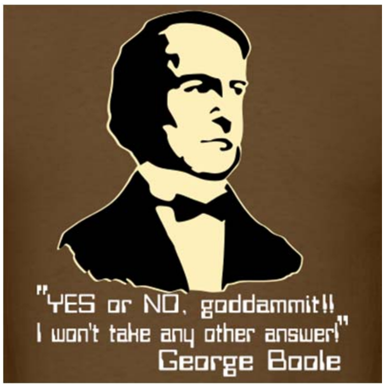
Αναλογικά
Ψηφιακά

Άλγεβρα Boole



Αναλογικά & Ψηφιακά Κυκλώματα

Διαφάνειες Μαθήματος

Δρ. Μηχ. Μαραβελάκης Εμ.

Αναλογικά
Ψηφιακά

Άλγεβρα Boole

- Οι αρχές της λογικής αναπτύχθηκαν από τον George Boole (1815-1884) και τον Augustus De Morgan. Εκατό χρόνια αργότερα ο Claude Shannon (ως μεταπτυχιακός φοιτητής στο MIT) έδειξε ότι η άλγεβρα Boole ήταν σχετική με την ανάλυση διακοπτικών (switching) κυκλωμάτων. Η άλγεβρα Boole αποτελεί τη μαθηματική βάση για την ηλεκτρονική επεξεργασία της δυαδικής πληροφορίας.

ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΨΗΦΙΑΚΑ

Ιδιότητες και κανόνες της άλγεβρας Boole

- Λογικές πράξεις με σταθερές.
- Λογικές πράξεις με μια μεταβλητή.
- Λογικές πράξεις με δυο ή περισσότερες μεταβλητές.

Λογικές πράξεις με σταθερές

AND	OR	NOT
$0 \bullet 0 = 0$	$0 + 0 = 0$	
$0 \bullet 1 = 0$	$0 + 1 = 1$	$\overline{0} = 1$
$1 \bullet 0 = 0$	$1 + 0 = 1$	$\overline{1} = 0$
$1 \bullet 1 = 1$	$1 + 1 = 1$	

ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΨΗΦΙΑΚΑ

Λογικές πράξεις με μια μεταβλητή

AND	OR	NOT
$A \bullet 0 = 0$	$A + 0 = A$	
$A \bullet 1 = A$	$A + 1 = 1$	$\overline{\overline{A}} = A$
$A \bullet A = A$	$A + A = A$	
$A \bullet \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$	

Να αποδειχθούν οι σχέσεις:

$$A + \overline{A} = 1 \quad \text{και} \quad A \cdot 1 = A$$

Χρησιμοποιώντας πίνακα αληθείας

ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ
ΨΗΦΙΑΚΑ

Λογικές πράξεις-ιδιότητες με δυο ή περισσότερες μεταβλητές

- ***Αντιμεταθετική ιδιότητα*** $A + B = B + A$, $A \bullet B = B \bullet A$
- ***Απορροφητική ιδιότητα*** $A + (A \bullet B) = A$, $A \bullet (A + B) = A$
- ***Προσεταιριστική ιδιότητα*** $A + (B + C) = (A + B) + C$, $A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$
- ***Επιμεριστική ιδιότητα*** $A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$, $A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C)$
- ***Κανόνες De Morgan***

$$\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$

$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$

ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ
ΨΗΦΙΑΚΑ

Κανόνας ελαχιστοποίησης

$$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$$

$$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$$

- ***Να αποδειχθεί ότι:*** $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$

$$(A + B)(A + \overline{B}) = AA + A\overline{B} + AB + B\overline{B}$$

$$= A + A\overline{B} + AB + 0$$

$$= A + A(\overline{B} + B)$$

$$= A + A$$

$$= A$$

- ***Να αποδειχθεί ότι:*** $AB + A\overline{B} = A$

$$A + (AB) = A(A + B) = A$$

$$AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A \cdot 1 = A$$

$$A + (AB) = AA + AB = A(A + B)$$

$$A + (AB) = A(1 + B) = A \cdot 1 = A$$

- ***χρήση του πίνακα αληθείας***

A	A•B	A+(A•B)
0	0	0
1	B	1

- *Τα θεωρήματα De Morgan είναι πιο σημαντικά στην λογική σχεδίαση όπου συσχετίζονται AND και NOR πύλες, ή OR και NAND πύλες*

Διαδικασία σχεδίασης ψηφιακής λογικής συνάρτησης

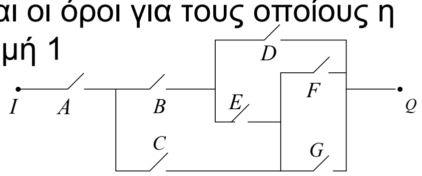
Με τον όρο σχεδιασμός ψηφιακής λογικής συνάρτησης, εννοείται ένας συνδυασμός λογικών πυλών για την πραγματοποίηση της επιθυμητής συνάρτησης, η συμπεριφοράς. Η διαδικασία σχεδίασης περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

- *Σαφής διατύπωση της επιθυμητής συνάρτησης-συμπεριφοράς*
- *Πίνακας αληθείας*
- *Έκφραση της συνάρτησης υπό μορφή μεταβλητών (άλγεβρα Boole)*
- *Κατάλληλη επεξεργασία της συνάρτησης για την εξαγωγή μιας απλούστερης μορφής*
- *Υλοποίηση του ψηφιακού κυκλώματος με πύλες AND, OR και NOT. Σε πολλές περιπτώσεις η υλοποίηση του κυκλώματος μπορεί να γίνει μόνο με πύλες NAND, η μόνο με πύλες NOR.*

Κανονικές μορφές λογικών συναρτήσεων

- *Κανονική μορφή αθροίσματος*

Δημιουργείται από τον πίνακα αληθείας και είναι το λογικό άθροισμα (δηλαδή συνδυάζονται υπό μορφή ***OR***) όρων που είναι εκφράσεις ***AND*** των μεταβλητών εισόδου στην κανονική, ή συμπληρωματική τους μορφή ανάλογα με την τιμή που έχουν (1 ή 0). Οι όροι που συμπεριλαμβάνονται στο λογικό άθροισμα είναι οι όροι για τους οποίους η τελική συνάρτηση έχει τιμή 1



Παράδειγμα

Q=ACF+ACG+ACED+ABD+ABEF+ABEG

Παράδειγμα

F=1
A=0, B=1 & C=1
A=1, B=0 & C=0
A=1, B=0 & C=1

$$F = \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C$$

A	B	C	F	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\overline{A}BC$
1	0	0	1	$A\overline{B}\overline{C}$
1	0	1	1	$A\overline{B}C$
1	1	0	0	
1	1	1	0	

Σύντομη γραφή για την κανονική μορφή αθροίσματος

$$F(ABC) = \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C \qquad F(ABC) = 011 + 100 + 101$$

$$F(ABC) = 3 + 4 + 5 \qquad F(ABC) = \sum(3,4,5)$$

Να γράψετε τις την μορφή αθροίσματος της συνάρτησης XOR

- *Λύση*

Ο πίνακας αληθείας για τη πύλη XOR είναι:

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Για την κανονική μορφή αθροίσματος παίρνουμε τους όρους για F=1:

F=1 A=0 & B=1 δίνει $\overline{A}B$
A=1 & B=0 δίνει $A\overline{B}$

$$F = \overline{A}B + A\overline{B}$$

Παράδειγμα

Δίνεται η λογική συνάρτηση:

$$Q = (A + B + C)(A + \overline{B} + C)(A + \overline{B} + \overline{C})$$

Να γίνει ο πίνακας αληθείας, να γραφεί η κανονική μορφή αθροίσματος, να απλοποιηθεί η σχέση χρησιμοποιώντας την άλγεβρα Boole και να σχεδιαστεί το ψηφιακό κύκλωμα που την υλοποιεί.

Λύση:

A	B	C	$(A+B+C)$	$(A+\overline{B}+C)$	$(A+\overline{B}+\overline{C})$		Q
0	0	0	0	1	1		0
0	0	1	1	1	1	$\overline{A}\overline{B}C$	1
0	1	0	1	0	1		0
0	1	1	1	1	0		0
1	0	0	1	1	1	$A\overline{B}\overline{C}$	1
1	0	1	1	1	1	$A\overline{B}C$	1
1	1	0	1	1	1	$AB\overline{C}$	1
1	1	1	1	1	1	ABC	1

$$Q = \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Απλοποίηση

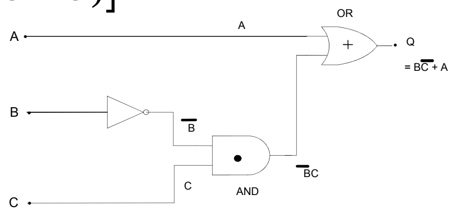
$$Q = \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC + \underbrace{A\overline{B}C}_{\pi\rho\acute{o}\sigma\theta\varepsilon\sigma\eta\ \acute{o}\rho o\upsilon}$$

$$\overline{B}C(A + \overline{A}) + A(\overline{B}\,\overline{C} + B\overline{C} + BC + \overline{B}C) =$$

$$\overline{B}C + A\left[\overline{B}(\overline{C} + C) + B(\overline{C} + C)\right] =$$

$$\overline{B}C + A$$

Ψηφιακό κύκλωμα



Παράδειγμα

- *Να σχεδιαστεί το ψηφιακό κύκλωμα που υλοποιεί τον πίνακα αληθείας:*

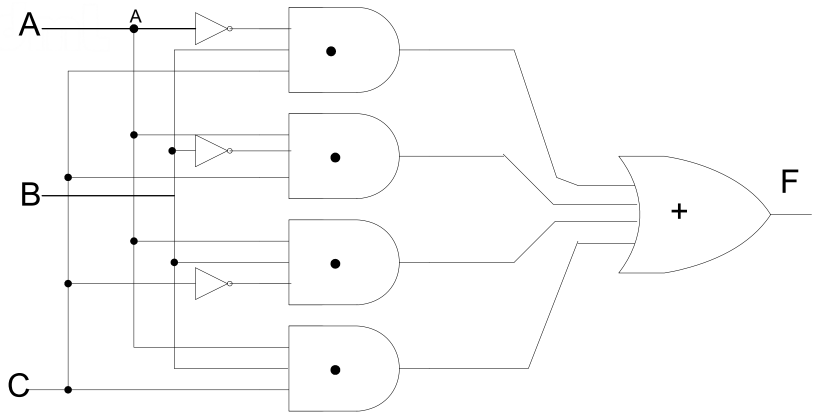
A	B	C	F	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\overline{A}BC$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A\overline{B}C$
1	1	0	1	$AB\overline{C}$
1	1	1	1	ABC

$$F = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Αναλογικα Ψηφιακα

Ψηφιακό κύκλωμα χωρίς απλοποίηση

$$F = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC + ABC$$



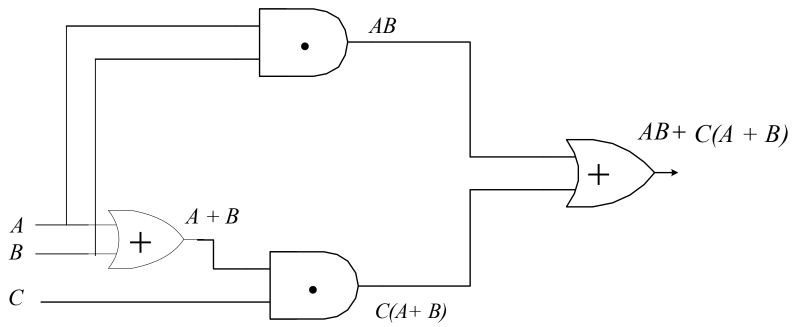
Αναλογικα Ψηφιακα

Ψηφιακό κύκλωμα με απλοποίηση

$$F = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC + ABC$$

$$F = AB(\overline{C} + C) + C(\overline{A}B + A\overline{B} + AB) =$$

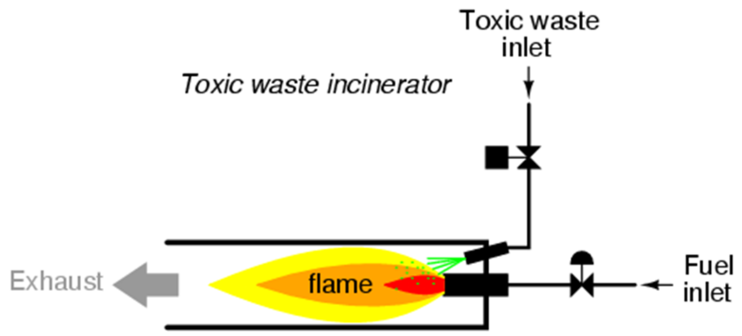
$$AB + C(A + B) \quad \text{αφού} \quad \overline{A}B + A\overline{B} + AB = AB$$



Δρ. Μηχ. Μαραβελάκης Μανόλης – Καθηγητής Εφαρμογών
ΤΕΙ ΚΡΗΤΗΣ – Εργαστήριο Σχεδιομελέτης & Κατεργασιών
Μάθημα 8 – Άλγεβρα Boole

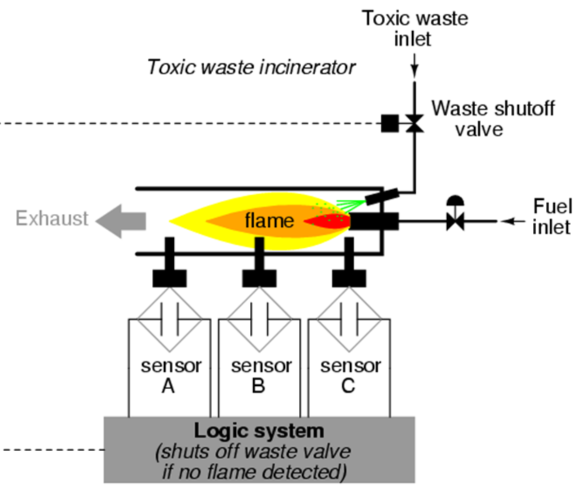
Αναλογικα
Ψηφιακα

Παράδειγμα



Αναλογικα
Ψηφιακα

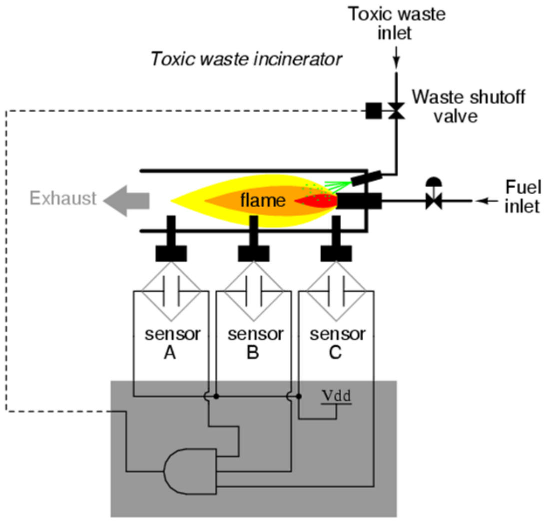
Παράδειγμα



Δρ. Μηχ. Μαραβελάκης Μανόλης – Καθηγητής Εφαρμογών
ΤΕΙ ΚΡΗΤΗΣ – Εργαστήριο Σχεδιομελέτης & Κατεργασιών
Μάθημα 8 – Άλγεβρα Boole

ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ
ΨΗΦΙΑΚΑ

Παράδειγμα



sensor
inputs

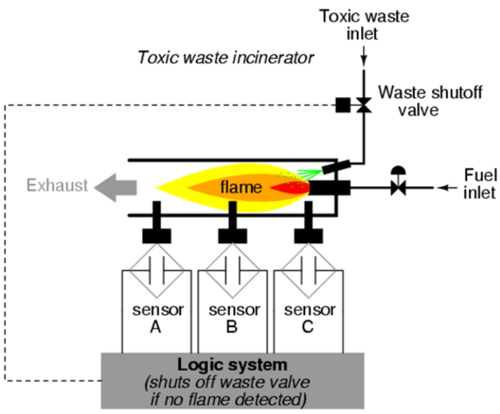
A	B	C	Output
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Output = 0
(close valve)

Output = 1
(open valve)

ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ
ΨΗΦΙΑΚΑ

Παράδειγμα (λειτουργία 2 από 3)



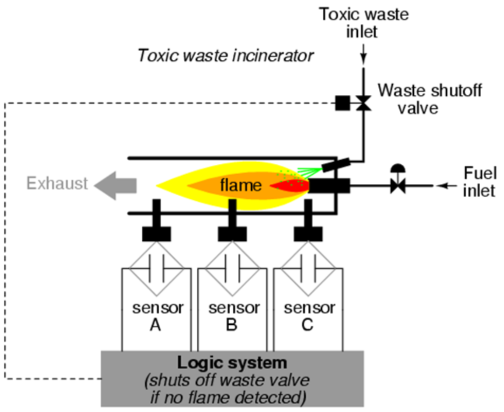
sensor
inputs

A	B	C	Output
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Output = 0
(close valve)

Output = 1
(open valve)

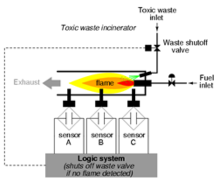
Παράδειγμα (λειτουργία 2 από 3)



sensor inputs

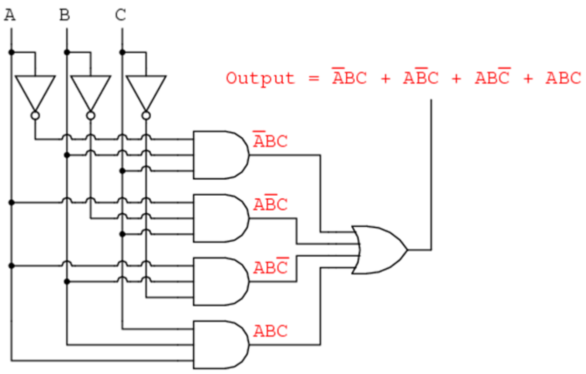
A	B	C	Output	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\overline{A}BC = 1$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A\overline{B}C = 1$
1	1	0	1	$AB\overline{C} = 1$
1	1	1	1	$ABC = 1$

Παράδειγμα (λειτουργία 2 από 3)



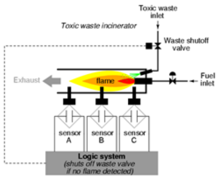
sensor inputs

A	B	C	Output	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\overline{A}BC = 1$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A\overline{B}C = 1$
1	1	0	1	$AB\overline{C} = 1$
1	1	1	1	$ABC = 1$



Output = $\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$

Παράδειγμα (λειτουργία 2 από 3)



$\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$

Factoring **BC** out of 1st and 4th terms

$BC(\overline{A} + A) + A\overline{B}C + AB\overline{C}$

Applying identity $A + \overline{A} = 1$

$BC(1) + A\overline{B}C + AB\overline{C}$

Applying identity $1A = A$

$BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$

Factoring **B** out of 1st and 3rd terms

$B(C + A\overline{C}) + A\overline{B}C$

Applying rule $A + \overline{A}B = A + B$ to the $C + A\overline{C}$ term

$B(C + A) + A\overline{B}C$

Distributing terms

$BC + AB + A\overline{B}C$

Factoring **A** out of 2nd and 3rd terms

$BC + A(B + \overline{B}C)$

Applying rule $A + \overline{A}B = A + B$ to the $B + \overline{B}C$ term

$BC + A(B + C)$

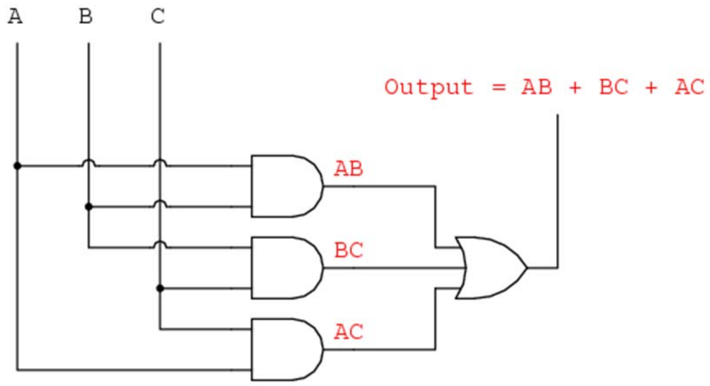
Distributing terms

$BC + AB + AC$

or Simplified result

$AB + BC + AC$

Παράδειγμα (λειτουργία 2 από 3)



ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ
ΨΗΦΙΑΚΑ

Παράδειγμα

(έλεγχος συμφωνίας και των 3 αισθητηρίων)

Output = 0 (close valve)
Output = 1 (open valve)

Output = 0 (sensors agree)
Output = 1 (sensors disagree)

A	B	C	Output (Good flame)	Output (Sensor disagreement)
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

sensor inputs: A, B, C

A	B	C	Output (Good flame)	Output (Sensor disagreement)	
0	0	0	0	0	
0	0	1	0	1	$\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	0	1	$\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	1	1	$\bar{A}BC$
1	0	0	0	1	$A\bar{B}\bar{C}$
1	0	1	1	1	$A\bar{B}C$
1	1	0	1	1	$AB\bar{C}$
1	1	1	1	0	

$$\text{Output} = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C}$$

ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ
ΨΗΦΙΑΚΑ

Παράδειγμα

(έλεγχος συμφωνίας και των 3 αισθητηρίων)

Output = 0 (close valve)
Output = 1 (open valve)

Output = 0 (sensors agree)
Output = 1 (sensors disagree)

sensor inputs: A, B, C

A	B	C	Output (Good flame)	Output (Sensor disagreement)	
0	0	0	0	0	$(A + B + C)$
0	0	1	0	1	
0	1	0	0	1	
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	
1	0	1	1	1	
1	1	0	1	1	
1	1	1	1	0	

A	B	C	Output (Good flame)	Output (Sensor disagreement)	
0	0	0	0	0	$(A + B + C)$
0	0	1	0	1	
0	1	0	0	1	
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	
1	0	1	1	1	
1	1	0	1	1	
1	1	1	1	0	$(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$

ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ
ΨΗΦΙΑΚΑ

Παράδειγμα

(έλεγχος συμφωνίας και των 3 αισθητηρίων)

Output = 0 (close valve)
Output = 1 (open valve)

Output = 0 (sensors agree)
Output = 1 (sensors disagree)

A	B	C	Output (Good flame)	Output (Sensor disagreement)	
0	0	0	0	0	$(A + B + C)$
0	0	1	0	1	
0	1	0	0	1	
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	
1	0	1	1	1	
1	1	0	1	1	
1	1	1	1	0	$(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

sensor inputs: A, B, C

$$\text{Output} = (A + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ
ΨΗΦΙΑΚΑ

Παράδειγμα

(έλεγχος συμφωνίας και των 3 αισθητηρίων)