0. Ο δείκτης διάθλασης n ενός οπτικού μέσου ορίζεται ως ο λόγος της ταχύτητας του φωτός c στο μέσο προς τον λόγο της ταχύτητας c_0 στο κενό,

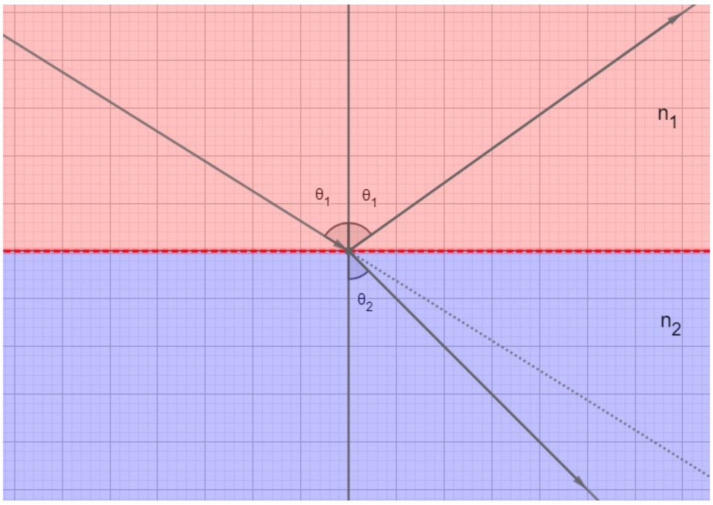
$$n = \frac{c_0}{c}$$

Επειδή η συχνότητα του φωτός δεν αλλάζει θα έχουμε,

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

όπου λ_0 είναι το μήκος κύματος του φωτός στο κενό και λ το μήκος κύματος στο οπτικό μέσο.

Όταν το φως συναντήσει την διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων ένας «μέρος» του ανακλάται και ένα «μέρος» διαθλάται,

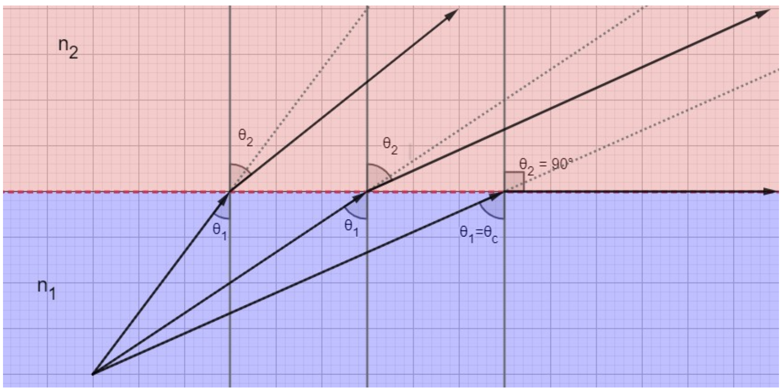


Ο νόμος της διάθλασης περιγράφεται από την εξίσωση,

$$n_1 \cdot \eta\mu\theta_1 = n_2 \cdot \eta\mu\theta_2$$

που είναι επίσης γνωστή και ως νόμος του Snell.

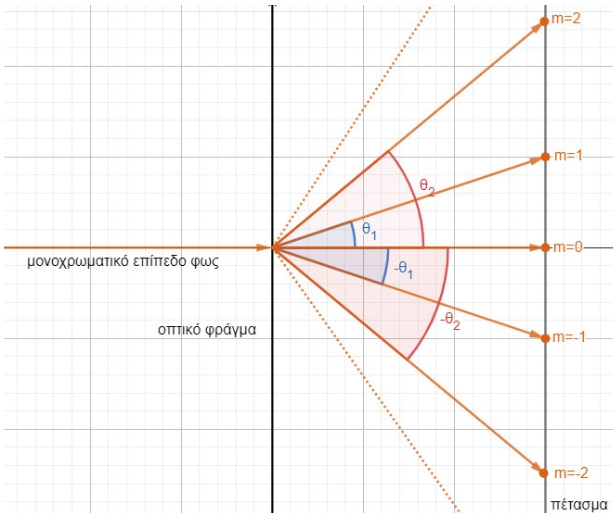
Όταν μία ακτίνα φωτός «ταξιδεύει» από το οπτικά πυκνό προς το οπτικά αραιό μέσο ($n_1 > n_2$), τότε μπορεί να έχουμε ολική ανάκλαση και να μην υπάρχει διαθλώμενη ακτίνα,



Η κρίσιμη γωνία θ_c πάνω από την οποία έχουμε ολική ανάκλαση δίνεται από τον τύπο,

$$\theta_c = \frac{n_1}{n_2}$$

Το αποτέλεσμα της συμβολής που προκύπτει από την πρόσπτωση επίπεδου μονοχρωματικού φωτός κάθετα σε ένα οπτικό φράγμα είναι φωτεινές και σκοτεινές περιοχές στο πέτασμα,



και η εξίσωση που δίνει τις γωνίες στις οποίες παρατηρούμε τα μέγιστα είναι,

$$d \cdot \text{ημ}\theta = m \cdot \lambda$$

Συνεπώς το πλήθος των θετικών τάξεων συμβολής θα είναι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος m για τον οποίο ισχύει

$$\frac{m \cdot \lambda}{d} < 1$$

ή αν θέλετε το πρώτο ψηφίο της διαίρεσης d/λ.

1. Για τον προσδιορισμό της περιεκτικότητας ενός υδατικού διαλύματος σε ζάχαρη μπορούμε να μετρήσουμε τον δείκτη διάθλασης του n_δ. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε μία μονοχρωματική δέσμη φωτός μήκους κύματος 638,0nm η οποία προσπίπτει στην διαχωριστική επιφάνεια αέρα δείγματος υπό γωνία 53,0° ως προς την κατακόρυφο. Η γωνία διάθλασης που μετράμε είναι 38,0°.

Α. Να υπολογιστεί ο δείκτης διάθλασης του διαλύματος.

Β. Να υπολογιστεί το μήκος κύματος λ της δέσμης μέσα στο διάλυμα.

Δίνεται ο δείκτης διάθλασης του αέρα $n = 1{,}00$.

Απάντηση.

Α. Από τον νόμο της διάθλασης θα έχουμε

$$n \cdot \text{ημ}53° = n_\delta \cdot \text{ημ}38°$$

και λύνοντας ως προς n_δ παίρνουμε

$$n_\delta = \frac{n \cdot \text{ημ}53°}{\text{ημ}38°}$$
$$= 1{,}2971$$
$$= 1{,}3$$

Β. Γνωρίζουμε ότι,

$$n_\delta = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

και λύνοντας ως προς λ_0 παίρνουμε,

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n_\delta}$$
$$= 491{,}9\text{nm}$$

2. Μονοχρωματική ακτίνα διαδίδεται στο νερό και προσπίπτει στην διαχωριστική επιφάνεια νερού αέρα υπό γωνία 37° ως προς την κατακόρυφη.

Α. Να υπολογιστεί η κρίσιμη γωνία θ_c.

Β. Να υπολογιστεί η γωνία διάθλασης θ_δ.

Δίνεται ο δείκτης διάθλασης του νερού $n_\nu = 1{,}333$ και του αέρα $n = 1$.

Απάντηση.

Α. Η κρίσιμη γωνία θ_c μπορεί να βρεθεί από την σχέση,

$$\eta\mu\theta_c = \frac{n}{n_\nu}$$
$$= 0{,}75018$$

και με την βοήθεια υπολογιστή βρίσκουμε,

$$\theta_c = \sin^{-1} 0{,}75018$$
$$= 48{,}6°$$

Β. Εφόσον $\theta < \theta_c$ θα έχουμε διαθλώμενη ακτίνα και από τον νόμο της διάθλασης,

$$n_\nu \cdot \text{ημ}37° = n \cdot \text{ημ}\theta_\delta$$

παίρνουμε την εξίσωση,

$$\eta\mu\theta_\delta = n_\nu \cdot \eta\mu 37°$$
$$= 0{,}8022$$

για την οποία ο υπολογιστής μας δίνει,

$$\theta_\delta = \sin^{-1} 0{,}8022$$
$$= 53{,}3°$$

3. Έχουμε ένα οπτικό φράγμα που δεν γνωρίζουμε την σταθερά του d. Για να τα την βρούμε σημαδεύουμε με ένα Laser μήκους κύματος $\lambda = 632{,}8\text{nm}$ κάθετα στο φράγμα και μετράμε τις γωνίες για τις τρεις πρώτες μη μηδενικές τάξεις περίθλασης. Βρίσκουμε λοιπόν $\theta_1 = 18{,}45°, \theta_2 = 39{,}26°$ και $\theta_3 = 71{,}66°$.

Α. Να υπολογιστεί η σταθερά d του φράγματος.

Β. Να υπολογιστούν οι γραμμές/mm του φράγματος.

Απάντηση.

Α. Από την εξίσωση του φράγματος για την τάξη περίθλασης $m = 1$

$$d \cdot \eta\mu 18{,}5° = 1 \cdot 632{,}8 \Rightarrow$$
$$d = \frac{632{,}8}{\eta\mu 18{,}5°} \Rightarrow$$
$$d = 1999{,}51\mathrm{nm}$$

Ομοίως για $m = 2$,

$$d = \frac{2 \cdot 632{,}8}{\eta\mu 39{,}26°} = 1999{,}87\mathrm{nm}$$

και τέλος για $m = 3$,

$$d = \frac{3 \cdot 632{,}8}{\eta\mu 71{,}66°} = 1999{,}98\mathrm{nm}$$

Από τις τρεις αυτές εκτιμήσεις της σταθεράς d, μπορούμε να κρατήσουμε την μέση τιμή τους $\bar{d}$ ή εκείνη που αντιστοιχεί στην πιο ευκρινή τάξη περίθλασης που είναι η τελευταία. Στρογγυλοποιώντας στα τέσσερα σημαντικά παίρνουμε $d = 2000\mathrm{nm}$.

Β. Για να βρούμε πόσες γραμμές (σχισμές) έχει το φράγμα ανά mm θα διαιρέσουμε την απόσταση $1\mathrm{mm} = 10^6\mathrm{nm}$ με την απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών γραμμών που είναι η σταθερά d του φράγματος,

$$\text{γραμμές/mm} = \frac{10^6}{d} = \frac{10^6}{2000} = 500$$

4. Ένας φοιτητής έχει στην διάθεση του ένα οπτικό φράγμα με 500γραμμές/mm και δύο Laser, ένα στην περιοχή του κόκκινου με μήκος κύματος $\lambda_\kappa = 632{,}9\mathrm{nm}$ και ένα στην περιοχή του μπλε με μήκος κύματος $\lambda_\mu = 420{,}0\mathrm{nm}$.

Α. Να υπολογίσετε την σταθερά d του φράγματος.

Β. Να βρείτε τις γωνίες για τα μέγιστα συμβολής για όλες τις τάξεις περίθλασης και για τα δύο Laser.

Απάντηση.

Α. Η σταθερά d του φράγματος θα είναι,

$$d = \frac{10^6}{500} = 2000\mathrm{nm}$$

Β. Για το κόκκινο Laser θα έχουμε και για $m = 1$ θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
d \cdot \etaμθ_1 &= 1 \cdot \lambda_\kappa \Rightarrow \\
\etaμθ_1 &= \frac{\lambda_\kappa}{d} \Rightarrow \\
\etaμθ_1 &= \frac{632{,}9}{2000} \Rightarrow \\
\etaμθ_1 &= 0{,}31645 \Rightarrow \\
\theta_1 &= \sin^{-1} 0{,}31645 \\
&= 18{,}45°
\end{aligned}
$$

Για $m = 2$,

$$
\begin{aligned}
\theta_2 &= \sin^{-1} \frac{2 \cdot 632{,}9}{2000} \\
&= 39{,}26°
\end{aligned}
$$

και για $m = 3$,

$$
\begin{aligned}
\theta_3 &= \sin^{-1} \frac{3 \cdot 632{,}9}{2000} \\
&= 71{,}68°
\end{aligned}
$$

Δεν έχουμε μέγιστο για τάξη περίθλασης μεγαλύτερη του 3.

Για το μπλε Laser και για $m = 1$ έχουμε,

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= \sin^{-1} \frac{1 \cdot 420}{2000} \\
&= 12{,}12°
\end{aligned}
$$

Για $m = 2$,

$$
\begin{aligned}
\theta_2 &= \sin^{-1} \frac{2 \cdot 420}{2000} \\
&= 24{,}83°
\end{aligned}
$$

Για $m = 3$,

$$
\begin{aligned}
\theta_3 &= \sin^{-1} \frac{3 \cdot 420}{2000} \\
&= 39{,}05°
\end{aligned}
$$

Και τέλος για $m = 4$,

$$
\begin{aligned}
\theta_4 &= \sin^{-1} \frac{4 \cdot 420}{2000} \\
&= 57{,}14°
\end{aligned}
$$

Για $m = 5$ έχουμε

$$
\frac{5 \cdot \lambda}{d} > 1
$$

και συνεπώς δεν έχουμε μέγιστο πέμπτης τάξης.