

Μάθημα : Αλγοριθμικές Βάσεις στη Γεωπληροφορική
Διδάσκων : Συμεών Κατσουγιαννόπουλος

Μεθοδολογίες παρεμβολής σε DTM.

1. Μέθοδοι παρεμβολής.

Η παρεμβολή σε ψηφιακό μοντέλο εδάφους (DTM) είναι η διαδικασία υπολογισμού των υψομέτρων μιας επιφάνειας από τις μετρήσεις που έγιναν μέσα στην γειτονική περιοχή ή την γενικότερη περιοχή. Οι περιπτώσεις που χρησιμοποιούμε την παρεμβολή είναι :

- ✓ Μετατροπή μιας επιφάνειας μεγαλύτερης διακριτικής ικανότητας σε μια άλλη επιφάνεια μικρότερης διακριτικής ικανότητας.
- ✓ Η περιοχή ενδιαφέροντος δεν καλύπτεται πλήρως από τα δεδομένα εδάφους.
- ✓ Μια επιφάνεια αντιπροσωπεύεται από ένα πρότυπο στοιχείων που είναι διαφορετικό από το απαιτούμενο.

Για να κατασκευάσουμε το ψηφιακό μοντέλο εδάφους, χρειαζόμαστε την εκτίμηση του υψομέτρου για κάθε σημείο του πλέγματος. Για το να κάνουμε αυτό, θα πρέπει να γνωρίζουμε αν το σημείο είναι ακριβώς σε ένα σημείο όπου το στοιχείο δειγματοληψίας είναι διαθέσιμο, ή μεταξύ των σημείων δειγματοληψίας. Στην πρώτη περίπτωση, το υψόμετρο μπορεί να ληφθεί άμεσα από τη βάση δεδομένων (ή την αρχική παρατήρηση), ενώ στη δεύτερη περίπτωση είναι αναγκαία μια μέθοδος υπολογισμού του υψομέτρου από τα δεδομένα των παρατηρήσεων. Σε ένα DTM χρησιμοποιούμε μεθόδους παρεμβολής για τις περιπτώσεις όπου απαιτείται :

- Υπολογισμός του υψομέτρου σε τυχαίο σημείο της επιφάνειας.

- Υπολογισμός των υψομέτρων των κορυφών τετραγωνικού κανάβου από σημεία γνωστών υψομέτρων.
- Προσδιορισμός του υψομέτρου από υπάρχουσες ισοϋψείς καμπύλες.
- Υπολογισμός του υψομέτρου σε νέο τετραγωνικού κάναβο (επανασύσταση).

Καμία τεχνική παρεμβολής δεν μπορεί να θεωρηθεί ανώτερη από τις υπόλοιπες και άρα η καταλληλότερη για όλες τις εφαρμογές. Τα κριτήρια με βάση τα οποία μπορούμε να επιλέξουμε μια μέθοδο παρεμβολής DTM είναι :

- 1ο) Ο βαθμός στον οποίο τα τοπικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα πρέπει να ληφθούν υπόψη.
- 2ο) Η συνάρτηση παρεμβολής να μπορεί να προσαρμοστεί στον ποικίλο χαρακτήρα της περιοχής.
- 3ο) Οι αλγόριθμοι παρεμβολής που θα χρησιμοποιήσουμε πρέπει να προσαρμοστούν στο χαρακτήρα των δεδομένων-παρατηρήσεων (τύπος, ακρίβεια, σημασία, κ.λπ....) όπως και στη μορφή του ψηφιακού μοντέλου (δηλ. Ορθογωνικός κάναβος κ.τ.λ.).
- 4ο) Ο επιθυμητός βαθμός ακρίβειας και το υπολογιστικό κόστος (χρόνος επεξεργασίας στον Η/Υ).

Γενικά υπάρχουν δυο κατηγορίες τεχνικών για την παρεμβολή υψομέτρου σημείων σε μια επιφάνεια από τις αρχικές παρατηρήσεις, η "συνολική προσαρμογή" (Global Fit) και η "τοπική παρεμβολή" (Local Fit). Η πρώτη υπολογίζει μια ενιαία συνάρτηση για την περιγραφή μιας επιφάνειας και η οποία καλύπτει ολόκληρη την περιοχή ενώ η δεύτερη υπολογίζει την επιφάνεια στους διαδοχικούς κόμβους του πλέγματος βασιζόμενη σε μια επιλογή των κοντινότερων σημείων.

2. Μέθοδοι συνολικής προσαρμογής (Global Fit)

Η μέθοδος συνολικής προσαρμογής χρησιμοποιεί μια επιφάνεια παρεμβολής που θεωρούμε ότι προσεγγίζει την φυσική επιφάνεια. Η μέθοδος βασίζεται στον προσδιορισμό ενός πολυωνύμου που θεωρούμε ότι προσεγγίζει βέλτιστα την πραγματική επιφάνεια με βάση το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων. Το πολυώνυμο παρεμβολής μπορεί να επεκταθεί σε οποιοδήποτε επιθυμητό βαθμό, αν και πρακτικά υπάρχουν όρια που εξαρτώνται από τα σφάλματα λόγω στρογγυλοποίησης και της διακριτικής ικανότητας του πλέγματος. Οι άγνωστοι συντελεστές υπολογίζονται από την επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων με την χρήση ελαχίστων τετραγώνων και περιλαμβάνουν τα αθροίσματα των συντεταγμένων x , y , και z των αρχικών δεδομένων. Με βάση τους συντελεστές του πολυωνύμου που υπολογίσαμε, στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε το υψόμετρο οποιοδήποτε σημείου μέσα στην περιοχή του πλέγματος.

Γενικά η παρεμβολή επιφανείας χρησιμοποιείται σε εφαρμογές όπου δεν ενδιαφέρουν οι τοπικές διακυμάνσεις ή η επίδραση τους υπολογίζεται ξεχωριστά με την χρήση άλλων αλγορίθμων. Υπάρχουν διάφορα μειονεκτήματα και πλεονεκτήματα σε μια παρεμβολή επιφανείας :

Πλεονεκτήματα

- Παραγωγή μιας συνολικής επιφανείας
- Γρήγορος προγραμματισμός
- Αποδοτική σε περιπτώσεις ομαλής επιφανείας

Μειονεκτήματα

- Η πολυωνυμική επιφάνεια αποτελεί μια απλοποιημένη μορφή της φυσικής επιφανείας.
- Δεν δίνει καλή ακρίβεια τοπικά.
- Δεν δίνει αξιόπιστες τιμές στα άκρα της επιφανείας.
- Η επίτευξη καλής ακρίβειας απαιτεί πολυώνυμα μεγάλου βαθμού με συνέπεια μεγάλο υπολογιστικό κόστος.

Για τον υπολογισμό της επιφάνειας παρεμβολής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια γραμμική συνάρτηση :

$$z(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

ή πολυώνυμο παρεμβολής δεύτερης τάξεως

$$z(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$$

ή και μεγαλύτερης τάξεως.

Για την περίπτωση όπου χρησιμοποιήσουμε μια γραμμική συνάρτηση παρεμβολής το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει με βάση το κριτήριο των ελαχίστων τετράγωνων δίνεται από τις εξισώσεις :

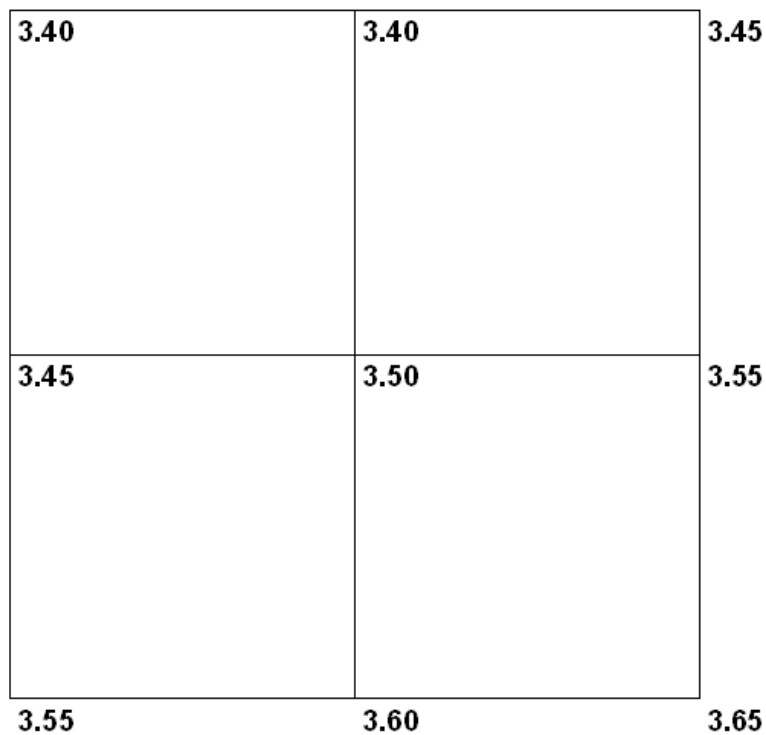
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n z_i(x, y) = n \cdot a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i z_i(x, y) = a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n y_i z_i(x, y) = a_0 \sum_{i=1}^n y_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i y_i + a_2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{cases}$$

όπου n είναι ο αριθμός των σημείων, και σε μορφή πινάκων :

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n z_i \\ \sum_{i=1}^n x_i z_i \\ \sum_{i=1}^n y_i z_i \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα :

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε μια επιφάνεια παρεμβολής της μορφής $z(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y$ για το παρακάτω ψηφιακό μοντέλο εδάφους :



αν η ισοδιάσταση του κανάβου είναι 10 μ. και θεωρήσουμε σαν αρχή των αξόνων (0,0) το κάτω αριστερό σημείο του πλέγματος, στον παρακάτω πίνακα φαίνονται αναλυτικά όλα τα απαραίτητα αθροίσματα για την δημιουργία του συστήματος των γραμμικών εξισώσεων.

Σημείο	x	y	z	$x_i \cdot z_i$	$y_i \cdot z_i$	x^2	y^2	$x_i \cdot y_i$
1	0	0	3,55	0	0,00	0	0	0
2	0	10	3,45	0	34,50	0	100	0
3	0	20	3,40	0	68,00	0	400	0
4	10	0	3,60	36	0,00	100	0	0
5	10	10	3,50	35	35,00	100	100	100
6	10	20	3,40	34	68,00	100	400	200
7	20	0	3,65	73	0,00	400	0	0
8	20	10	3,55	71	35,50	400	100	200
9	20	20	3,45	69	69,00	400	400	400
Σύνολα	90	90	31,55	318	310	1500	1500	900

και το σύστημα των εξισώσεων γίνεται :

$$\begin{bmatrix} 9 & 90 & 90 \\ 90 & 1500 & 900 \\ 90 & 900 & 150 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31,55 \\ 318 \\ 310 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,556 \\ 0,0041667 \\ -0,009167 \end{bmatrix}$$

συνεπώς το πολυώνυμο παρεμβολής έχει τη μορφή:

$$z(x, y) = 3,556 + 0,0041667 \cdot x - 0,009167 \cdot y$$

3. Μέθοδοι τοπικής παρεμβολής (Local Fit)

Οι μέθοδοι με επιφάνεια παρεμβολής χρησιμοποιούν εξωτερικές χωρικές δομές στην παρεμβολή. Αντίθετα οι μέθοδοι τοπικής παρεμβολής χρησιμοποιούν τις πληροφορίες από τα κοντινότερα σημεία για των υπολογισμό των ενδιάμεσων τιμών και ακολουθούν την παρακάτω λογική :

1. Καθορισμός της περιοχής ή της γειτονιάς αναζήτησης γύρω από το σημείο παρεμβολής.
2. Εύρεση των σημείων- στοιχείων μέσα σε αυτήν την γειτονιά.

3. Επιλογή του μαθηματικού προτύπου για να αντιπροσωπεύσει την μορφή πέρα από αυτόν τον περιορισμένο αριθμό σημείων .

Οι μέθοδοι τοπικής παρεμβολής που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, ανάλογα με την μορφή των δεδομένων, στα ψηφιακά μοντέλα είναι:

□ **Παρεμβολή σε δεδομένα TIN.**

- Γραμμική Παρεμβολή.
- Παρεμβολή με επιφάνεια 2^{ης} τάξης
- Παρεμβολή με επιφάνεια 5^{ης} τάξης

□ **Παρεμβολή σε Ορθογωνικό κάναβο.**

- Παρεμβολή γειτονικού σημείου.
- Γραμμική Παρεμβολή.
- Διγραμμική Παρεμβολή.
- Δικυβική παρεμβολή
- Παρεμβολή με χρήση συναρτήσεως βάρους

4. Μέθοδοι τοπικής παρεμβολής με δεδομένα από ορθογωνικό κάναβο.

4.1. Παρεμβολή γειτονικού σημείου.

Ο αλγόριθμός της παρεμβολής γειτονικού σημείου αναλύεται στο κεφάλαιο 1.4.1 των σημειώσεων και βασίζεται στην αρχή ότι η τιμή του ενδιάμεσου σημείου είναι ίση με την τιμή της

κοντινότερης κορυφής του πλέγματος εισόδου. Στην πραγματικότητα δεν εκτελείται καμία πραγματική παρεμβολή. Η μέθοδος παρεμβολής γειτονικού σημείου χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις όπου δεν θέλουμε να αλλάξουν οι τιμές των στοιχείων εισόδου, δεν χρησιμοποιείται συνήθως για παρεμβολή σε επιφάνεια.

4.2. Γραμμική Παρεμβολή.

Στην γραμμική παρεμβολή το υψόμετρο του ενδιαμέσου σημείου προκύπτει από την εφαρμογή της παρεμβολής σε τρία γνωστά σημεία του κανάβου. Ολόκληρη η περιοχή παρεμβολής υποδιαιρείται στα τρίγωνα και το υψόμετρο υπολογίζεται με βάση τον αλγόριθμο:

Βήμα 1^ο : Έυρεση του κανάβου που βρίσκεται το ενδιαμέσο σημείο (x, y) , παίρνουμε τις τέσσερις κορυφές του πλέγματος (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) και (x_4, y_4, z_4) .

Βήμα 2^ο : Υπολογισμός των αποστάσεων s και t .

$$s = \frac{x - x_1}{\Delta x} \quad \text{και} \quad t = \frac{y - y_1}{\Delta y}$$

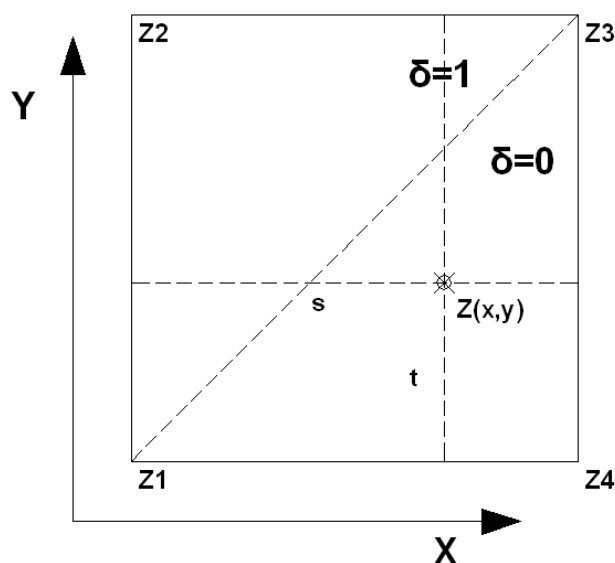
όπου $\Delta x, \Delta y$ η ισοδιάσταση κατά x και y αντίστοιχα.

Βήμα 3^ο : Προσδιορισμός του τριγώνου μέσα στο οποίο βρίσκεται το σημείο :

$$\text{Υπολογισμός του } \delta = \begin{cases} 1 & \text{αν } s \leq t \\ 0 & \text{αν } s > t \end{cases}$$

Βήμα 4^ο : Υπολογισμός του υψομέτρου από την συνάρτηση :

$$z(x, y) = \delta \{z_1 + (z_3 - z_2) \cdot s + (z_2 - z_1) \cdot t\} + (1 - \delta) \{z_1 + (z_4 - z_1) \cdot s + (z_3 - z_4) \cdot t\}$$



4.3. Διγραμμική Παρεμβολή.

Η μέθοδος της διγραμμικής παρεμβολής αναλύεται στο κεφάλαιο 1.4.1 των σημειώσεων και για τον προσδιορισμό του υψομέτρου του ενδιαμέσου σημείου χρησιμοποιεί τα τέσσερα κοντινότερα σημεία του κανάβου ακολουθώντας τον αλγόριθμο :

Βήμα 1^ο : Εύρεση του τετραγώνου του κανάβου όπου βρίσκεται το ενδιαμέσο σημείο (x, y) , παίρνουμε τις τέσσερις κορυφές του πλέγματος (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) και (x_4, y_4, z_4) .

Βήμα 2^ο : Υπολογισμός των αποστάσεων s και t .

$$s = \frac{x - x_1}{\Delta x} \quad \text{και} \quad t = \frac{y - y_1}{\Delta y}$$

όπου $\Delta x, \Delta y$ η ισοδιάσταση κατά x και y αντίστοιχα.

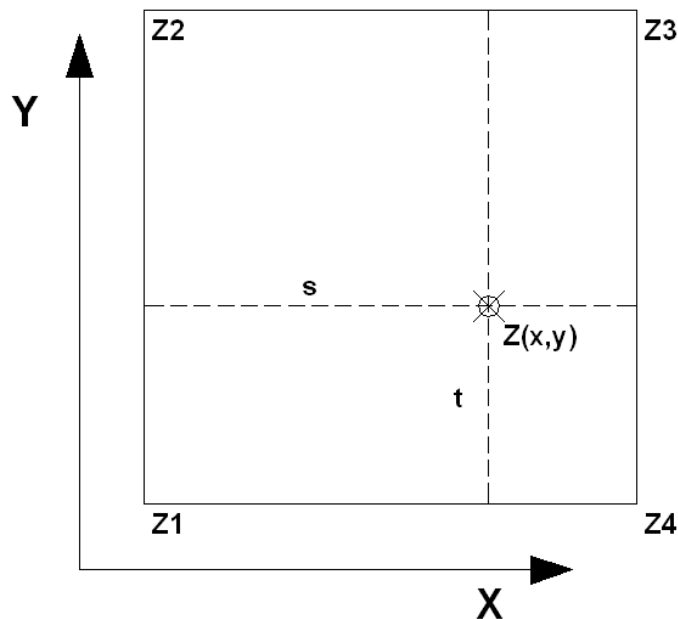
Βήμα 3^ο : Υπολογισμός του υψομέτρου από την εξίσωση της διγραμμικής παρεμβολής:

$$z(x, y) = (1-s) \cdot (1-t) \cdot z_1 + (1-s) \cdot t \cdot z_2 + s \cdot (1-t) \cdot z_4 + s \cdot t \cdot z_3$$

Παράδειγμα :

Δίνονται τα υψόμετρα των τεσσάρων πλησιέστερων σημείων :

$$Z_1=3.45, \quad Z_2=3.40, \quad Z_3=3.40, \quad Z_4=3.50$$



Αν η ισοδιάσταση του κανάβου είναι $\Delta x = \Delta y = 10\text{m}$ και οι αποστάσεις s και t υπολογίστηκαν και είναι : $s=0.7, t=0.4$

Το υψόμετρο του σημείου x,y προκύπτει από την εξίσωση:

$$z(x, y) = (1 - 0.6) \cdot (1 - 0.7) \cdot 3.45 + (1 - 0.6) \cdot 0.7 \cdot 3.40 + 0.6 \cdot (1 - 0.7) \cdot 3.50 + 0.6 \cdot 0.7 \cdot 3.40 \Rightarrow$$

$$z(x, y) = 3.451$$

4.4. Δικυβική Παρεμβολή.

Η δικυβική παρεμβολή (βλ. κεφάλαιο 1.4.1 των σημειώσεων) υπολογίζει το υψόμετρο του ενδιαμέσου σημείου από τα υψόμετρα των δεκαέξι κοντινότερων σημείων του πλέγματος

εισόδου. Η μορφή του εξαγόμενου ψηφιακού μοντέλου εδάφους εξαρτάται από την μορφή της συνάρτησης παρεμβολής που θα χρησιμοποιήσουμε. Η χρησιμοποίηση μιας ομαλής καμπύλης και μιας μεγαλύτερης γειτονιάς δίνει στην δικυβική παρεμβολή μια τάση να εξομαλύνει τα υψόμετρα, και μπορεί σε μερικές περιπτώσεις να οδηγήσει τις τιμές του πλέγματος εξόδου να είναι έξω από τη σειρά των τιμών στο πλέγμα εισόδου.