ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020-21 *ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ*

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Εισηγητής: Γεώργιος Τζανετόπουλος *Τελικό Διαγώνισμα*

Θέμα 1º Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $P_0(3,-2,4)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\boldsymbol{p}=(2,2,3)$.

Θέμα 2º Βρείτε την γωνία μεταξύ των ευθειών:

$$l_1: 2x-y+3z=0, 3x+2y-z+7=0$$

$$l_2: x+y-2z+3=0, 4x-y+3z+7=0$$

Θέμα 3º Να λυθεί το επόμενο σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x-\alpha y+z=1 \\ x-y+z=\alpha \\ 3x-y-z=2 \end{cases}$$

Θέμα 4º **i)** Αν ισχύει ότι: $2x^2+5x+3 \leq f(x) \leq 3x^2+3x+4, \forall x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=1$.

ii) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(xy)=x^2 f(y)+y^2 f(x), \forall x,y \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι: $f''(x)-f''(y)=\frac{2f(x)}{x^2}-\frac{2f(y)}{y^2}$.

Θέμα 5º Αν η συνάρτηση $y=f(x)$ ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$x(t)=\alpha\left(t+\frac{1}{t}\right)$$
$$y(t)=\alpha\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

με $t \neq -1, 0, 1$. Αποδείξτε ότι: $y^3 \frac{d^2y}{dx^2}=-4\alpha^2$.

Θέμα 6º Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$ **ii)** $\int (\ln x)^2 dx$ **iii)** $\int \frac{1}{x^2-1} dx$

Θέμα 7º **i)** Υπολογίστε το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες $y=e^{\frac{x}{2}}, y=\frac{1}{x^2}$.

ii) Υπολογίστε το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται από την περιστροφή της καμπύλης $9y^2=x(-x^2)$ γύρω από τον άξονα των x.

Θέμα 8º Η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z κινείται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα 2. Να δείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w=z^2+3i$ κινείται επίσης σε κύκλο τον οποίο να προσδιορίσετε.

ΘΕΜΑ 1ο	ΘΕΜΑ 2ο	ΘΕΜΑ 3ο	ΘΕΜΑ 4ο			
1,0	1,25	1,25	i)	0,5	ii)	0,5
ΘΕΜΑ 5ο	ΘΕΜΑ 6º			ΘΕΜΑ 7ο		ΘΕΜΑ 8ο
1,0	i) 0,5	ii) 0,5	iii) 0,5	i) 1,0	ii) 1,0	1,0