# Κεφάλαιο 10$^o$

# Μέτρηση αυτεπαγωγής

## 10.1 Ορισμός αυτεπαγωγής

Σύμφωνα με το νόμο Faraday, αν σε ένα ακίνητο κύκλωμα (π.χ. ένα πηνίο) μεταβάλλεται η μαγνητική ροή με το χρόνο, τότε επάγεται σε αυτό ΗΕΔ. Αν η μεταβολή της ροής οφείλεται σε μεταβολή του ρεύματος του ίδιου του κυκλώματος, τότε παρουσιάζεται το εξής φαινόμενο: η μεταβολή του ρεύματος σε ένα πηνίο προκαλεί επαγόμενη ΗΕΔ σε αυτό. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται αυτεπαγωγή.

Επομένως, σε ένα κύκλωμα μπορούμε να έχουμε επαγόμενη ΗΕΔ λόγω μεταβολής του ρεύματος που το διαρρέει. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πηνίο με N σπείρες που διαρρέεται από ρεύμα I, οπότε σαν αποτέλεσμα έχουμε κάθε σπείρα να διαπερνάται από μαγνητική ροή $\Phi_B$. Ορίζουμε τότε ένα συντελεστή αυτεπαγωγής L τέτοιο ώστε $L=N\Phi_B/I$, οπότε η επαγόμενη ΗΕΔ δίνεται από τη σχέση:

$$N\frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{di}{dt} \Rightarrow E = -L\frac{di}{dt} \qquad (10.1)$$

Η πολικότητα της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή βρίσκεται με τον κανόνα του Lenz, δηλαδή, αν το αρχικό ρεύμα αυξάνει, το επαγόμενο ρεύμα έχει αντίθετη φορά από το αρχικό και αντίστροφα. Ο συντελεστής αυτεπαγωγής έχει μονάδες Henry και ένα τμήμα του κυκλώματος με αυτεπαγωγή ονομάζεται πηνίο, με την τάση στα άκρα του πηνίου να έχει μέτρο $V=L(di/dt)$. Η αυτεπαγωγή ενός πηνίου εξαρτάται από το μέγεθος, τη μορφή και τον αριθμό των σπειρών. Για N πυκνές σπείρες, το L είναι ανάλογο του $N^2$. Αν η μαγνητική ροή είναι σε περιοχή με σιδηρομαγνητικό υλικό υπάρχει σημαντική μεταβολή του L, ενώ σε άλλα υλικά η αλλαγή είναι ελάχιστη.

Κατά την σύνδεση πηνίων, η ισοδύναμη αυτεπαγωγή υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως η ωμική αντίσταση. Κατά την σύνδεση σε σειρά N πηνίων, η ολική αυτεπαγωγή θα δίνεται από την σχέση:

$$L_{\iota\sigma o\delta} = L_1 + L_2 + \ldots\ldots + L_N \qquad (10.2)$$

Αντίστοιχα, η παράλληλη σύνδεση N πηνίων δίνει:

$$\frac{1}{L_{\iota\sigma o\delta}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{L_N} \qquad (10.3)$$

## 10.2 Κύκλωμα R-L στο συνεχές.

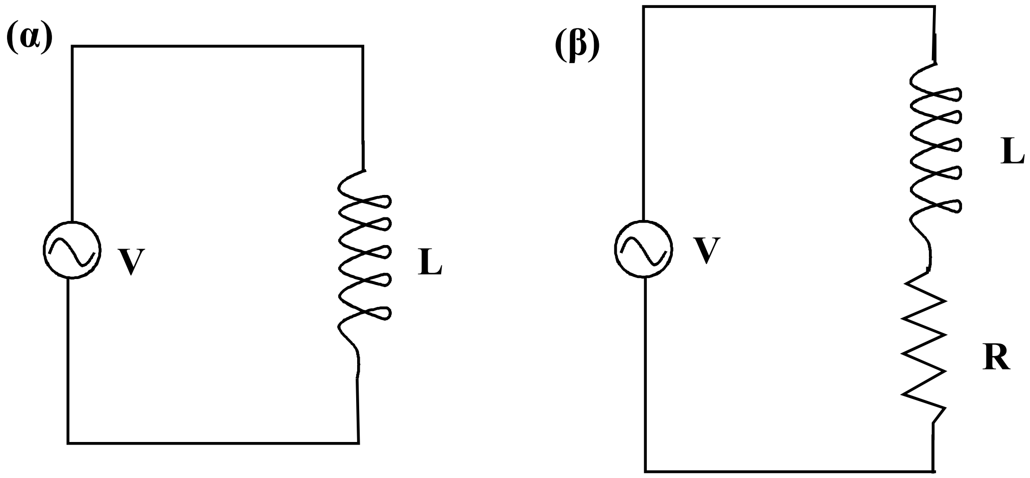
Η παρουσία αυτεπαγωγής σε ένα κύκλωμα συνεχούς ρεύματος έχει σαν αποτέλεσμα την εξάρτηση των ηλεκτρικών μεγεθών από το χρόνο. Σαν παράδειγμα, σε κύκλωμα με αυτεπαγωγή L, ωμική αντίσταση R και πηγή E, το ρεύμα δεν παίρνει αμέσως την μέγιστη του τιμή αλλά να αυξάνεται ακολουθώντας μία εξίσωση της μορφής:

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right) \qquad (10.4)$$

Δηλαδή, η αυτεπαγωγή σε κύκλωμα συνεχούς έχει σαν αποτέλεσμα το ρεύμα να πλησιάζει ασυμπτωτικά την τελική του τιμή. Όσο μεγαλύτερη είναι η αυτεπαγωγή, τόσο καθυστερεί το ρεύμα να πάρει την τελική του τιμή, με την διαδικασία να εξαρτάται από το λόγο L/R. Ὅμως η τελική τιμή του ρεύματος δεν εξαρτάται από την αυτεπαγωγή αλλά μόνο από την ωμική αντίσταση.

**10.3 Κύκλωμα R-L στο εναλλασσόμενο.**

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια την συμπεριφορά ενός κυκλώματος που περιέχει αυτεπαγωγή στο εναλλασσόμενο. Αρχικά, ας δούμε την περίπτωση κυκλώματος που




**Σχήμα 10.1 Κύκλωμα L (α) και RL (β) στο εναλλασσόμενο**

περιλαμβάνει μόνο ένα ιδανικό πηνίο L και μία πηγή τροφοδοσίας $V=V_0e^{j\omega t}$ (σχήμα 10.1α). Εφαρμόζοντας τον νόμο τάσεων Kirchhoff στο κύκλωμα του σχήματος 10.1α έχουμε:

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{di}{dt} = 0 \qquad (10.5)$$

Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I=Ae^{j\omega t}$ (όπου η πληροφορία φάσης περιέχεται στο A και λόγω γραμμικότητας του κυκλώματος το ρεύμα έχει την ίδια συχνότητα με την τάση), το A μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση (10.5):

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{d}{dt}\left(Ae^{j\omega t}\right) = 0 \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - j\omega L A e^{j\omega t} = 0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{j\omega L} \qquad (10.6)$$

Δηλαδή το ρεύμα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$I = \frac{V_0}{j\omega L} e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\omega L} e^{j\omega t - \pi/2} \qquad (10.7)$$

Από την εξίσωση (10.7) φαίνεται ότι το ρεύμα καθυστερεί κατά π/2 σε σχέση με την τάση. Επίσης η ποσότητα ωL παρουσιάζει ρόλο αντίστοιχο με την ωμική αντίσταση (ισούται με το λόγο τάση/ρεύμα) και ονομάζεται επαγωγική αντίσταση που στη μιγαδική μορφή δίνεται από $x_L = j\omega L$. Όμως η συμπεριφορά αυτή εμφανίζεται μόνο στο εναλλασσόμενο καθώς στο συνεχές (ω=0) η τιμή της επαγωγικής αντίστασης είναι μηδέν.

Στη συνέχεια ας θεωρήσουμε στο κύκλωμα και ωμική αντίσταση R (σχήμα 10.1β), οπότε εφαρμόζοντας τον νόμο τάσεων Kirchhoff έχουμε:

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{di}{dt} = iR \qquad (10.8)$$

Αν υποθέσουμε ξανά ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I = Ae^{j\omega t}$, το A μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση (10.8):

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{d}{dt}\left(Ae^{j\omega t}\right) = iR \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - j\omega L A e^{j\omega t} = RAe^{j\omega t} \Rightarrow A = \frac{V_0}{R + j\omega L} \qquad (10.9)$$

Δηλαδή το ρεύμα τώρα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$I = \frac{V_0}{R + j\omega L} e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j\omega t - \varphi} \qquad (10.10)$$

όπου φ είναι γωνία τέτοια ώστε εφφ=ωL/R. Από την εξίσωση (10.10) φαίνεται ότι στο κύκλωμα RL, η αντίσταση του κυκλώματος που ονομάζεται εμπέδηση, είναι συνδυασμός της ωμικής και της επαγωγικής αντίστασης και δίνεται από τη σχέση $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ (η μιγαδική μορφή είναι $z_L = R + j\omega L$), ενώ το ρεύμα καθυστερεί σε σχέση με την τάση κατά γωνία φ με εφφ=ωL/R.

## **10.4 Μέτρηση της αυτεπαγωγής.**

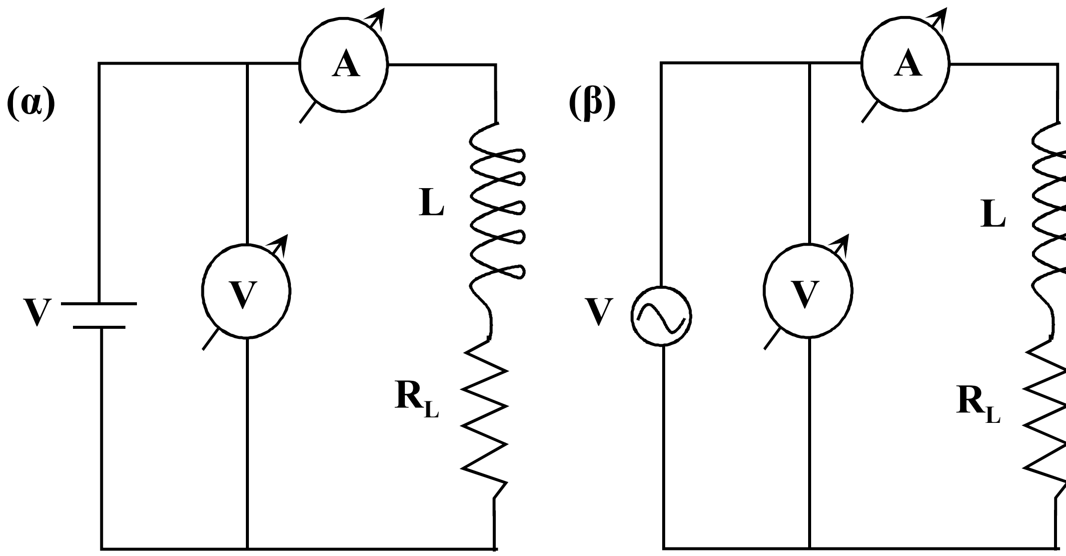
### 10.4.1 Με βολτόμετρο και αμπερόμετρο.

Η μέτρηση μιας αυτεπαγωγής μπορεί απλά να επιτευχθεί με αμπερόμετρο και βολτόμετρο όταν μετρηθούν τα ηλεκτρικά μεγέθη του κυκλώματος διαδοχικά για συνεχή και εναλλασσόμενη τάση. Έστω άγνωστο πηνίο L, $R_L$ του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε τα χαρακτηριστικά. Αρχικά, όταν εφαρμοστεί συνεχής τάση στο κύκλωμα (σχήμα 10.2α) , το ρεύμα εξαρτάται μόνο από την ωμική αντίσταση $R_L$ και θα ισχύει:

$$R_L = \frac{V_{DC}}{I_{DC}} \qquad (10.11)$$

Επομένως, με την χρήση συνεχούς τάσης, υπολογίζεται απ' ευθείας από τις ενδείξεις των οργάνων η ωμική αντίσταση $R_L$. Αντίστοιχα, στο εναλλασσόμενο (σχήμα 10.2β), το ρεύμα θα εξαρτάται από την εμπέδηση η οποία θα δίνεται από τη σχέση:

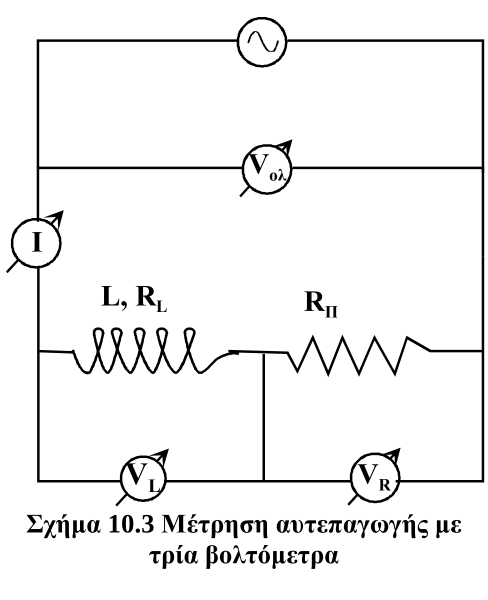
$$z_L = \frac{V_{AC}}{I_{AC}} \qquad (10.12)$$



**Σχήμα 10.2 Μέτρηση αυτεπαγωγής με βολτόμετρο και αμπερόμετρο**

Με συνδυασμό των σχέσεων (10.11) και (10.12) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $z_L = \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2}$ , η αυτεπαγωγή υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{V_{AC}}{I_{AC}}\right)^2 - \left(\frac{V_{DC}}{I_{DC}}\right)^2} \qquad (10.13)$$



**Σχήμα 10.3 Μέτρηση αυτεπαγωγής με τρία βολτόμετρα**

Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι η μέθοδος αυτή μέτρησης της αυτεπαγωγής δεν συνίσταται για πηνία με σιδηροπυρήνα.

10.4.2 Με τρία βολτόμετρα

Μία άλλη μέθοδος μέτρησης της αυτεπαγωγής είναι η σύγκριση της τάσης στα άκρα ενός πηνίου L, $R_L$ με τη τάση στα άκρα μιας γνωστής πρότυπης αντίστασης $R_Π$. Η διάταξη (σχήμα 10.3) απαιτεί συνολικά τρία βολτόμετρα με τα οποία μετράμε τις τάσεις στα άκρα του πηνίου $V_L$, της αντίστασης $V_R$ και την συνολική $V_{ολ}$ και ένα αμπερόμετρο με το οποίο μετράμε το ολικό ρεύμα I. Με γνωστά τα $V_L$, $V_R$, $V_{ολ}$ και I θα ισχύει:

$$V_R = IR_Π \qquad V_L = Iz_L \qquad V_{ολ} = Iz \qquad (10.14)$$

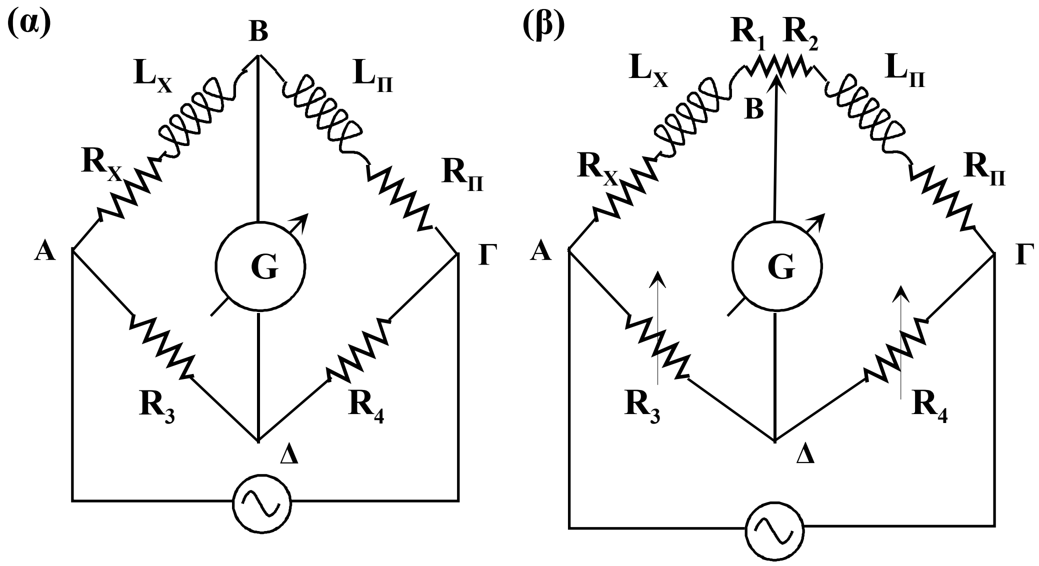
όπου:

$$z_L = \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2}\ ,\ z = \sqrt{(R_Π + R_L)^2 + (\omega L)^2} \qquad (10.15)$$

Με λύση των εξισώσεων (10.14) και (10.15) μπορούμε να υπολογίσουμε τα $R_L$, L από τις σχέσεις:

$$R_L = \frac{1}{2I^2 R_Π}\left(V_{ολ}^2 - V_R^2 - V_L^2\right)$$
$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{V_L}{I}\right)^2 - R_L^2} \qquad (10.16)$$

10.4.3 Με γέφυρα




**Σχήμα 10.4 Μέτρηση αυτεπαγωγής με γέφυρα**

Η γέφυρα Wheatstone αποτελεί την πιο ευαίσθητη μέθοδο μέτρησης αυτεπαγωγής. Για την περίπτωση αυτή, έχουμε εναλλασσόμενη πηγή και δύο από τις αντιστάσεις έχουν αντικατασταθεί αντίστοιχα από το άγνωστο πηνίο $R_X$, $L_X$ και ένα γνωστό πρότυπο πηνίο $R_Π$, $L_Π$ (σχήμα 10.4α). Στην περίπτωση ισορροπίας, θα ισχύουν: $I_{AB}=I_{BΓ}$, $I_{AΔ}=I_{ΔΓ}$, $V_{AB}=V_{AΔ}$, $V_{ΓB}=V_{ΓΔ}$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει:

$$\frac{V_{AB}}{V_{BΓ}} = \frac{V_{AΔ}}{V_{ΓΔ}} \Rightarrow \frac{I_{AB}Z_X}{I_{BΓ}Z_Π} = \frac{I_{AΔ}R_3}{I_{ΓΔ}R_4} \Rightarrow \frac{R_X + j\omega L_X}{R_Π + j\omega L_Π} = \frac{R_3}{R_4} \Rightarrow$$

$$R_X = R_Π \frac{R_3}{R_4} \qquad L_X = L_Π \frac{R_3}{R_4}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι τα στοιχεία του άγνωστου πηνίου μπορούν να βρεθούν από το γνωστό πηνίο και τις δύο άλλες αντιστάσεις της γέφυρας. Στην πράξη, για να ισορροπήσει η γέφυρα πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα μεταβολής όχι μόνο των $R_3$ ή $R_4$ αλλά και των $R_X$, $R_\Pi$. Για να το πετύχουμε αυτό, η γέφυρα έχει τη μορφή του σχήματος 10.4β όπου έχει προστεθεί μία αντίσταση R με δυνατότητα μεσαίας λήψης έτσι ώστε $R=R_1+R_2$. Μετακινώντας την μεσαία λήψη γίνεται εφικτή η μεταβολή της ωμικής αντίστασης των γραμμών ΑΒ και ΒΓ και επιτυγχάνεται ευκολότερα η ισορροπία της γέφυρας. Σε ισορροπία θα ισχύει:

$$R_X + R_1 = (R_\Pi + R_2)\frac{R_3}{R_4} \qquad L_X = L_\Pi \frac{R_3}{R_4}$$

**<u>10.5 Παραδείγματα.</u>**

1) Αν σε ένα κύκλωμα η τάση και το ρεύμα δίνονται από τις σχέσεις:

$$V=150ημ(500t+10°),\ I=13.42ημ(500t-53.4°)$$

να βρείτε τα στοιχεία του κυκλώματος.

Αρχικά θα βρούμε το είδος του κυκλώματος από την διαφορά φάσης τάσης-ρεύματος. Έχουμε $Δφ=φ_V-φ_I=10°-(-53.4°)=63.4°$. Δηλαδή η τάση προηγείται του ρεύματος και το κύκλωμα είναι RL. Η εμπέδηση του θα είναι:

$$z = \frac{V_0}{I_0} = \frac{150}{13.4} = 11.18Ω$$

Τα R, L μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις:

$$R = zσυν\varphi = 11.18συν63.4^\circ = 5Ω$$

$$L = \frac{1}{ω}\sqrt{z^2 - R^2} = \frac{1}{500}\sqrt{11.18^2 - 5^2} = 0.02H$$

2) Σε κύκλωμα RL έχουμε R=20Ω, L=60 mH και φ=80°. Να βρεθεί το ω.

Ισχύει εφφ=ωL/R. Άρα:

$$ω = \frac{R}{L}ε\varphi\varphi = \frac{20}{60\times10^{-3}}ε\varphi80^\circ = 1890\,{}^{\text{rad}}\!/_{\text{sec}}$$