Τμήμα:
Μουσικής Τεχνολογίας και Ακουστικής

Κουζούπης Σπύρος - Έκδοση 0.99 (7/5/2021)

Μελέτη εγκάρσιων δονήσεων ράβδου
(Εύρεση ιδιοσυχνοτήτων και ιδιομορφών)

1. Εισαγωγή

Πριν αναφερθούμε στα εγκάρσια κύματα σε ράβδο θα ξεκινήσουμε με μία σύντομη αναδρομή στα εγκάρσια κύματα σε χορδή και στα διαμήκη κύματα σε χορδή ή ράβδο, ώστε να γίνουν εμφανέστερες κάποιες ομοιότητες και διαφορές σε κάθε περίπτωση. Κάποια από τα θέματα που αναφέρονται εδώ τα έχετε ενδεχομένως συναντήσει και σε άλλα μαθήματα. Εδώ θα αναφερθούμε ενδεχομένως λίγο πιο διεξοδικά σε αυτά.

2. Κυματική εξίσωση σε μία χορδή (για εγκάρσια κύματα)

Έστω μία χορδή γραμμικής πυκνότητας μ (kg/m) η οποία βρίσκεται υπό τάση T (N). Η εξίσωση για τα εγκάρσια κύματα στη χορδή είναι η γνωστή κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1}$$

<u>Κανονικός τρόπος δόνησης ή κανονικός ιδιορυθμός (mode)</u> είναι η κάθε μορφή που έχει η συνάρτηση y όταν η χορδή πάλλεται στην αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα της με τάξη n. Η συνάρτηση y συμβολίζεται τότε με y_n.

Οι συχνότητες συντονισμού μίας τεντωμένης χορδής, της οποίας είναι είτε <u>σταθερά</u> (ακλόνητα), και τα δύο άκρα της, είτε είναι <u>ελεύθερα,</u> και τα δύο άκρα της, δίνονται από τον τύπο (2α).

$$\boldsymbol{f_n = n\frac{c}{2L}}, \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{2α}$$

Όταν το <u>ένα άκρο</u> της είναι ελεύθερο και <u>το άλλο</u> ακλόνητο, έχουμε:

$$\boldsymbol{f_n = n\frac{c}{4L}}, \qquad n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots \tag{2β}$$

όπου n είναι η τάξη του ιδιορυθμού και L το μήκος της χορδής. Ως γνωστόν $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

3. Διαμήκη κύματα σε λεπτή ράβδο ή χορδή

Τα <u>διαμήκη</u> κύματα σε μία χορδή ή <u>λεπτή</u> ράβδο, διαδίδονται με άλλη ταχύτητα από ότι τα εγκάρσια (ακόμα κι αν έχουμε το ίδιο υλικό). Η εξίσωση κίνησης σ' αυτή την περίπτωση είναι:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{3}$$

Αυτή η εξίσωση, είναι η κυματική εξίσωση για διαμήκη κύματα σε μία διάσταση με ταχύτητα: $c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young και ρ η πυκνότητα του υλικού της ράβδου. Και εδώ όπως και πριν, οι ιδιορυθμοί και οι ιδιοσυχνότητες εξαρτώνται από τις συνοριακές συνθήκες σε κάθε άκρο.

Οι σχέσεις που παρέχουν τις ιδιοσυχνότητες συνοψίζονται όμως σε όλες οι περιπτώσεις εύκολα ως εξής:

Όταν <u>και τα δύο άκρα</u> της είναι <u>ελεύθερα</u> ή <u>ακλόνητα</u>, έχουμε:

$$f_n = n\frac{c_L}{2L}, \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{4α}$$

Όταν το <u>ένα άκρο</u> ελεύθερο και <u>το άλλο</u> ακλόνητο:

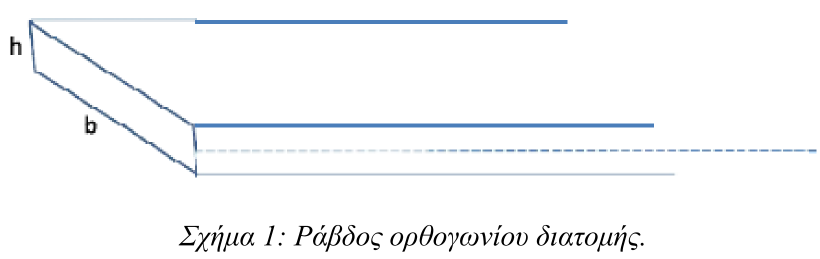
$$f_n = n\frac{c_L}{4L}, \qquad n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots \tag{4β}$$

4. Εγκάρσια κύματα σε ράβδο

Σε μία ράβδο μπορούν να διαδοθούν και εγκάρσια κύματα όπως σε μία χορδή. Οι εξισώσεις όμως που δίνουν τις ιδιοσυχνότητες των στασίμων κυμάτων είναι πιο περίπλοκες από αυτές των εγκάρσιων κυμάτων σε χορδή ή των διαμηκών κυμάτων σε λεπτή ράβδο. Η εξίσωση για τα εγκάρσια κύματα σε ράβδο είναι η εξής,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{E K^2}{\rho}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \tag{5}$$

όπου K είναι μια σταθερά που καλείται γυροσκοπική ακτίνα (τα υπόλοιπα σύμβολα είναι τα ίδια με την περίπτωση των διαμηκών κυμάτων) και εξαρτάται από το σχήμα της κάθετης διατομής της ράβδου.



Σχήμα 1: Ράβδος ορθογωνίου διατομής.

Για κυλινδρική ράβδο: $K = r/2$, όπου r είναι η ακτίνα της κυκλικής διατομής της ράβδου, ενώ: $K = h/\sqrt{12}$ για ράβδο ορθογωνίου διατομής. Το *h* φαίνεται στο Σχ 1.

Η φασική ταχύτητα των κυμάτων είναι: $$v^2 = \omega K\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \omega K c_L \qquad (6\alpha)$$

Παρατηρούμε ότι $v \propto \sqrt{\omega}$. Η εξίσωση (5) είναι μία διαφορική εξίσωση 4^{ης} τάξης. Παραλείποντας τα ενδιάμεσα βήματα, δίνουμε εδώ κατευθείαν τη λύση για τα εγκάρσια αρμονικά κύματα της ράβδου,

$$y(x,t) = \left[A\cosh kx + B\sinh kx + C\cos kx + D\sin kx\right]\cos\left(\omega t + \phi\right) \qquad (6\beta)$$

όπου A, B, C και D είναι πραγματικές σταθερές, που θα προκύψουν από τις συνοριακές συνθήκες. Χρειαζόμαστε δηλαδή, τέσσερις συνοριακές συνθήκες που προδιαγράφονται από τον τρόπο στήριξης της ράβδου. Για κάθε ένα άκρο της ράβδου (π.χ. στο *x=0* ή στο *x=L)*, μπορεί να έχουμε διαφορετικές συνθήκες. Αναφέρουμε εδώ απλά τρεις ουσιαστικές περιπτώσεις:

1) Πακτωμένο άκρο:

Εάν η ράβδος στερεώνεται άκαμπτα, η μετατόπιση και η κλίση πρέπει να είναι μηδέν στο άκρο αυτό. Οι συνοριακές συνθήκες είναι επομένως:

$$y = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad (7)$$

2) Απλά στηριγμένο άκρο:

Αυτού του είδους η στήριξη είναι τέτοια ώστε η εγκάρσια μετατόπιση και η ροπή να είναι μηδέν χωρίς περιορισμό στην κλίση της ράβδου σε εκείνο το σημείο. Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$y = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \qquad (8)$$

3) Ελεύθερο άκρο:

Η ροπή στρέψης και η δύναμη είναι μηδέν. Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 \qquad (9)$$

5. Μερικές περιπτώσεις στήριξης της ράβδου

Θα εξετάσουμε εδώ αλλά και στο εργαστήριο μερικές συνδυαστικές περιπτώσεις στήριξης για κάθε άκρο της ράβδου.

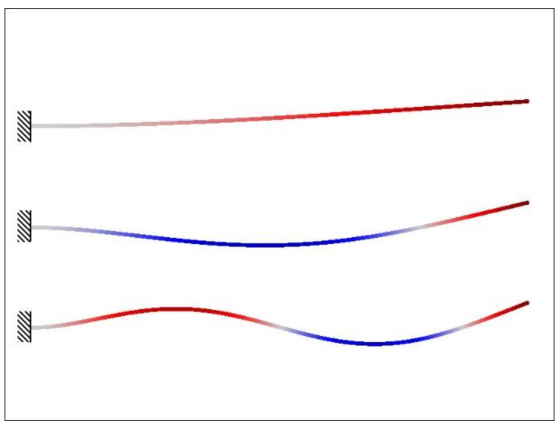
A) Εάν η ράβδος είναι πακτωμένη στο ένα άκρο της και ελεύθερη στο άλλο, η εξίσωση που δίνει τις ιδιοσυχνότητες της, είναι:

$$\cot\left(\frac{kL}{2}\right) = \pm\tanh\left(\frac{kL}{2}\right) \qquad (10)$$

Οι ιδιοσυχνότητες προκύπτουν από τη λύση της (10) και δίνονται από τον τύπο:

$$f_n = \frac{\pi K}{8L^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left[1.194^2, 2.988^2, 5^2, \dots, (2n-1)^2\right] \qquad n = 1,2,3,.. \qquad (11)$$

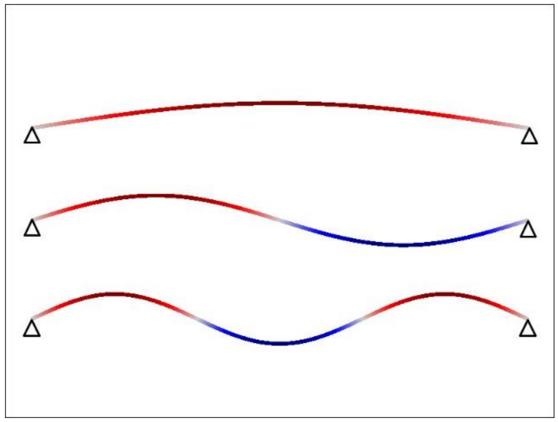
Σε αυτή την περίπτωση οι 3 πρώτες ιδιομορφές φαίνονται στο Σχ. 2.



Σχήμα 2: Οι τρεις πρώτες ιδομορφές της εγκάρσιας ταλάντωσης μιας πακτωμένης-ελεύθερης ράβδου.

B) Εάν η ράβδος είναι απλά στηριγμένη και στα δύο άκρα της, έχουμε την μόνη περίπτωση όπου η χαρακτηριστική εξίσωση έχει απλή μορφή. Είναι η *sin(kL)=0* οπότε οι ιδιοσυχνότητες της ράβδου θα δίνονται από την εξίσωση:

$$f_m = \frac{\pi K}{2L^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\, m^2 \qquad m = 1,2,3,\dots. \qquad (12)$$

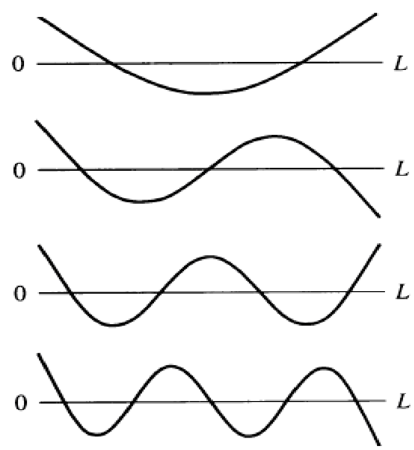


Σχήμα 3: Οι τρεις πρώτες ιδιομορφές της εγκάρσιας ταλάντωσης μιας ράβδου με απλή στήριξη και στα δύο άκρα.

Γ) Εάν η ράβδος είναι ελεύθερη και στα 2 άκρα της, η εξίσωση που δίνει τις ιδιοσυχνότητες της ράβδου είναι: $\cosh(kL)\cos(kL) = 1$ (13)

Οι ιδιοσυχνότητες προκύπτουν από τη λύση της (13) και δίνονται από τον τύπο:

$$f_n = \frac{\pi K}{8L^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left[3.011^2, 5^2, 7^2, \ldots, (2n+1)^2\right] \qquad n = 1,2,3,.. \tag{14}$$

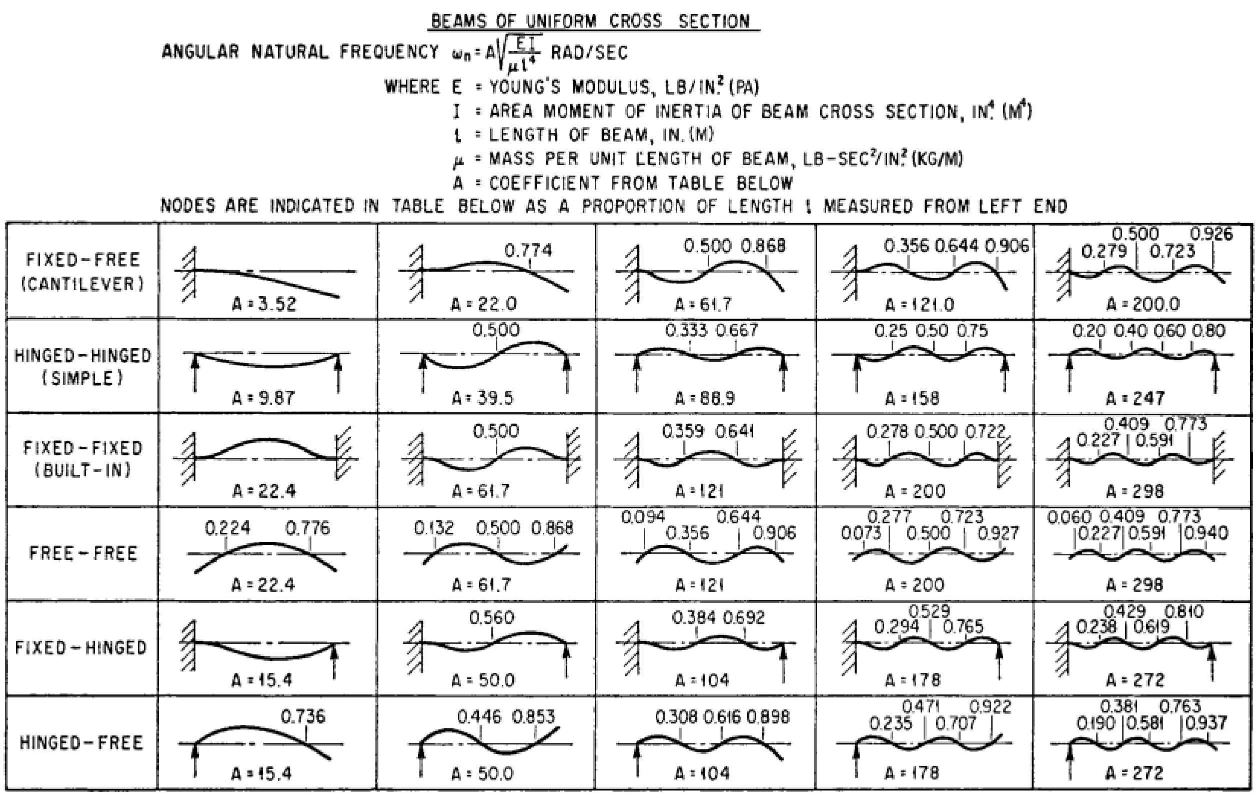


Σχήμα 4: Οι τέσσερις πρώτες ιδιομορφές της εγκάρσιας ταλάντωσης μιας ράβδου ελεύθερης και στα δύο άκρα της.

Ο Πίνακας 1 δίνει πληροφορίες σχετικά με τις συχνότητες, τις φασικές ταχύτητες, και τις κομβικές θέσεις (θέσεις των δεσμών) μιας ελεύθερης-ελεύθερης ράβδου μήκους 100 cm. Επίσης, αν παρατηρήσουμε το Σχ. 4 θα δούμε ότι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης της ράβδου που αντιστοιχούν στις περιττές ιδιοσυχνότητες *(f_1, f_3, f_5, ...)*, είναι συμμετρικές ως προς τον κεντρικό κάθετο άξονα της ράβδου, σε αντίθεση με τις άρτιες ιδιοσυχνότητες *(f_2, f_4, f_6, ...)* που είναι αντι-συμμετρικές ως προς αυτόν. Άλλες περιπτώσεις στήριξης της ράβδου με τα αντίστοιχα στοιχεία δίνονται στον Πίνακα 2.

Συχνότητα	Φασική Ταχύτητα	Μήκος Κύματος (cm)	Κομβικές Θέσεις (απο τα άκρα)
f_1	v_1	133.0	22.4, 77.6
$2.756f_1$	$1.66v_1$	80.0	13.2, 50.0, 86.8
$5.404f_1$	$2.32v_1$	57.2	9.4, 35.6, 64.4, 90.6
$8.933f_1$	$2.99v_1$	44.5	7.3, 27.7, 50.0, 72.3, 92.7

Πίνακας 1: *Χαρακτηριστικά εγκάρσιας ταλάντωσης μίας ράβδου μήκους 100 cm με ελεύθερα και τα δύο άκρα της.*



Πίνακας 2: *Διάφορες περιπτώσεις στήριξης της ράβδου με τα αντίστοιχα στοιχεία.*