot{Q}_h = \dot{m} \cdot R' \cdot T_h \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \Leftrightarrow \frac{Q_h}{T_h} = \dot{m} \cdot R' \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\dot{Q}_c = -\dot{m} \cdot R' \cdot T_c \cdot \ln \frac{V_3}{V_4} \Leftrightarrow \frac{|Q_c|}{T_c} = \dot{m} \cdot R' \cdot \ln \frac{V_3}{V_4}$$



Η εντροπία του κύκλου Carnot

- Διαιρώντας τις ανωτέρω δύο σχέσεις κατά μέλη, έχουμε:

$$\frac{\frac{Q_h}{T_h}}{\frac{|Q_c|}{T_c}} = \frac{\ln \frac{V_2}{V_1}}{\ln \frac{V_3}{V_4}}$$

- Όμως από τις σχέσεις της αδιαβατικής μεταβολής έχουμε:

$$\frac{T_h}{T_c} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad \text{και} \quad \frac{T_h}{T_c} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

Άρα:

$$\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1} \Leftrightarrow \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$$

Η εντροπία του κύκλου Carnot

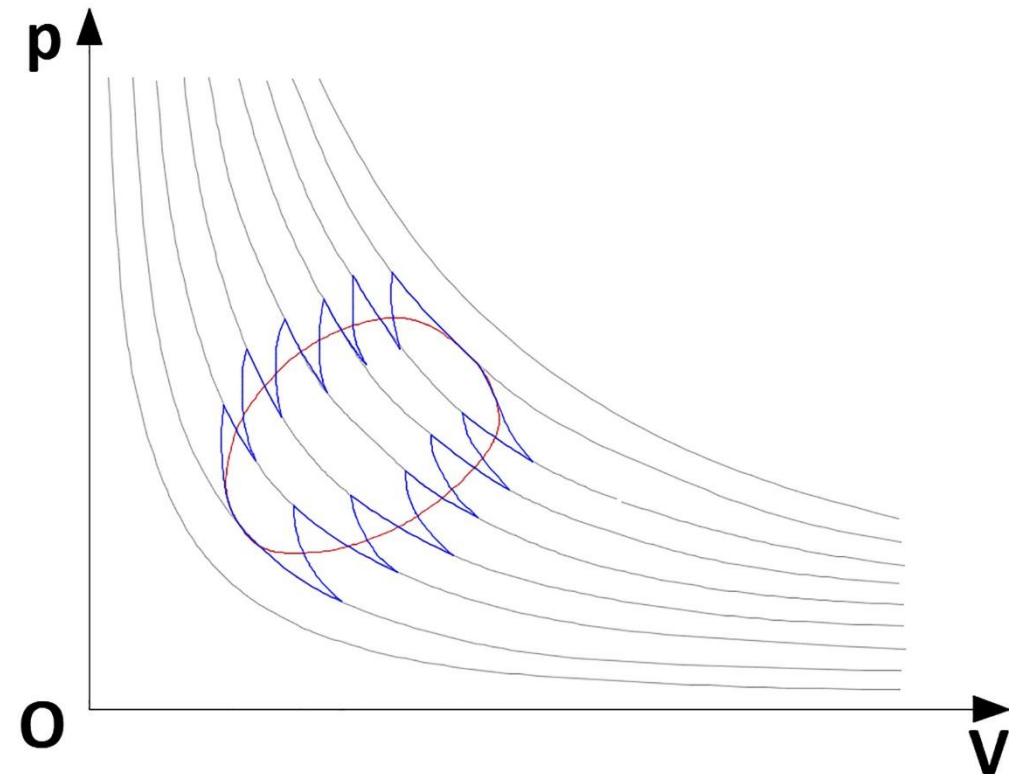
- Από τα ανωτέρω καταλήγουμε στο ότι:

$$\frac{Q_h}{T_h} = \frac{|Q_c|}{T_c}$$

άρα $\Delta S = 0$.

Η εντροπία κυκλικής αναστρέψιμης μεταβολής

- Μια ποσότητα ιδανικού αερίου εκτελεί την κυκλική μεταβολή, που σχεδιάστηκε με κόκκινο χρώμα στο σχήμα.
- Η κυκλική μεταβολή προσεγγίζεται από τη μεταβολή με το μπλε χρώμα, η οποία δημιουργείται από ένα μεγάλο πλήθος κύκλων Carnot.
- Η προσέγγιση είναι τόσο καλύτερη, όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των κύκλων Carnot.
- Για κάθε κύκλο Carnot είναι $\Delta S = 0$ άρα θα είναι $\Delta S = 0$ και για την κυκλική μεταβολή.
- Συνεπώς, για οποιαδήποτε κυκλική αντιστρεπτή διεργασία, η μεταβολή της εντροπίας είναι μηδέν.

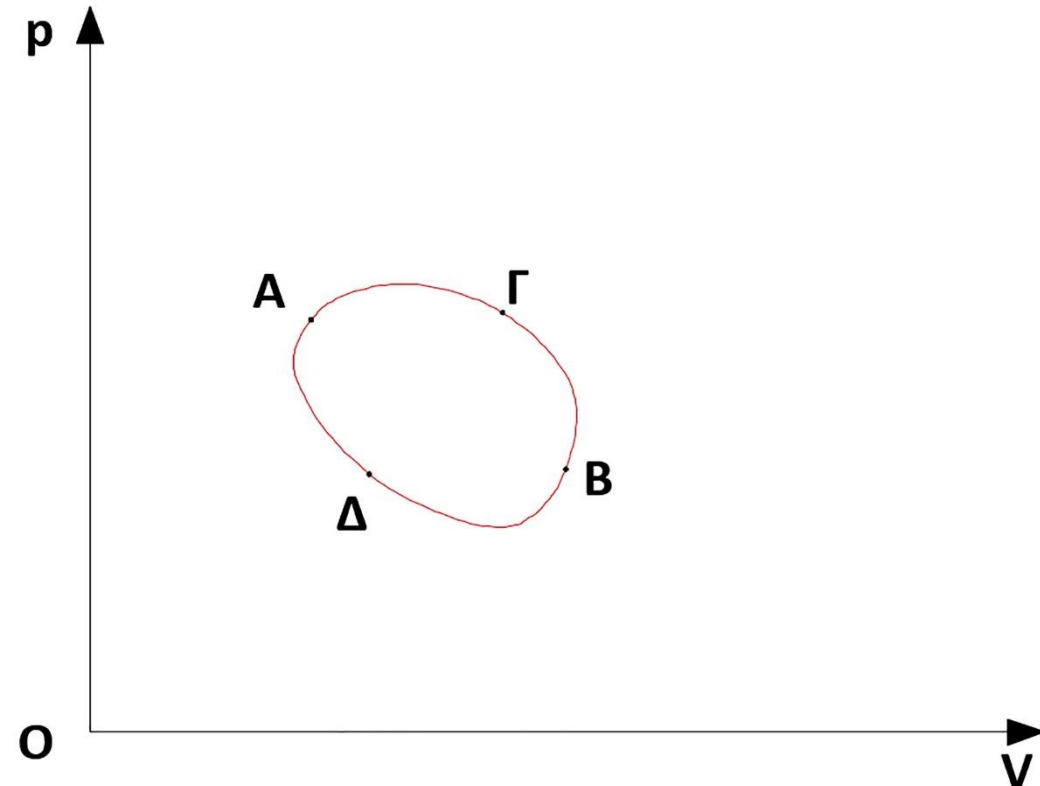


Η μεταβολή της εντροπίας ανεξάρτητη της διαδρομής

- Θεωρούμε τις μεταβολές ΑΓΒ και ΑΔΒ μιας ποσότητας ιδανικού αερίου από την κατάσταση Α στην κατάσταση Β.
- Σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω ισχύει

$$\Delta S_{ΑΓΒ} + \Delta S_{ΒΔΑ} = 0 \text{ ή } \Delta S_{ΑΓΒ} - \Delta S_{ΑΔΒ} = 0 \text{ ή } \Delta S_{ΑΓΒ} = \Delta S_{ΑΔΒ}$$

- Δηλαδή, κατά την μετάβαση ενός συστήματος από μια κατάσταση Α σε μια κατάσταση Β, η μεταβολή της εντροπίας του συστήματος εξαρτάται από τις καταστάσεις Α και Β, αλλά δεν εξαρτάται από τον τρόπο μετάβασης απ' τη μια κατάσταση στην άλλη.
- Με τη βοήθεια της τελευταίας πρότασης μπορούμε να υπολογίζουμε τη μεταβολή της εντροπίας και σε μη αντιστρεπτές διεργασίες, αρκεί να ξεκινούν και να καταλήγουν σε καταστάσεις θερμοδυναμικής ισορροπίας.

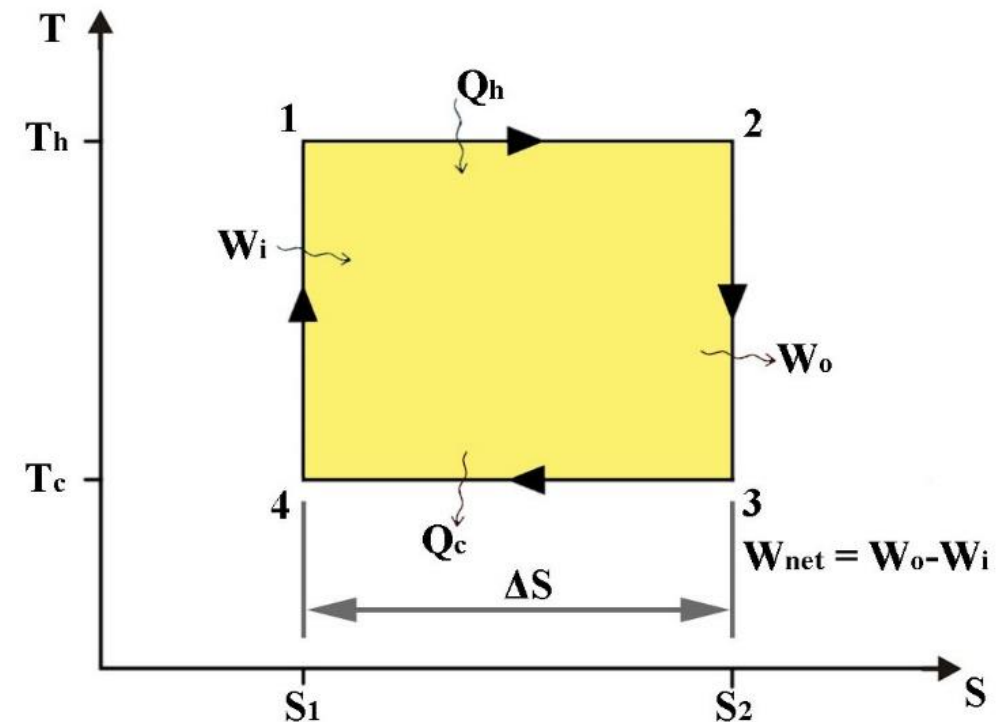


Παράδειγμα 13: κύκλος Carnot και εντροπία

Να παρασταθεί γραφικά ο κύκλος Carnot σε διάγραμμα θερμοκρασίας – εντροπίας. Τι παριστάνει το εμβαδό του χωρίου της γραφικής παράστασης που προκύπτει;

Λύση:

Ο κύκλος του Carnot θα έχει σε διάγραμμα $T-S$ τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα. Η μορφή αυτή δικαιολογείται από το γεγονός ότι κατά τις ισοθερμοκρασιακές μεταβολές 1-2 και 3-4 η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή, ενώ κατά τις αδιαβατικές μεταβολές 2-3 και 4-1 η εντροπία παραμένει σταθερή.



Παράδειγμα 13: κύκλος Carnot και εντροπία

Προφανώς, το εμβαδό του χωρίου (1-2- S_2 - S_1) παριστάνει το ποσό θερμότητας Q_h που λαμβάνει το αέριο από τη θερμή δεξαμενή κατά την ισόθερμη εκτόνωση 1-2, αφού:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q_h}{T_h} \Leftrightarrow Q_h = T_h \cdot (S_2 - S_1)$$

Όμοια, το εμβαδό του χωρίου (3-4- S_1 - S_2) παριστάνει το ποσό θερμότητας Q_c που αποδίδει το αέριο στην ψυχρή δεξαμενή κατά την ισοθερμοκρασιακή συμπίεση 3-4.

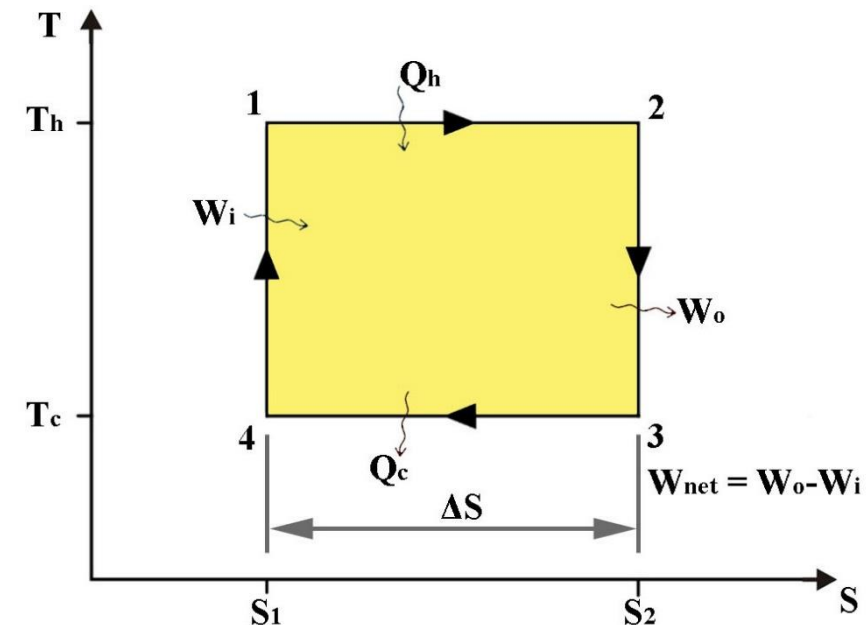
Επομένως, η θερμότητα: $Q_h - |Q_c| = W$

παριστάνεται από το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου (1-2-3-4).

Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot:

$$\eta_c = \frac{Q_h - |Q_c|}{Q_h}$$

θα δίνεται από το πηλίκο του εμβαδού (1-2-3-4) δια του εμβαδού 1-2- S_2 - S_1 .



Παράδειγμα 14: εντροπία τυχαίας μεταβολής

Ποσότητα ύλης n (σε mol) ιδανικού αερίου μεταβαίνει από την κατάσταση A (p_1, V_1, T_1) στην κατάσταση B (p_2, V_2, T_2).

α. Αναπτύξτε τη γενική σχέση που θα δίνει τη μεταβολή της εντροπίας κατά τη μεταβολή αυτή.

β. Ποια μορφή παίρνει η σχέση αυτή αν η μεταβολή A-B είναι (i) ισόχωρη ή (ii) ισοβαρής;

Λύση:

α. Επειδή η μεταβολή της εντροπίας δεν εξαρτάται από τον τρόπο που θα οδηγηθούμε από την κατάσταση A στην κατάσταση B, επινοούμε εμείς μια διαδικασία.

Υποθέτουμε ότι το αέριο αρχικά εκτονώνεται ισοθερμοκρασιακά από την κατάσταση A (p_1, V_1, T_1) στην κατάσταση Γ (p_Γ, V_Γ, T_1) και στη συνέχεια μεταβαίνει αδιαβατικά στην κατάσταση B (p_2, V_2, T_2).

Παράδειγμα 14: εντροπία τυχαίας μεταβολής

Η συνολική μεταβολή της εντροπίας ισούται με:

$$\Delta S = \Delta S_{A\Gamma} + \Delta S_{\Gamma B}$$

Όμως η μεταβολή Γ-B έχει υποτεθεί ότι είναι αδιαβατική, οπότε $\Delta S_{\Gamma B} = 0$.

Για ισοθερμοκρασιακή μεταβολή ισχύει:

$$\Delta S_{A\Gamma} = \frac{Q}{T_1} = \frac{n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_{\Gamma}}{V_1}}{T_1} \Leftrightarrow \Delta S_{A\Gamma} = \Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_{\Gamma}}{V_1}$$

Για την αδιαβατική μεταβολή Γ-B έχουμε:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_{\Gamma}} \right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow V_{\Gamma} = V_2 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

Παράδειγμα 14: εντροπία τυχαίας μεταβολής

Με αντικατάσταση του όγκου V_f στην προηγούμενη σχέση έχουμε:

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_f}{V_1} = n \cdot R \cdot \ln \left[\frac{V_2}{V_1} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)} \right]$$

Εφαρμόζοντας τις βασικές ταυτότητες λογαρίθμων στην ανωτέρω σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta S = n \cdot R \cdot \ln \left[\frac{V_2}{V_1} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)} \right] &\Leftrightarrow \Delta S = n \cdot R \cdot \left[\ln \frac{V_2}{V_1} + \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)} \right] \\ &\Leftrightarrow \Delta S = n \cdot R \cdot \left[\ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \right] \end{aligned}$$

Παράδειγμα 14: εντροπία τυχαίας μεταβολής

β(i). Αν η μεταβολή είναι ισόχωρη, τότε $V_2 = V_1$ και $\ln(V_2/V_1)=0$, οπότε η ανωτέρω σχέση γίνεται:

$$\Leftrightarrow \Delta S = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

και επειδή:

$$c_V = \frac{R}{\gamma - 1}$$

η τελευταία σχέση γίνεται τελικά:

$$\Delta S = n \cdot c_V \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Παράδειγμα 14: εντροπία τυχαίας μεταβολής

β(ii). Αν η μεταβολή είναι ισοβαρής, τότε:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Η αρχική σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} \Delta S &= n \cdot R \cdot \left[\ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \right] \Leftrightarrow \Delta S = n \cdot R \cdot \left[\ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{1}{\gamma-1} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \right] \Leftrightarrow \\ \Delta S &= n \cdot R \cdot \left[\ln \frac{T_2}{T_1} + \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)} \right] \Leftrightarrow \Delta S = n \cdot R \cdot \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)} \right] \\ \Leftrightarrow \Delta S &= n \cdot R \cdot \ln \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \right] \Leftrightarrow \Delta S = \frac{n \cdot R \cdot \gamma}{\gamma-1} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \Leftrightarrow \Delta S = n \cdot c_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \end{aligned}$$

επειδή ισχύει:

$$c_p = R \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1}$$



Η εντροπία και ο δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος

Μεταβολή εντροπίας σε μη αντιστρεπτές διεργασίες

- Σε μια αντιστρεπτή μεταβολή π.χ. μια ισοθερμοκρασιακή εκτόνωση ιδανικού αέριου, η μεταβολή της εντροπίας του αερίου είναι:

$$\Delta S_1 = Q/T$$

ενώ του περιβάλλοντος είναι:

$$\Delta S_2 = -Q/T,$$

καθότι η θερμότητα Q μεταφέρεται από το περιβάλλον στο αέριο. Η μεταβολή της εντροπίας του αερίου και του περιβάλλοντος συνολικά είναι μηδέν.

- Αυτό δεν μπορεί να συμβεί σε μια φυσική διεργασία, η οποία είναι πάντα μη αντιστρεπτή.
- Είδαμε, για παράδειγμα, στην ελεύθερη εκτόνωση (μη αντιστρεπτή μεταβολή) ότι για το αέριο είναι $\Delta S_1 > 0$, ενώ για το περιβάλλον, επειδή έχουμε θερμομονωτικά τοιχώματα, είναι $\Delta S_2 = 0$. Συνολικά λοιπόν για το αέριο και το περιβάλλον έχουμε αύξηση της εντροπίας.

Μεταβολή εντροπίας σε μη αντιστρεπτές διεργασίες

- Στο ίδιο συμπέρασμα οδηγούμαστε θεωρώντας την ανταλλαγή μικρού ποσού θερμότητας ΔQ μεταξύ δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 που έχουν θερμοκρασίες T_1 και T_2 με $T_1 > T_2$ ($T_1 - T_2$ πεπερασμένο) και είναι απομονωμένα από το περιβάλλον τους.
- Το ποσό θερμότητας ΔQ θα μεταφερθεί από το Σ_1 στο Σ_2 . Θεωρώντας ότι πρακτικά οι θερμοκρασίες T_1 και T_2 δεν θα μεταβληθούν έχουμε για το σώμα Σ_1 :

$$\Delta S_1 = \Delta Q / T_1$$

και για το Σ_2 :

$$\Delta S_2 = \Delta Q / T_2$$

- Άρα για το σύστημα των σωμάτων θα είναι:

$$\Delta S = \Delta S_2 - \Delta S_1 = \frac{\Delta Q}{T_2} - \frac{\Delta Q}{T_1}$$

Μεταβολή εντροπίας σε μη αντιστρεπτές διεργασίες

- Μπορούμε και αντίστροφα, ξεκινώντας από την υπόθεση $\Delta S > 0$ να καταλήξουμε ότι η θερμότητα ΔQ θα μεταφερθεί από το Σ_1 στο Σ_2 .
- Αν δεν ίσχυε ο δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος και η μεταφορά θερμότητας γινόταν αυθόρμητα από το Σ_2 προς το Σ_1 θα είχαμε $\Delta S < 0$.
- Συνεπώς ο δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος διατυπώνεται και με τη βοήθεια της εντροπίας ως εξής:

Δεν είναι δυνατόν σε μια φυσική μεταβολή να μειωθεί η ολική εντροπία όλων των συστημάτων που παίρνουν μέρος σ' αυτή τη μεταβολή



Σας ευχαριστώ πολύ
για την προσοχή σας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Δημήτρης Αλ. Κατσαπρακάκης