ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2022

ΤΕΙ Κρήτης
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Κρήτης

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Εισηγητής: Γεώργιος Τζανετόπουλος

Τελικό Διαγώνισμα

Θέμα 1ο Βρείτε την εξίσωση των επιπέδων που είναι παράλληλα στο $E_1: 4x - 4y + 7z - 3 = 0$ κι απέχουν 4 μονάδες από το σημείο $M\ (4,1,-2)$.

Θέμα 2ο **α)** Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$F(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

β) Υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος:

$$\int_{3}^{4} \frac{5}{(x-2)(x+3)} dx$$

Θέμα 3ο Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις: $x(t) = e^t sint$, $y(t) = e^t cost$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

Θέμα 4ο Υπολογίστε το εμβαδόν μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων $f(x) = cosx$ και $g(x) = sinx$, στο διάστημα $[0,2\pi]$.

Θέμα 5ο Υπολογίστε τον όγκο του στερεού το οποίο σχηματίζεται από την περιστροφή της καμπύλης: $x = \sqrt{1+y^3}, y \in [1,2]$ γύρω από τον άξονα των y.

Θέμα 6ο Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι: **α)** φανταστικός και **β)** πραγματικός.

Θέμα 1ο		***1,00***
Θέμα 2ο	**α)**	***1,25***
	β)	***1,25***
Θέμα 3ο		***1,50***
Θέμα 4ο		***1,00***
Θέμα 5ο		***1,50***
Θέμα 6ο	**α)**	***1,25***
	β)	***1,25***
ΣΥΝΟΛΟ		***10,00***

Λύσεις Τελικού Διαγωνίσματος

Θέμα 1ο

Το ζητούμενο επίπεδο, λόγω της υπόθεσης παραλληλίας με το επίπεδο E_1 θα έχει εξίσωση της μορφής:

$$4x - 4y + 7z + \Delta = 0 \;\; (E_2)\,.$$

Από τη συνθήκη της απόστασης παίρνουμε ότι:

$$d(M, E_2) = \frac{|4\cdot 4 - 4\cdot 1 + 7\cdot(-2) + \Delta|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2}} = 4 \Rightarrow \frac{|\Delta - 2|}{\sqrt{81}} = 4 \Rightarrow |\Delta - 2| = 36 \Rightarrow \Delta - 2 = \begin{cases} 36 \\ \text{ή} \\ -36 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{cases} 38 \\ \text{ή} \\ -34 \end{cases}.$$

Άρα υπάρχουν δύο επίπεδα που ικανοποιούν τις υποθέσεις, τα:

$$4x - 4y + 7z + 38 = 0 \; (E_{21}) \qquad \text{και} \qquad 4x - 4y + 7z - 34 = 0 \; (E_{22})\,.$$

Θέμα 2ο

α) Είναι:

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt = \int_1^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt - \int_1^{x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt \Rightarrow F(x) = f(x^2) - f(x)$$

όπου:

$$f(x) = \int_1^{x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt\,.$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

άρα:

$$F'(x) = f'(x^2)\cdot(x^2)' - f'(x) \Rightarrow \boxed{F'(x) = 2x\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}\,.$$

β) Θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση σε απλά κλάσματα ώστε να γράψουμε την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση ως:

$$\frac{5}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \;\; (1)$$

για κάποιες σταθερές A και B. Είναι:

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x + (3A-2B)}{(x-2)(x+3)} \;\; (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι:

$$\left.\begin{matrix} A+B=0 \\ 3A-2B=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A=-B \\ 3A+2A=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} B=-1 \\ A=1 \end{matrix}\right\}.$$

Άρα:

$$\frac{5}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}$$

οπότε:

$$\int_3^4 \frac{5}{(x-2)(x+3)}dx = \int_3^4 \left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\right]dx = \int_3^4 \frac{1}{x-2}dx - \int_3^4 \frac{1}{x+3}dx = \{ln(x-2)\}_{x=3}^{x=4} - \{ln(x+3)\}_{x=3}^{x=4}$$

$$= ln(4-2) - ln(3-2) - ln(4+3) + ln(3+3) = ln2 - ln1 - ln7 + ln6 = (ln2 + ln6) - ln7 =$$

$$= ln12 - ln7 = ln\frac{12}{7}.$$

Θέμα 3ο

Το μήκος της παραμετρικής καμπύλης δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{S} = \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

όπου:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(e^t sint) = e^t sint + e^t cost \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t(sint + cost)$$

και

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(e^t cost) = e^t cost - e^t sint \Rightarrow \frac{dy}{dt} = e^t(cost - sint)$$

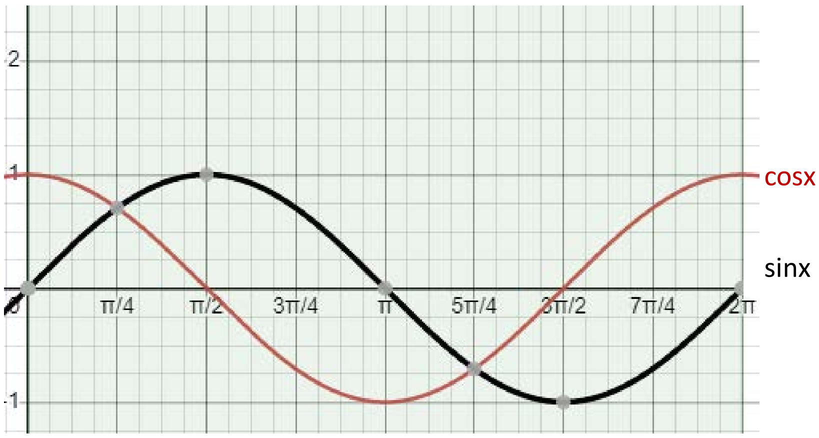
οπότε:

$$\mathcal{S} = \int_0^\pi \sqrt{(e^t(sint+cost))^2 + (e^t(cost-sint))^2}\,dt = \int_0^\pi \sqrt{e^{2t}[(sint+cost)^2 + (cost-sint)^2]}\,dt =$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{e^{2t}}\sqrt{[(sint+cost)^2 + (cost-sint)^2]}dt = \int_0^\pi e^t\sqrt{2sin^2t + 2cos^2t}dt = \int_0^\pi e^t\sqrt{2(sin^2t + cos^2t)}dt =$$

$$= \int_0^\pi e^t\sqrt{2}dt = \sqrt{2}\int_0^\pi e^t\,dt = \sqrt{2}[e^t]_{t=0}^{t=\pi} \Rightarrow \boxed{\mathcal{S} = \sqrt{2}[e^\pi - 1]}.$$

Θέμα 4ο



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\int_0^{2\pi} |cosx - sinx|dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |cosx - sinx|dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |cosx - sinx|dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} |cosx - sinx|dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (cosx - sinx)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (sinx - cosx)\, dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (cosx - sinx)dx =$$

$$= \{sinx + cosx\}_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} + \{-cosx - sinx\}_{x=\frac{\pi}{4}}^{x=\frac{5\pi}{4}} + \{sinx + cosx\}_{x=\frac{5\pi}{4}}^{x=2\pi} =$$

$$= \left(sin\frac{\pi}{4} + cos\frac{\pi}{4} - sin0 - cos0\right) + \left(-cos\frac{5\pi}{4} - sin\frac{5\pi}{4} + cos\frac{\pi}{4} + sin\frac{\pi}{4}\right) + \left(sin2\pi + cos2\pi - sin\frac{5\pi}{4} - cos\frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(0 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{2\pi} |cosx - sinx|dx = 4\sqrt{2}}.$$

Θέμα 5ο Ο παραγόμενος από την περιστροφή περί τον y άξονα όγκος δίνεται από:

$$\mathcal{V} = \pi \int_1^2 \left(\sqrt{1 + y^3}\right)^2 dy = \pi \int_1^2 (1 + y^3)dy = \pi \left\{y + \frac{y^4}{4}\right\}_{y=1}^{y=2} = \pi \left\{2 - 1 + \frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right\} = \pi \left\{6 - \frac{5}{4}\right\} = \frac{19\pi}{4}.$$

Θέμα 6ο

Αν $z = x + yi$, τότε: $\dfrac{z-1}{z-2i} = \dfrac{(x-1)+yi}{x+(y-2)i} = \dfrac{(x^2 - x + y^2 - 2y) + i(2x+y-2)}{x^2+(y-2)^2}$

$$= \frac{x^2 - x + y^2 - 2y}{x^2 + (y-2)^2} + \frac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2} i .$$

Επομένως:

α) Ο αριθμός $\dfrac{z-1}{z-2i}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $\dfrac{x^2 - x + y^2 - 2y}{x^2+(y-2)^2} = 0$, δηλαδή, αν και μόνο αν $x^2 - x + y^2 - 2y = 0$ και $x^2 + (y-2)^2 \neq 0$ ή, ισοδύναμα,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4} \quad \text{και} \quad (x, y) \neq (0,2).$$

Άρα, το σύνολο των εικόνων του z είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο $K = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ και ακτίνα $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, με εξαίρεση το σημείο $(0,2)$.

β) Ο αριθμός $\dfrac{z-1}{z-2i}$ είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $\dfrac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2} = 0$, δηλαδή, αν και μόνο αν $2x + y - 2 = 0$ και $x^2 + (y-2)^2 \neq 0$.

Άρα, το σύνολο των εικόνων του z είναι τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $2x + y - 2 = 0$, με εξαίρεση το σημείο $(0,2)$.