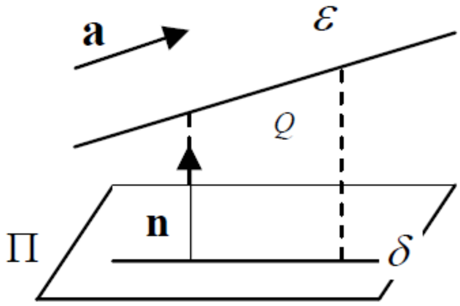
Θέμα 1ο : Έστω Q το επίπεδο που ορίζεται από την δοσμένη ευθεία (ε) και την προβολή της, ας είναι, (δ) πάνω στο επίπεδο Π. Τότε $\delta = \Pi \cap Q$.



Ένα κάθετο διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{u}}$ προς το επίπεδο Q είναι κάθετο προς το $\vec{\boldsymbol{a}} = (1,2,1)$ το οποίο είναι παράλληλο προς την ευθεία (ε) αλλά και προς το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο Π $\vec{\boldsymbol{n}} = (1,-2,3)$. Συνεπώς είναι:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{n}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 8\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k} \Longrightarrow \vec{\boldsymbol{u}} = (8,-2,-4).$$

οπότε αν $\overrightarrow{\boldsymbol{r_0}} = OP_0 = (1,0,3)$ είναι η διανυσματική ακτίνα του σημείου $P_0(1,0,3)$ από το οποίο διέρχεται η ευθεία (ε), (άρα το P_0 ανήκει και στο επίπεδο Q) η εξίσωση του επιπέδου Q δίνεται από:

$$(\vec{\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r_0}}) \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y-0, z-3) \cdot (8,-2,-4) = 0 \Leftrightarrow 8(x-1) - 2y - 4(z-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x - y - 2z + 2 = 0 \; (Q)$$

Επομένως:

$$\delta: \begin{Bmatrix} x - 2y + 3z - 3 = 0 \\ 4x - y - 2z + 2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x - 2y = -3z + 3 \\ 4x - y = 2z - 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = z - 1 \\ y = 2z - 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{x + 1 = \frac{y+2}{2} = z \; (\delta)}.$$

Θέμα 2ο : Το επίπεδο Π_1 έχει κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}} = (1,3,-1)$ ενώ το επίπεδο Π_2 έχει κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}} = (3,-2,1)$. Το ζητούμενο επίπεδο έχει κάθετο διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{n}}$ το οποίο είναι κάθετο προς τα $\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$ και $\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}$. Άρα:

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \overrightarrow{\boldsymbol{n_1}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{n_2}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 11\boldsymbol{k} \Longrightarrow \vec{\boldsymbol{n}} = (1,-4,-11).$$

Αν $\overrightarrow{\boldsymbol{r_0}} = OA = (1,2,-3)$ είναι η διανυσματική ακτίνα του σημείου $A(1,2,-3)$ από το οποίο διέρχεται το προς εύρεση επίπεδο θα έχουμε ότι η εξίσωσή του δίνεται από:

$$(\vec{\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r_0}}) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y-2, z+3) \cdot (1,-4,-11) = 0 \Leftrightarrow x - 1 - 4(y-2) - 11(z+3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x - 4y - 11z - 26 = 0}$$

Θέμα 3ο :

Α) **i)** Από υπόθεση, $(I\Delta 1)$, πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της με e^{-x} παίρνουμε ότι $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^{-x}h'(x) = e^{-x}h(x) + e^{-x}(x + e^x - 1) \Leftrightarrow e^{-x}h'(x) - e^{-x}h(x) = xe^{-x} + 1 - e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [e^{-x}h(x)]' = xe^{-x} + 1 - e^{-x} \Leftrightarrow \int [e^{-x}h(x)]'\, dx = \int (xe^{-x} + 1 - e^{-x})\, dx \Leftrightarrow$$

$$e^{-x}h(x) = \int xe^{-x}\, dx + \int 1\, dx + \int (-e^{-x})\, dx = -xe^{-x} - e^{-x} + x + e^{-x} + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}h(x) = -xe^{-x} + x + c \Leftrightarrow h(x) = \frac{-xe^{-x} + x + c}{e^{-x}} \Leftrightarrow \boxed{h(x) = -x + xe^{x} + ce^{x}}\ (1)$$

Από υπόθεση $(I\Delta 2)$ και τη σχέση (1), έχουμε για $x = 0$:

$$h(0) = -0 + 0e^0 + ce^0 \Leftrightarrow \boxed{c = 0}\ (2)$$

Τελικά από τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε ότι: $\boxed{h(x) = xe^x - x}$.

ii) Είναι: $h(x) = xe^x - x \Longrightarrow h(x) = x(e^x - 1)$. Αν $x \geq 0, e^x \geq 1 \Longrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Longrightarrow x(e^x - 1) \geq 0$ $\Longrightarrow h(x) \geq 0$. Αν $x < 0, e^x < 1 \Longrightarrow e^x - 1 < 0 \Longrightarrow x(e^x - 1) > 0 \Longrightarrow h(x) > 0$. Συνεπώς $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0$.

B) Έστω $g(x) = 1 - f(x), \forall\, x \in [0,1]$. Τότε:

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \{1 - f(x)\}dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 f(x)dx = 1 - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{\int_0^1 g(x)dx = 0}.$$

Επίσης είναι από υπόθεση:

$$\int_0^1 [1 - f(x)]e^{-f(x)}\, dx \leq 0 \Longrightarrow \int_0^1 g(x)e^{g(x)-1}\, dx \leq 0 \Longrightarrow \frac{1}{e}\int_0^1 g(x)e^{g(x)}\, dx \leq 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 g(x)e^{g(x)}\, dx \leq 0 = \int_0^1 g(x)dx \Longrightarrow \int_0^1 g(x)e^{g(x)}\, dx \leq \int_0^1 g(x)dx \Longrightarrow \int_0^1 \left\{g(x)e^{g(x)} - g(x)\right\} dx \leq 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 g(x)\left\{e^{g(x)} - 1\right\} dx \leq 0 \Longrightarrow \int_0^1 h\big(g(x)\big)\, dx \leq 0\ (1).$$

Η συνάρτηση $(h \circ g)(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και ισχύει ότι $(h \circ g)(x) \geq 0, \forall x \in [0,1]$ (από το ερώτημα Α). Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $(h \circ g)(x)$ δεν μηδενίζεται παντού στο διάστημα $[0,1]$ θα έχουμε ότι: $\int_0^1 h\big(g(x)\big)\, dx > 0$ πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την σχέση (1). Άρα $(h \circ g)(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$. Συνεπώς $g(x) = 0, \forall x \in [0,1]$. Απ' όπου: $1 - f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$, ή τελικά $f(x) = 1, \forall x \in [0,1]$.

Θέμα 4ο : Είναι:

$$x^2(t) = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 = t^2 + 2t\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 \Longrightarrow x^2(t) = y(t) + 2 \Longrightarrow y = x^2 - 2.$$

Άρα:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{και} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2.$$

Οπότε η τιμή της δοσμένης παράστασης γίνεται:

$$S = (x^2 - 4)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 2(x^2 - 4) + x \cdot 2x - 4(x^2 - 2) \Longrightarrow S = 2x^2 - 8 + 2x^2 - 4x^2 + 8 \Longrightarrow \boxed{S = 0}.$$

Θέμα 5ο : Είναι:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right) \Longrightarrow \frac{df}{dx} = x \qquad \text{και} \qquad \left(\frac{df}{dx}\right)^2 = x^2.$$

Οπότε το ζητούμενο μήκος της καμπύλης $\mathcal{C}_f$ ανάμεσα στα σημεία $A(0,3)$ και $B(1,\frac{7}{2})$ δίνεται από:

$$\mathcal{S} = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]_{x=0}^{x=1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathcal{S} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + ln\left(1+\sqrt{2}\right) - 0\right] \Longrightarrow \boxed{\mathcal{S} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}ln\left(1+\sqrt{2}\right)}.$$

Θέμα 6ο : Βρίσκουμε τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2 - 4$ και της ευθείας $y = \frac{1}{2}x + 1$. Είναι:

$$x^2 - 4 = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 10 = 0 \Leftrightarrow (x+2)\left(x - \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = \frac{5}{2}.$$

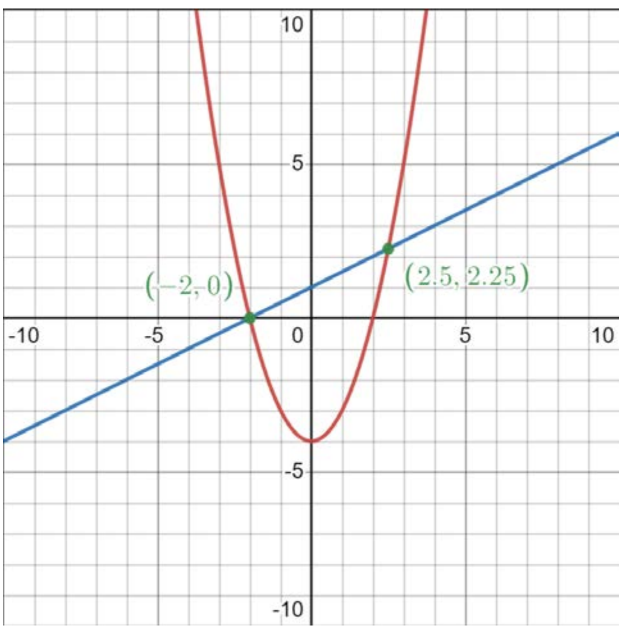
Τότε το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από:

$$\mathcal{E} = \int_{-2}^{\frac{5}{2}} \left|(x^2 - 4) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right| dx = \int_{-2}^{\frac{5}{2}} \left|x^2 - \frac{1}{2}x - 5\right| dx = \int_{-2}^{\frac{5}{2}} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + 5\right) dx$$

καθώς το τριώνυμο $x^2 - \frac{1}{2}x - 5$ είναι αρνητικό εντός του διαστήματος των ριζών $\left[-2, \frac{5}{2}\right]$.

Συνεπώς:

$$\mathcal{E} = -\int_{-2}^{\frac{5}{2}} x^2 dx + \frac{1}{2}\int_{-2}^{\frac{5}{2}} x dx + 5\int_{-2}^{\frac{5}{2}} dx = \cdots = \frac{243}{16}.$$



Θέμα 7ο : Η δοσμένη καμπύλη τέμνει τον άξονα των x στα σημεία με τετμημένες $x=0$ και $x=3$.

Οπότε ο ζητούμενος όγκος είναι:

$$\mathcal{V}=\pi\int_0^3[f(x)]^2dx=\pi\int_0^3\frac{x}{9}(x-3)^2dx=\frac{\pi}{9}\int_0^3 x(x^2-6x+9)dx=\frac{\pi}{9}\int_0^3(x^3-6x^2+9x)dx=$$

$$=\frac{\pi}{9}\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=3}=\frac{\pi}{9}\left[\frac{81}{4}-54+\frac{81}{2}-0\right]=\frac{3\pi}{4}.$$