

0. Για τις επόμενες ασκήσεις θα χρειαστεί να γνωρίζουμε τις μάζες του πρωτονίου και του νετρονίου,

$$m_p = 1,67262 \cdot 10^{-27} \text{kg}$$

$$m_n = 1,67493 \cdot 10^{-27} \text{kg}$$

και επίσης να αναφέρουμε ότι η μάζα του ηλεκτρονίου είναι 1836 φορές μικρότερη από την μάζα του πρωτονίου.

Η ατομική μονάδα μάζας u ορίζεται ως το $\frac{1}{12}$ της μάζας του ουδέτερου ατόμου του ισότοπου ^{12}C ,

$$1u = \frac{1}{12} M(^{12}\text{C})$$

όπου είναι η μάζα του ατόμου του ισότοπου και σε ατομικές μονάδες μάζας,

$$m_p = 1,0072765u$$

$$m_n = 1,0086649u$$

$$m_e = 0,0005485799u$$

$$m_H = m_p + m_e$$

$$= 1,0078251u$$

Στον υπολογισμό της μάζας m_H του ατόμου του υδρογόνου θεωρήσαμε ως αμελητέο το έλλειμμα μάζας από την σύνδεση του ηλεκτρονίου με το πρωτόνιο (της τάξης των $13,6\text{eV}/c^2$).

Από την σχέση ισοδυναμίας μάζας και ενέργειας $E = mc^2$ έχουμε την ακόλουθη ισοδυναμία μεταξύ μάζας και ενέργειας,

$$1u \equiv 931,5\text{MeV}$$

Αυτή η εξίσωση, που είναι ίσως η διασημότερη εξίσωση της φυσικής, μας λέει ότι η μάζα ισοδυναμεί με ενέργεια. Μάλιστα ένα σχετικά μικρό ποσό μάζας όπως είναι το 1gr ισοδυναμεί με ένα τεράστιο ποσό ενέργειας:

$$1\text{gr} \equiv 9 \cdot 10^{13} \text{J}$$

Το έλλειμμα μάζας του πυρήνα ενός ατόμου μπορεί να υπολογιστεί από την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} \Delta M &= Z \cdot m_p + Z \cdot m_e + N \cdot m_n - M(\text{Ατόμου}) \\ &= \underbrace{Z \cdot m_H}_{Z \cdot m_H} + N \cdot m_n - M(\text{Ατόμου}) \\ &= Z \cdot m_H + N \cdot m_n - M(\text{Ατόμου}) \end{aligned}$$

όπου Z είναι ο ατομικός αριθμός, N είναι ο αριθμός των νετρονίων και $M(\text{Ατόμου})$ είναι η μάζα του ουδέτερου ατόμου.

Η ενέργεια σύνδεσης E_B θα είναι,

$$E_B = \Delta M \cdot c^2$$

και αν υπολογίσουμε το έλλειμμα μάζας σε ατομικές μονάδες u , τότε σε MeV η ενέργεια σύνδεσης θα είναι,

$$E_B = \Delta M(u) \cdot 931,5(\text{MeV}/u)$$

1. (Ενέργεια σύνδεσης δευτερίου). Η μάζα του ατόμου του δευτερίου (γνωστού επίσης και ως βαρύ υδρογόνο) είναι $m_D = 2,01410u$. Να βρεθεί η ενέργεια σύνδεσης E_B του ατόμου του δευτερίου.

Απάντηση. Το έλλειμμα μάζας του πυρήνα θα είναι

$$\begin{aligned}\Delta M &= m_p + m_e + m_n - m_D \\ &= \underbrace{1,0078251 + 1,0086649}_{m_H} - 2,01410 \\ &= 0,00239u\end{aligned}$$

και συνεπώς η ενέργεια σύνδεσης E_B θα είναι,

$$\begin{aligned}E_B &= 0,00239 \cdot 931,5 \\ &= 2,226285 \\ &= 2,226\text{MeV}\end{aligned}$$

2. (Ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο του ισότοπου ^{12}C). Να υπολογιστεί το έλλειμμα μάζας, η ολική ενέργεια σύνδεσης E_B και η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο E_B/A του πυρήνα του ισότοπου ^{12}C .

Απάντηση. Γνωρίζουμε ότι η μάζα του ουδέτερου ατόμου του ^{12}C είναι

$$M(^{12}\text{C}) = 12,000000u$$

και από την σχέση

$$\Delta M = 6 \cdot m_H + 6 \cdot m_n - M(^{12}\text{C})$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Delta M &= 6 \cdot 1,0078251 + 6 \cdot 1,008665 - 12,000000 \\ &= 0,0989406u\end{aligned}$$

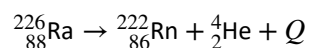
Η ολική ενέργεια σύνδεσης θα είναι,

$$\begin{aligned}E_B &= \Delta M \cdot 931,5 \\ &= 0,0989406 \cdot 931,5 \\ &= 92,1631689 \\ &= 92,16\text{MeV}\end{aligned}$$

Τέλος η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο θα είναι,

$$\begin{aligned}\frac{E_B}{A} &= \frac{92,1620511}{12} \\ &= 7,680170925 \\ &= 7,680\text{MeV/νουκλεόνιο}\end{aligned}$$

3.(Ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την διάσπαση του Ραδίου). Ο πυρήνας $^{226}_{88}\text{Ra}$ υφίσταται διάσπαση α σύμφωνα με την εξίσωση



και απελευθερώνεται ποσό ενέργειας Q . Να υπολογιστεί το ποσό της ενέργειας Q που απελευθερώνεται.

Δίνεται η μάζα των παρακάτω ουδέτερων ατόμων:

$$\begin{aligned}M(\text{Ra}) &= 226,025406\text{u} \\ M(\text{Rn}) &= 222,017574\text{u} \\ M(\text{He}) &= 4,002603\text{u}\end{aligned}$$

Απάντηση. Το έλλειμμα μάζας σε ατομικές μονάδες μάζας u θα είναι,

$$\begin{aligned}\Delta M &= M(\text{Ra}) - M(\text{Rn}) - M(\text{He}) \\ &= 226,025406 - 222,017574 - 4,002603 \\ &= 0,005229\text{u}\end{aligned}$$

Προσέξτε ότι οι μάζες των ηλεκτρονίων απαλείφονται και μένουν μόνο οι μάζες των πυρήνων.

Το ποσό της ενέργειας θα είναι,

$$\begin{aligned}Q &= \Delta M \cdot 931,5 \\ &= 0,005229 \cdot 931,5 \\ &= 4,871\text{MeV}\end{aligned}$$

Η ενέργεια που εκλύεται είναι κινητική ενέργεια από την οποία το μεγαλύτερο μέρος παίρνει ο πυρήνας λόγω τις πολύ μικρότερης μάζας του σε σχέση με τον πυρήνα .

4. Δυο από τα γνωστά ισότοπα του Αζώτου είναι τα εξής: ^{15}N και ^{16}N . Με βάση την ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο εκτιμήσετε ποιο από αυτά τα δυο ισότοπα είναι το πιο σταθερό.

Δίνονται οι μάζες των ουδέτερων ατόμων των ^{15}N , ^{16}N :

$$\begin{aligned}M(^{15}\text{N}) &= 15,0001089\text{u} \\ M(^{16}\text{N}) &= 16,0061017\text{u}\end{aligned}$$

Απάντηση. Αρχικά υπολογίζουμε το έλλειμμα μάζας των δύο πυρήνων,

$$\begin{aligned}
\Delta M(^{15}\text{N}) &= 7 \cdot m_{\text{H}} + 8 \cdot m_{\text{n}} - m(^{15}\text{N}) \\
&= 7 \cdot 1,0078251 + 8 \cdot 1,0086649 - 15,0001089 \\
&= 0,1240188\text{u} \\
\Delta M(^{16}\text{N}) &= 7 \cdot m_{\text{H}} + 9 \cdot m_{\text{n}} - M(^{16}\text{N}) \\
&= 7 \cdot 1,0078251 + 9 \cdot 1,0086649 - 16,0061017 \\
&= 0,1266581\text{u}
\end{aligned}$$

και στην συνέχεια την ενέργεια σύνδεσης,

$$\begin{aligned}
E_B(^{15}\text{N}) &= \Delta M(^{15}\text{N}) \cdot 931,5 \\
&= 115,5235122 \\
&= 115,5\text{MeV}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_B(^{16}\text{N}) &= \Delta M(^{16}\text{N}) \cdot 931,5 \\
&= 117,98202015 \\
&= 118,0\text{MeV}
\end{aligned}$$

και στην συνέχεια την ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο,

$$\begin{aligned}
\frac{E_B(^{15}\text{N})}{15} &= \frac{115,5235122}{15} \\
&= 7,70156748 \\
&= 7,701\text{MeV/νουκλεόνιο} \\
\frac{E_B(^{16}\text{N})}{16} &= \frac{117,98202015}{16} \\
&= 7,3738762 \\
&= 7,374\text{MeV/νουκλεόνιο}
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο πυρήνας ^{15}N , είναι πιθανότατα σταθερότερος του πυρήνα ^{16}N . Αυτό επιβεβαιώνεται πειραματικά και μάλιστα ο πρώτος είναι σταθερός ενώ ο δεύτερος ραδιενεργός.

5. Ποιος είναι πιο σταθερός από τους πυρήνες ^{16}O και ^{15}O ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Δίνονται οι μάζες των ατόμων ^{16}O και ^{15}O ,

$$\begin{aligned}
M(^{16}\text{O}) &= 15,99491463\text{u} \\
M(^{15}\text{O}) &= 15,003065\text{u}
\end{aligned}$$

Απάντηση. Εργαζόμενοι όπως πριν υπολογίζουμε την ενέργεια σύνδεσης των δύο πυρήνων,

$$\begin{aligned}
E_B(^{16}\text{O}) &= \Delta M(^{16}\text{O}) \cdot 931,5 \\
&= [8 \cdot m_{\text{H}} + 8 \cdot m_{\text{n}} - M(^{16}\text{O})] \cdot 931,5 \\
&= (8 \cdot 1,0078251 + 8 \cdot 1,0086649 - 15,99491463) \cdot 931,5 \\
&= 0,13722137\text{u} \cdot 931,5\text{MeV/u} \\
&= 127,8\text{MeV}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_B(^{15}\text{O}) &= \Delta M(^{15}\text{O}) \cdot 931,5 \\
&= [8 \cdot m_{\text{H}} + 7 \cdot m_{\text{n}} - M(^{15}\text{O})] \cdot 931,5 \\
&= (8 \cdot 1,0078251 + 7 \cdot 1,0086649 - 15,003065) \cdot 931,5 \\
&= 0,1201901\text{u} \cdot 931,5\text{MeV/u} \\
&= 112,0\text{MeV}
\end{aligned}$$

οπότε η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο θα είναι

$$\begin{aligned}
\frac{E_B(^{16}\text{O})}{16} &= \frac{127,8217062}{16} \\
&= 7,989\text{MeV/νουκλεόνιο} \\
\frac{E_B(^{15}\text{O})}{15} &= \frac{117,98202015}{16} \\
&= 7,464\text{MeV/νουκλεόνιο}
\end{aligned}$$

Κρίνοντας από τις παραπάνω τιμές, εκτιμούμε ότι ο πυρήνας $^{16}_8\text{O}$ θα πρέπει να είναι σταθερότερος του $^{15}_8\text{O}$. Πειραματικά επιβεβαιώνεται ότι ο πρώτος είναι σταθερός ενώ ο δεύτερος ραδιενεργός.

6. Βρείτε το έλλειμμα μάζας, την ολική ενέργεια σύνδεσης και την ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο για δυο από τα ισότοπα του ασβεστίου και συγκεκριμένα για τα ^{39}Ca και ^{42}Ca . Με βάση αυτήν την απάντηση, ποιο από τα δυο αυτά ισότοπα κρίνετε πιο σταθερό;

Δίνονται οι μάζες των ατόμων των ισωτόπων ^{39}Ca και ^{42}Ca ,

$$\begin{aligned}
M(^{39}\text{Ca}) &= 38,9707197\text{u} \\
M(^{42}\text{Ca}) &= 41,9586180\text{u}
\end{aligned}$$

Απάντηση. Το έλλειμμα μάζας των δύο ισωτόπων θα είναι,

$$\begin{aligned}
\Delta M(^{39}\text{Ca}) &= 20 \cdot m_{\text{H}} + 19 \cdot m_{\text{n}} - M(^{39}\text{Ca}) \\
&= 20 \cdot 1,0078251 + 19 \cdot 1,0086649 - 38,9707197 \\
&= 0,3504154\text{u} \\
\Delta M(^{42}\text{Ca}) &= 20 \cdot m_{\text{H}} + 22 \cdot m_{\text{n}} - M(^{42}\text{Ca}) \\
&= 20 \cdot 1,0078251 + 22 \cdot 1,0086649 - 41,9586180 \\
&= 0,3885118\text{u}
\end{aligned}$$

Η ολική ενέργεια σύνδεσης,

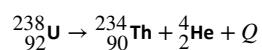
$$\begin{aligned}
E_B(^{39}\text{Ca}) &= \Delta M(^{39}\text{Ca})(\text{u}) \cdot 931,5\text{MeV/u} \\
&= 0,3504154 \cdot 931,5 \\
&= 326,4119451 \\
&= 326,4\text{MeV} \\
E_B(^{42}\text{Ca}) &= \Delta M(^{42}\text{Ca})(\text{u}) \cdot 931,5\text{MeV/u} \\
&= 0,3885118 \cdot 931,5 \\
&= 361,8987417 \\
&= 361,9\text{MeV}
\end{aligned}$$

Τέλος διαιρώντας με τον μαζικό αριθμό παίρνουμε την ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο του κάθε πυρήνα,

$$\begin{aligned}\frac{E_B(^{39}\text{Ca})}{39} &= 8,36953705 \\ &= 8,370\text{MeV/νουκλεόνιο} \\ \frac{E_B(^{42}\text{Ca})}{42} &= 8,61663670 \\ &= 8,617\text{MeV/νουκλεόνιο}\end{aligned}$$

η οποία αποτελεί και ένα μέτρο σταθερότητας του και συμπεραίνουμε ότι ο πυρήνας ^{42}Ca είναι σταθερότερος, μάλιστα είναι σταθερός ενώ ο ^{39}Ca είναι ραδιενεργός.

7. Ο πυρήνας του $^{238}_{92}\text{U}$ υφίσταται αυθόρμητα διάσπαση α σύμφωνα με την εξίσωση,



εκλύοντας ποσό ενέργειας Q . Να υπολογιστεί το ποσό της ενέργειας Q .

Δίνονται οι μάζες των ουδέτερων ατόμων:

$$\begin{aligned}M(^{238}\text{U}) &= 238,02891\text{u} \\ M(^{234}\text{Th}) &= 232,03806\text{u} \\ M(^4\text{He}) &= 4,002602\text{u}\end{aligned}$$

Απάντηση. Κάντε την μόνοι σας!