

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Εισηγητής: Γεώργιος Τζανετόπουλος

Τελικό Διαγώνισμα

Θέμα 1^ο Βρείτε την προβολή της ευθείας (ε): $x - 1 = \frac{y}{2} = z - 3$ πάνω στο επίπεδο (Π): $x - 2y + 3z - 3 = 0$.

Θέμα 2^ο Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $A(1,2,-3)$ και είναι κάθετο στα επίπεδα

$$(\Pi_1): x + 3y - z = 0 \text{ και } (\Pi_2): 3x - 2y + z - 5 = 0.$$

Θέμα 3^ο **A.** Έστω παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση h , η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$(I\Delta 1): h'(x) = h(x) + x + e^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(I\Delta 2): h(0) = 0$$

- i) Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h .
 ii) Να αποδείξετε ότι $h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

B. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύουν:

i) $\int_0^1 f(x) dx = 1$ και
 ii) $\int_0^1 [1 - f(x)] e^{-f(x)} dx \leq 0$.

Δείξτε ότι $f(x) = 1, \forall x \in [0,1]$.

Θέμα 4^ο Δίνονται οι ακόλουθες παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης:

$$x(t) = t + \frac{1}{t}, t \neq 0$$

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$$

Δείξτε ότι η $\frac{d^2y}{dx^2}$ είναι σταθερή και προσδιορίστε την τιμή της παράστασης $S = (x^2 - 4) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y$.

Θέμα 5^ο Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης με εξίσωση: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$ ανάμεσα στα σημεία $A(0,3)$ και $B(1, \frac{7}{2})$.

Θέμα 6^ο Υπολογίστε το εμβαδόν που περικλείεται από: την παραβολή $y = x^2 - 4$ και την ευθεία $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Θέμα 7^ο Υπολογίστε τον όγκο του στερεού το οποίο σχηματίζεται από την περιστροφή της καμπύλης $9y^2 = x(x - 3)^2$ γύρω από τον άξονα των x .

Θέμα 1ο		1,00
Θέμα 2ο		1,00
Θέμα 3ο	A.	1,00
	B.	1,00
Θέμα 4ο		1,50
Θέμα 5ο		1,50
Θέμα 6ο		1,50
Θέμα 7ο		1,50
ΣΥΝΟΛΟ		10,00