Τυχαίες μεταβλητές ΙΙ

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Ας θεωρήσουμε το πείραμα ρήψης ενός τίμιου ζαριού και την τυχαία μεταβλητή Χ η οποία παίρνει την τιμή 1 όταν το αποτέλεσμα είναι ≥5 και την τιμή 0 όταν αυτό είναι <5. Τότε

$$\{X=1\}=\{5,6\} \quad \text{και} \quad \{X=0\}=\{1,2,3,4\}$$

και συνεπώς

$$P(X=1)=2/6 \quad \text{και} \quad P(X=0)=4/6.$$

Οι αριθμοί (P(X=1), P(X=0)) ονομάζονται **κατανομή** της τυχαίας μεταβλητής Χ.

Μπορούμε γενικά να ορίσουμε μια συνάρτηση η οποία σε κάθε αριθμό **α** θα αντιστοιχεί την πιθανότητα P(X=**α**). Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** της τυχαίας μεταβλητής Χ και συμβολίζεται με f_X.

$f_X(1)=P(X=1)=2/6$

$f_X(0)=P(X=0)=4/6$

$f_X(2)=P(X=2)=P(\emptyset)=0$

$f_X(\sqrt{2})=P(X=\sqrt{2})=P(\emptyset)=0$

Σε μία κάλπη έχουμε 10 μαύρες και 15 άσπρες μπάλες. Τραβάμε μία μπάλα στην τύχη και θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει την τιμή 1 όταν η μπάλα είναι μαύρη και την τιμή 0 όταν είναι άσπρη,

$$X(M)=1 \quad \text{και} \quad X(A)=0.$$

Ποιες είναι οι τιμές που παίρνει η συνάρτηση πυκνότητας f_X;

Ας πάρουμε τώρα μια άλλη τυχαία μεταβλητή Y η οποία παίρνει την τιμή $\sqrt{2}$ όταν η μπάλα είναι μαύρη και $-\sqrt{2}$ όταν η μπάλα είναι άσπρη.

Ποιες είναι τώρα οι τιμές που παίρνει η συνάρτηση πυκνότητας f_X;

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Ας θεωρήσουμε το πείραμα μέτρησης του ύψους ενός τυχαίου Έλληνα και την τυχαία μεταβλητή X η οποία «μετράει» το ύψος σε cm. Η X είναι συνεχής και μπορεί να πάρει τιμές μέσα σε ένα διάστημα ας πούμε [50,250]. Όπως έχουμε εξηγήσει για κάθε ύψος α σε αυτό το διάστημα, ας πούμε α=180 θα πρέπει να ισχύει

$$P(X=180)=0.$$

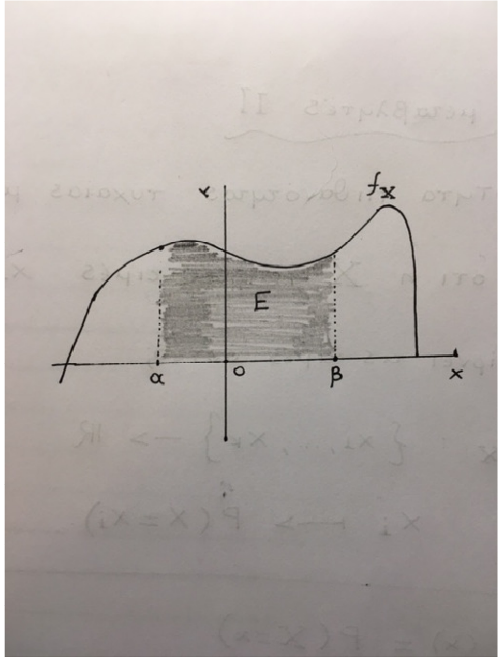
Οπότε εδώ μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όπως πριν δεν έχει κάποια χρησιμότητα, γιατί είναι μηδέν σε κάθε σημείο του διαστήματος [50,250].

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μια συνάρτηση η οποία έχει τις εξής ιδιότητες:

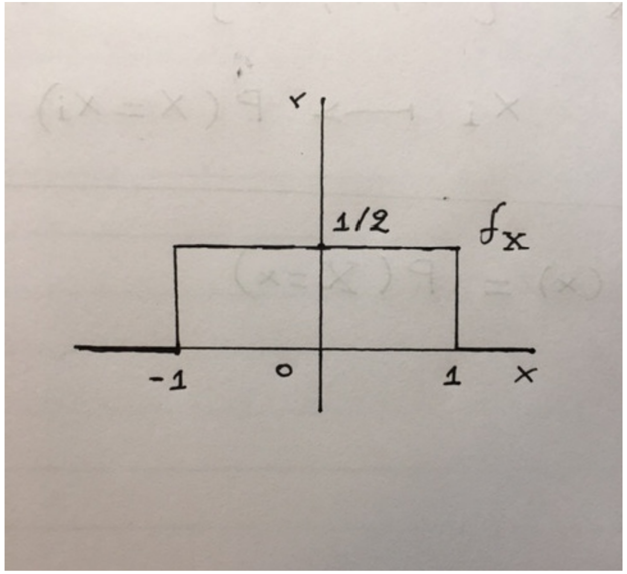
1. $P(\alpha \leq X \leq \beta)$=Εμβαδόν κάτω από το γράφημα της συνάρτησης αυτής

2. Το συνολικό εμβαδόν κάτω από το γράφημα της είναι ίσο με 1.

Η συνάρτηση αυτή συμβολίζεται πάλι με f_X και ονομάζεται **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** της X.



Όταν μία συνεχής μεταβλητή X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή σε κάποιο διάστημα, ας πούμε το [-1,1], τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_X έχει την μορφή της εικόνας.



Αν είναι γνωστή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε πιθανότητα.

$P(-1 \leq X \leq 1/2)=$

$P(0 \leq X \leq 1/2)=$

$P(X \leq 0)=$

$P(X \geq -1/2)=$

$P(X \leq 1/3$ ή $X \geq -1/2)=$

$P(X \geq -1)=$

$P(X \geq 1)=$

$P(X+1 \geq 1/2)=$

Μέση τιμή διακριτής τυχαίας μεταβλητής

Ας θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή Χ με σύνολο τιμών $\{x_1, x_2, ..., x_\kappa\}$. Τότε ορίζουμε την μέση τιμή ΕΧ της Χ ως τον αριθμό

$$E\mathrm{X} = x_1 \cdot P(\mathrm{X} = x_1) + x_2 \cdot P(\mathrm{X} = x_2) + ... + x_\kappa \cdot P(\mathrm{X} = x_\kappa)$$

Παρατηρήστε ότι η ΕΧ προκύπτει αν προσθέσουμε όλες τις τιμές που παίρνει η Χ, «ζυγίζοντας» όμως την κάθε μία με την πιθανότητα που έχει να εμφανιστεί.

Για τον συμβολισμό της μέσης τιμής χρησιμοποιούνται επίσης τα Ε[Χ], μ, μ(Χ) και άλλα.

Είναι η σημαντικότερη ποσότητα που μπορεί κανείς να εξαγάγει από μια κατανομή. Η μέση τιμή βρίσκεται πίσω από εκφράσεις του τύπου «κατά μέσο όρο», όπως π.χ. ότι κάθε Ελληνίδα έχει «κατά μέσο όρο 1.32 παιδιά». Θα δούμε πώς υπολογίζουμε τη μέση τιμή για διάφορες κατανομές και διάφορες τυχαίες μεταβλητές.

Ποια είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Χ που μας «δείχνει» το αποτέλεσμα μιας ρήψης ενός τίμιου ζαριού;

Ρίχνουμε ένα νόμισμα με πιθανότητα να φέρει κορώνα p. Ποια είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X που παίρνει την τιμή 1 όταν το αποτέλεσμα είναι κορώνα και 0 όταν είναι γράμματα;

Μία τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές στο σύνολο {0,1,...,10} με ίσες πιθανότητες, είναι δηλαδή ομοιόμορφα κατανεμημένη. Ποια είναι η μέση τιμή EX της X;