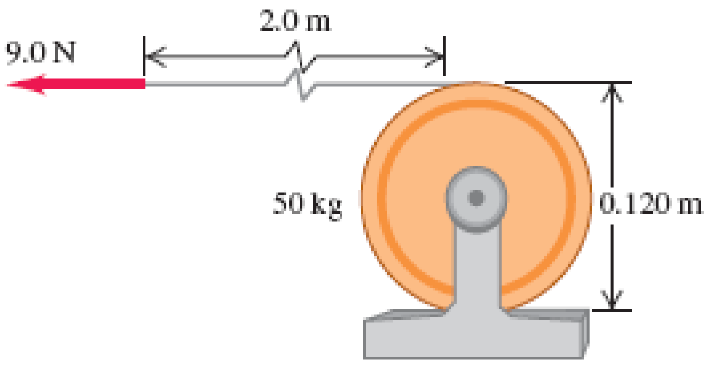
10ο Μάθημα
Δυναμική Περιστροφικής κίνησης

- Συζήτηση για περιστροφική κίνηση
- Περιστροφή γύρω από κινούμενο άξονα

Δυναμική περιστροφικής κίνησης



Αβαρές μη εκτατό σκοινί τυλίγεται γύρω από κύλινδρο μάζας 50kgr και διαμέτρου 12cm που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο άξονα. Αν τραβήξουμε το σκοινί με σταθερή δύναμη 9N για 2m χωρίς αυτό να ολισθαίνει στον κύλινδρο βρείτε την τελική γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου αν αυτός αρχικά ηρεμούσε και την ταχύτητα του σκοινιού.

1ος τρόπος: $$\tau = I\alpha_\gamma$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \Leftrightarrow I = \frac{1}{2}50kgr(0,06m)^2 \Leftrightarrow I = 0,09kgr \cdot m^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F} \Leftrightarrow \tau = RF\sin(90^o) \Leftrightarrow \tau = 0,06m9N \Leftrightarrow \tau = 0,54Nm$$

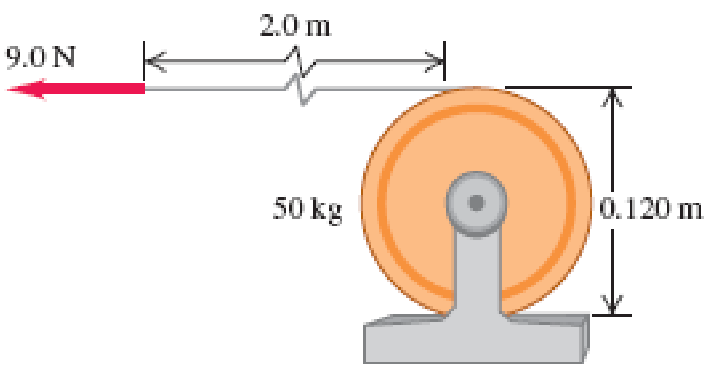
$$\alpha_\gamma = \frac{\tau}{I} \Leftrightarrow \alpha_\gamma = \frac{0,54Nm}{0,09kgr \cdot m^2} \Leftrightarrow \alpha_\gamma = 6rad/s^2$$

$$\vartheta = \frac{s}{R} = \frac{2m}{0,06m} = 33,3rad$$

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha_\gamma\vartheta \Leftrightarrow \omega = \sqrt{2\alpha_\gamma\vartheta} \Leftrightarrow \omega = 20rad/s$$

$$\upsilon = \omega R = (20rad/s)0,06m = 1,2m/s$$

Περιστροφική κίνηση



Αβαρές μη εκτατό σκοινί τυλίγεται γύρω από κύλινδρο μάζας 50kgr και διαμέτρου 12cm που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο άξονα. Αν τραβήξουμε το σκοινί με σταθερή δύναμη 9N για 2m χωρίς αυτό να ολισθαίνει στον κύλινδρο βρείτε την τελική γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου αν αυτός αρχικά ηρεμούσε και την ταχύτητα του σκοινιού.

2ος τρόπος: **Θεώρημα έργου ενέργειας**

$$\Delta K = W_F \Leftrightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 - 0 = Fs \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2Fs}{I}}$$

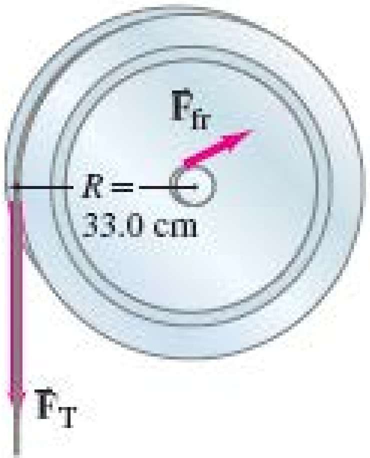
Αλλά

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} 50kgr(0,06m)^2 \Leftrightarrow I = 0,09kgr \cdot m^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2Fs}{I}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9N \cdot 2m}{0,09kgr \cdot m^2}} = 20rad/s$$

$$\upsilon = \omega R = (20rad/s)0,06m = 1,2m/s$$

Τροχαλία



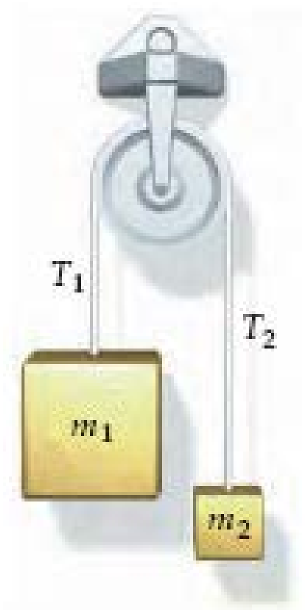
Δύναμη F_T=15N ασκείται σε σκοινί τυλιγμένο σε τροχαλία μάζας 4kgr και ακτίνας 33cm. Η τροχαλία επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση από ηρεμία σε 30rad/s σε 3s. Αν η ροπή των τριβών στον άξονα περιστροφής είναι 1,1Nm βρείτε τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας.

Συνισταμένη ροπή όλων των δυνάμεων: $\tau_{\sigma\upsilon\nu} = I\alpha_\gamma$

$$\tau_{\sigma\upsilon\nu} = F_T R - \tau_{fr} = 15N\,0,33m - 1,1Nm = 3,85Nm$$

$$\omega = \omega_o + \alpha_\gamma t \Leftrightarrow \alpha_\gamma = \frac{\omega - \omega_o}{t} \Leftrightarrow \alpha_\gamma = \frac{30rad/s - 0}{3s} \Leftrightarrow \alpha_\gamma = 10rad/s^2$$

$$I = \frac{\tau_{\sigma\upsilon\nu}}{\alpha_\gamma} \Leftrightarrow I = \frac{3,85Nm}{10rad/s^2} \Leftrightarrow I = 0,385kgr \cdot m^2$$



Αφήνουμε το διπλανό σύστημα από ισορροπία. Το σκοινί δε γλιστρά και δεν υπάρχουν τριβές κατά την περιστροφή της τροχαλίας. Αν $m_1 > m_2$ βρείτε ποια η σχέση των δύο τάσεων του νήματος.

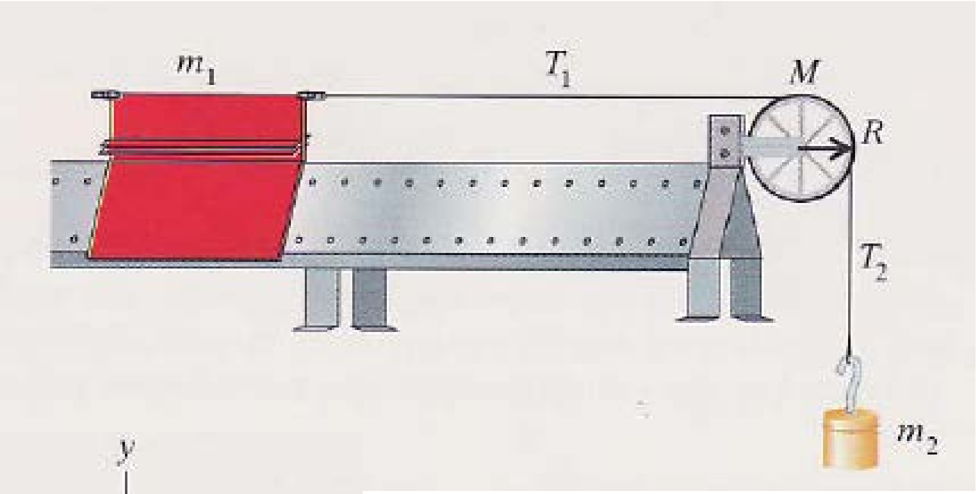
$$m_1 g > T_1$$

$$T_2 > m_2 g$$

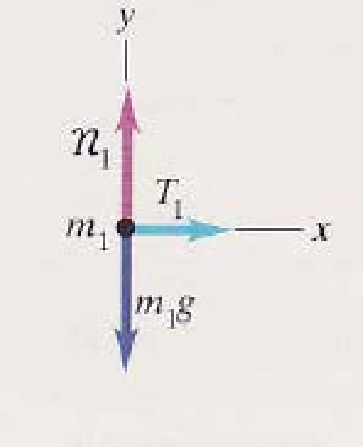
$\tau_{\sigma\upsilon\nu} = I\alpha_\gamma$ **οπότε** $\tau_1 > \tau_2 \Leftrightarrow T_1 R > T_2 R \Leftrightarrow T_1 > T_2$

$$\boxed{m_1 g > T_1 > T_2 > m_2 g}$$

Δυναμική περιστροφικής κίνησης



Γνωρίζουμε τις μάζες m_1 και m_2 καθώς και την μάζα M της τροχαλίας και την ακτίνα της R. Βρείτε την επιτάχυνση της m_1 καθώς και τις τάσεις T_1 και T_2.

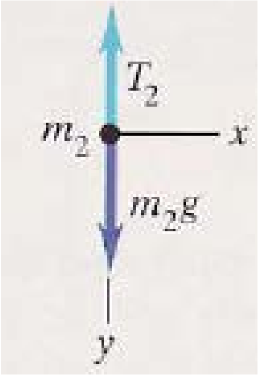


$$T_1 = m_1 a_1$$

$$T_1 = m_1 a_1$$

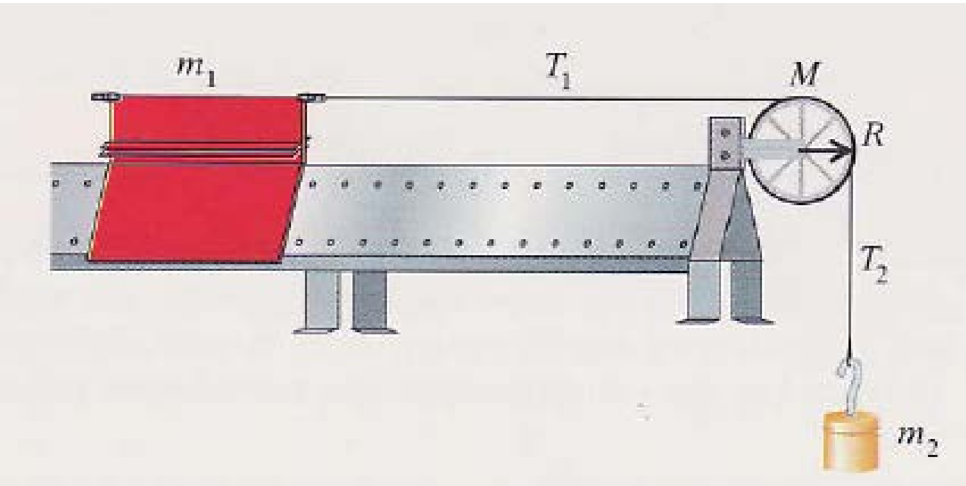
Αλλά $a_1 = a_2$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_1$$

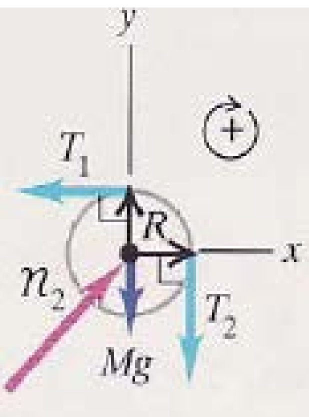


$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

Δυναμική περιστροφικής κίνησης



Γνωρίζουμε τις μάζες m_1 και m_2 καθώς και την μάζα M της τροχαλίας και την ακτίνα της R. Βρείτε την επιτάχυνση της m_1 καθώς και τις τάσεις T_1 και T_2.



$$T_2R - T_1R = I\alpha_\gamma \Leftrightarrow T_2R - T_1R = MR^2\alpha_\gamma \Leftrightarrow T_2 - T_1 = MR\alpha_\gamma$$

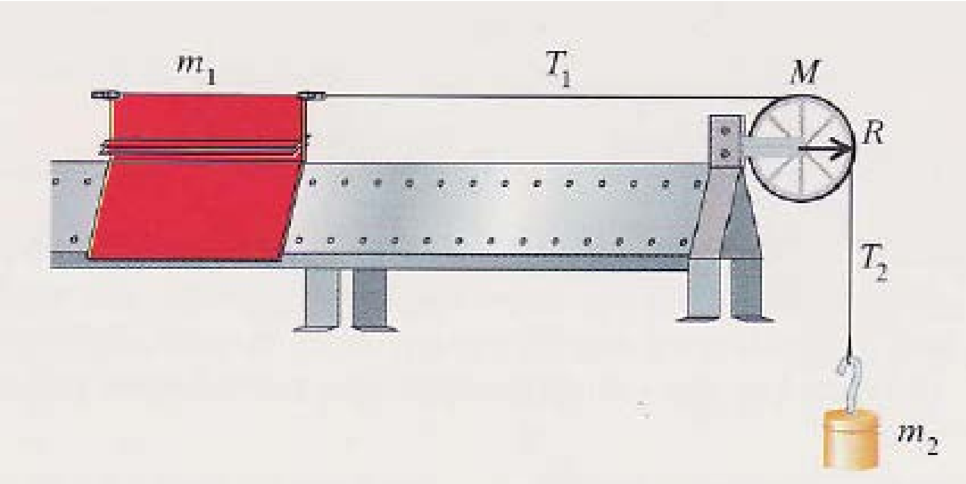
Αλλά $a_1 = a_2 = \alpha_\gamma R$ **οπότε** $T_2 - T_1 = Ma_1$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= m_1a_1 \\ m_2g - T_2 &= m_2a_1 \\ T_2 - T_1 &= Ma_1 \end{aligned}\right\}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη

$$a_1 = \frac{m_2g}{m_1 + m_2 + M}$$

Δυναμική περιστροφικής κίνησης



Γνωρίζουμε τις μάζες m_1 και m_2 καθώς και την μάζα M της τροχαλίας και την ακτίνα της R. Βρείτε την επιτάχυνση της m_1 καθώς και τις τάσεις T_1 και T_2.

$$a_1 = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + M}$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + M}$$

$$T_2 = \frac{(m_1 + M) m_2 g}{m_1 + m_2 + M}$$

Αν M=0 και $m_1 >>> m_2$

$$a_1 = \frac{m_2 g}{m_1}$$

$$T_1 = T_2 = m_2 g$$

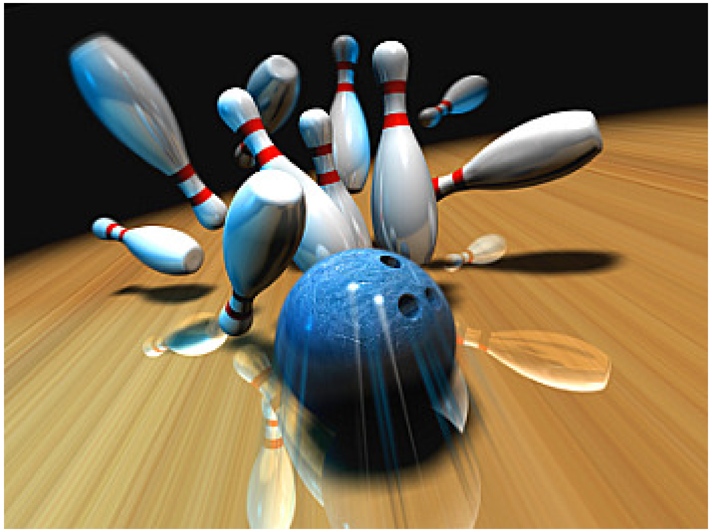
Περιστροφή γύρω από κινούμενο άξονα

Μεταφορά + περιστροφή σώματος γύρω από άξονα συμμετρίας που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

Πρακτικά έχουμε συνδυασμό δύο κινήσεων:
Μεταφορά κέντρου μάζας (ξέρουμε να περιγράφουμε κίνηση υλικού σημείου)
Περιστροφή σώματος γύρω από άξονα (ξέρουμε να περιγράφουμε περιστροφική κίνηση γύρω από ακλόνητο άξονα περιστροφής)

Περιστροφή γύρω από κινούμενο άξονα

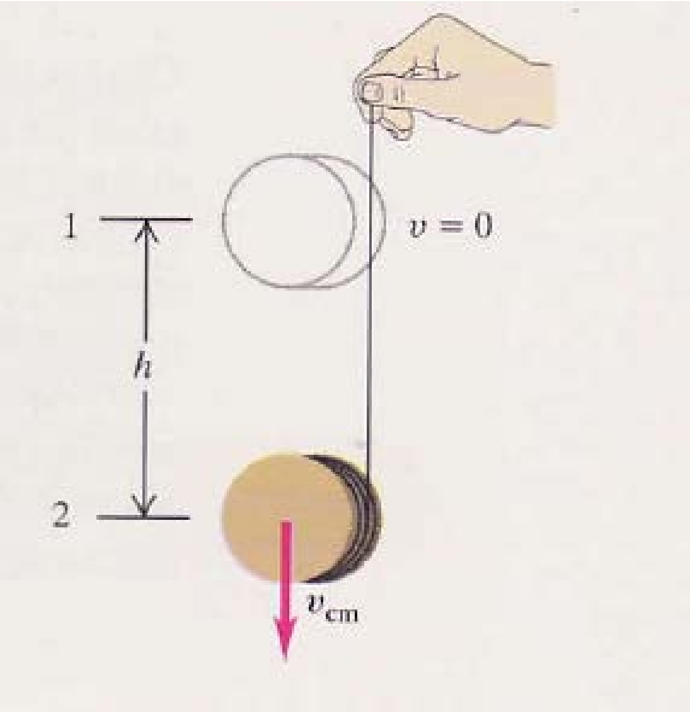
Μεταφορά + περιστροφή σώματος γύρω από άξονα συμμετρίας που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.



Μεταφορική κίνηση: $F_{\sigma\upsilon\nu} = ma_{cm}$

Περιστροφική κίνηση: $\tau_{\sigma\upsilon\nu} = I\alpha_{\gamma}$

Περιστροφική κίνηση



Για το γιο γιο του σχήματος βρείτε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του στη θέση 2. (θεωρήστε το κυλινδρικό).

Λόγω διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

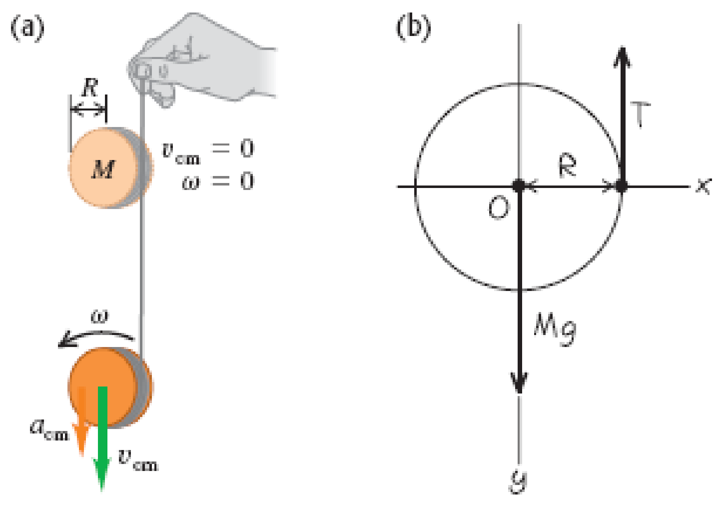
$$U_1 = Mgh \qquad U_2 = 0 \qquad K_1 = 0$$

$$K_2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)(\frac{\upsilon_{cm}}{R})^2 = \frac{3}{4}M\upsilon_{cm}^2$$

Άρα:

$$Mgh = \frac{3}{4}M\upsilon_{cm}^2 \Leftrightarrow \upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

Περιστροφική κίνηση



Πλήρης ανάλυση κίνησης για το γιο γιο του σχήματος με τη βοήθεια δυνάμεων (θεωρήστε το κυλινδρικό). Βρείτε την τάση του νήματος και την επιτάχυνση του κέντρου μάζας.

$$F_{\sigma\upsilon\nu} = Ma_{cm} \Leftrightarrow Mg - T = Ma_{cm}$$

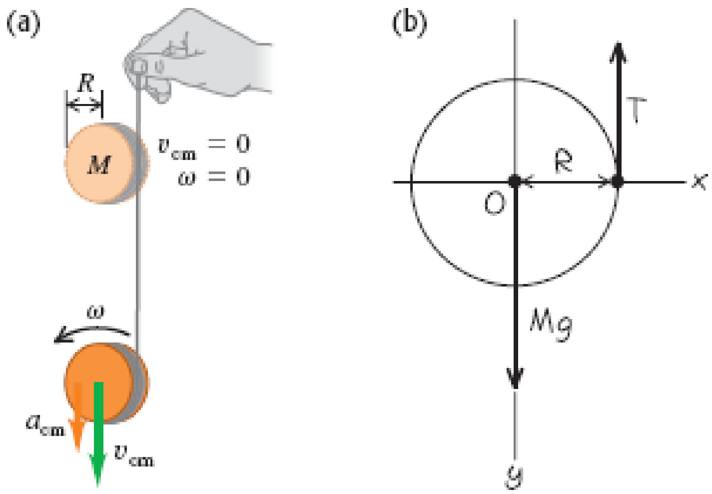
$$\tau_{\sigma\upsilon\nu} = I\alpha_{\gamma} \Leftrightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma}$$

Αφού το νήμα ξετυλίγεται χωρίς ολίσθηση: $\upsilon_{cm} = \omega R$

Παραγωγίζοντας: $\dfrac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \dfrac{d(\omega R)}{dt} \Leftrightarrow a_{cm} = R\alpha_{\gamma}$

$$\left.\begin{aligned} Mg - T &= Ma_{cm} \\ TR &= \frac{1}{2}MR\alpha_{cm} \end{aligned}\right\} \qquad a_{cm} = \frac{2}{3}g \qquad T = \frac{1}{3}Mg$$

Περιστροφική κίνηση



Πλήρης ανάλυση κίνησης για το γιο γιο του σχήματος με τη βοήθεια δυνάμεων (θεωρήστε το κυλινδρικό).

$$a_{cm} = \frac{2}{3} g$$

$$T = \frac{1}{3} Mg$$

Όταν κατέβει απόσταση h ποια θα είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας;

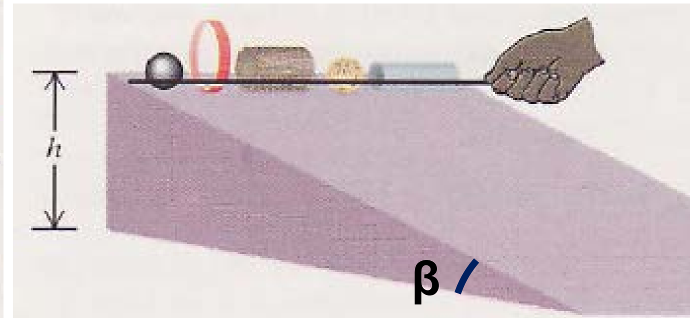
$$\upsilon_{cm}^2 = \upsilon_{cm\_o}^2 + 2a_{cm}h \Leftrightarrow \upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

Ποια θα είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του;

$$\omega = \frac{\upsilon_{cm}}{R} \Leftrightarrow \omega = \frac{\sqrt{\frac{4}{3} gh}}{R}$$

Ανταγωνισμός κυλιόμενων σωμάτων

Ανταγωνισμός κυλιομένων σωμάτων Κατά τη διάρκεια επίδειξης σε διάλεξη του μαθήματος της φυσικής, ο διδάσκων υποβάλλει στη δοκιμασία του «ανταγωνισμού» διάφορα αντικείμενα με παράπλευρες επιφάνειες κυκλικής διατομής, αφήνοντάς τα να κυλίσουν – ενώ ηρεμούν – από το ψηλότερο σημείο ενός κεκλιμένου επιπέδου (Σχ. 10–15). Οι φοιτητές προσπαθούν να μαντεύσουν το νικητή της κούρσας (συχνά μάλιστα στοιχηματίζουν για το αποτέλεσμα). Μπορείτε να προβλέψετε το αποτέλεσμα, εξασφαλίζοντας έτσι σίγουρα κέρδη με το στοίχημα;



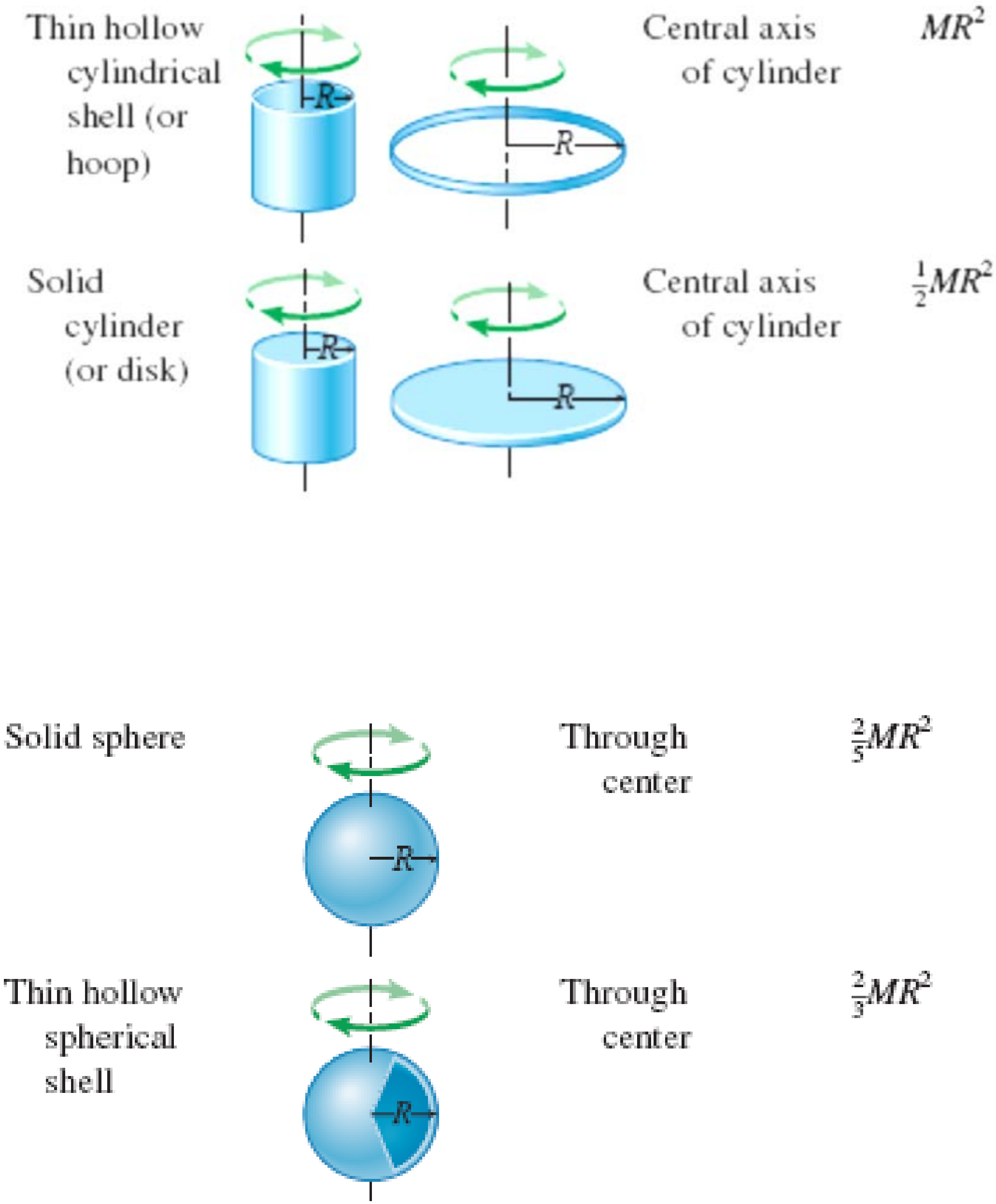
Αν τα σώματα δεν περιστρέφονταν αλλά απλά γλιστρούσαν και η τριβή ήταν αμελητέα;

Με ποια ταχύτητα θα έφταναν στο κάτω μέρος; $\upsilon = \sqrt{2gh}$

Ποια θα ήταν η επιτάχυνσή τους; $a = g\sin\beta$ β η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου

Σε πόσο χρόνο θα έφταναν; $t = \dfrac{\upsilon}{g\sin\beta}$

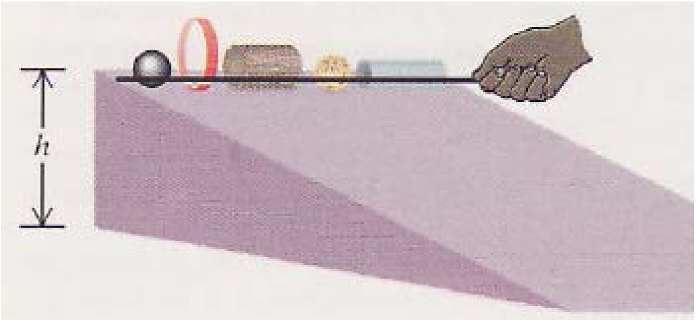
Ανταγωνισμός κυλιόμενων σωμάτων



$$I_{cm} = fMR^2$$

Ανταγωνισμός κυλιόμενων σωμάτων

Ανταγωνισμός κυλιομένων σωμάτων Κατά τη διάρκεια επίδειξης σε διάλεξη του μαθήματος της φυσικής, ο διδάσκων υποβάλλει στη δοκιμασία του «ανταγωνισμού» διάφορα αντικείμενα με παράπλευρες επιφάνειες κυκλικής διατομής, αφήνοντάς τα να κυλίσουν – ενώ ηρεμούν – από το ψηλότερο σημείο ενός κεκλιμένου επιπέδου (Σχ. 10–15). Οι φοιτητές προσπαθούν να μαντεύσουν το νικητή της κούρσας (συχνά μάλιστα στοιχηματίζουν για το αποτέλεσμα). Μπορείτε να προβλέψετε το αποτέλεσμα, εξασφαλίζοντας έτσι σίγουρα κέρδη με το στοίχημα;



$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

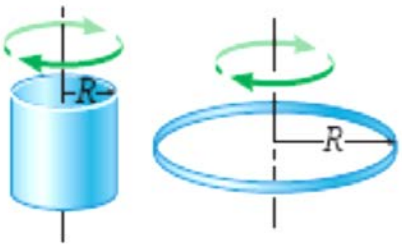
$$U_1 = Mgh \qquad K_1 = 0 \qquad U_2 = 0$$

$$K_2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}fMR^2\left(\frac{\upsilon_{cm}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}(1+f)M\upsilon_{cm}^2$$

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+f}}$$

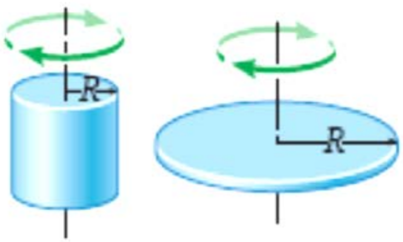
Ανταγωνισμός κυλιόμενων σωμάτων

Thin hollow cylindrical shell (or hoop)



Central axis of cylinder MR^2 f=1

Solid cylinder (or disk)

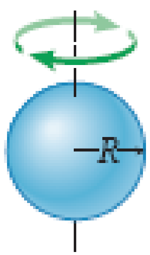


Central axis of cylinder $\frac{1}{2}MR^2$ f=0.5

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+f}}$$

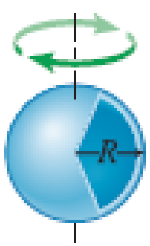
Δεν εξαρτάται ούτε από μάζα ούτε από ακτίνα σώματος!!!!!!!!!!!!!!!

Solid sphere



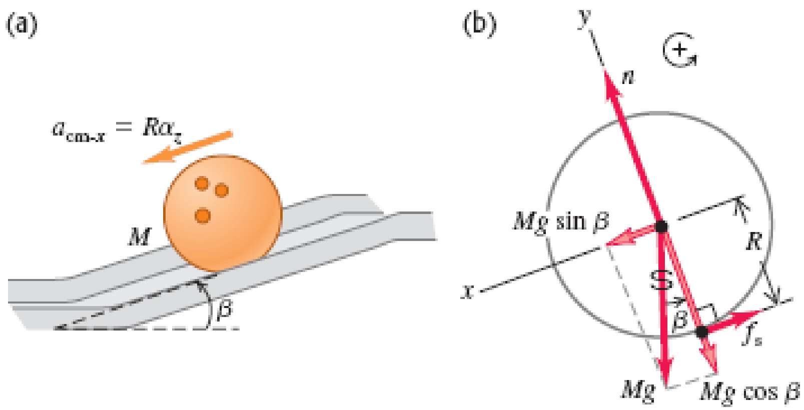
Through center $\frac{2}{5}MR^2$ f=0.4

Thin hollow spherical shell



Through center $\frac{2}{3}MR^2$ f=0.7

Περιστροφική κίνηση



Μπάλα μπόουλινγκ μάζας Μ κατεβαίνει χωρίς να ολισθαίνει ράμπα κλίσης β. Ποια η επιτάχυνσή της και ποια η δύναμη τριβής;

$$F_{\sigma\upsilon\nu\_x} = Ma_{cm\_x} \Leftrightarrow Mg\sin(\beta) - f = Ma_{cm\_x}$$

$$\tau_{\sigma\upsilon\nu} = I_{cm}\alpha_\gamma \Leftrightarrow fR = \frac{2}{5}MR^2\alpha_\gamma$$

Αφού η μπάλα κυλά χωρίς ολίσθηση: $\upsilon_{cm} = \omega R$

Παραγωγίζοντας: $a_{cm\_x} = R\alpha_\gamma$

$$\left.\begin{aligned} Mg\sin(\beta) - f &= Ma_{cm\_x} \\ fR &= \frac{2}{5}MR\alpha_{cm\_x} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_{cm\_x} &= \frac{5}{7}g\sin(\beta) \\ f &= \frac{2}{7}Mg\sin(\beta) \end{aligned}$$

Η μπάλα έχει τα 5/7 της επιτάχυνσης που θα είχε αν κινιόταν ολισθαίνοντας πάνω στην επιφάνεια.