Κεφάλαιο 11ο

Μέτρηση χωρητικότητας

11.1 Πυκνωτής-Ορισμός χωρητικότητας

Πυκνωτή ονομάζουμε τη διάταξη δύο αγωγών (οπλισμών) που διαχωρίζονται από κάποιο μονωτή. Οι δύο αγωγοί έχουν ίσο και αντίθετο φορτίο, όπου ο αγωγός με το θετικό φορτίο έχει μεγαλύτερο δυναμικό. Το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών άρα και η διαφορά δυναμικού είναι ανάλογο του φορτίου (νόμος Gauss). Επομένως ο λόγος (φορτίο)/(διαφορά δυναμικού) είναι σταθερή ποσότητα που ονομάζεται χωρητικότητα C (C=Q/V) με μονάδα στο SI το Farad (F).

Ο απλούστερος τύπος πυκνωτή είναι ο επίπεδος πυκνωτής: δύο παράλληλες επίπεδες αγώγιμες πλάκες, με εμβαδόν *A* και σε απόσταση *d* (με A>>d). Λόγω έλξης των αντιθέτων φορτίων, τα περισσότερα φορτία θα είναι στις απέναντι εσωτερικές επιφάνειες των πλακών. Το ηλεκτρικό πεδίο *E* στο χώρο μεταξύ των πλακών είναι $E_{πυκν}=σ/ε_0$, άρα η χωρητικότητα μπορεί να υπολογιστεί σε:

$$V_{AB} = E_{πυκν} d = \frac{σ}{ε_0} d = \frac{Q/A}{ε_0} d \Rightarrow C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{ε_0 A}{d} \qquad (11.1)$$

Δηλαδή, η χωρητικότητα είναι σταθερή και εξαρτάται μόνο από τα χαρακτηριστικά του πυκνωτή. Αν μεταξύ των οπλισμών υπάρχει υλικό, το $ε_0$ πρέπει να αντικατασταθεί από τη διηλεκτρική σταθερά του υλικού.

Κατά τη σύνδεση πυκνωτών σε σειρά, όλοι οι πυκνωτές έχουν ίδιο φορτίο, στην περιοχή μεταξύ δύο πυκνωτών ο ένας οπλισμός του ενός πυκνωτή έχει θετικό φορτίο και ο αντίστοιχος του άλλου αρνητικό και η ολική χωρητικότητα δίνεται από την σχέση:

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ... + \frac{1}{C_N} \qquad (11.2)$$

Αντίστοιχα στην παράλληλη σύνδεση, όλοι οι πυκνωτές βρίσκονται στην ίδια διαφορά δυναμικού, το φορτίο τους κατανέμεται ανάλογα με την τιμή της χωρητικότητας και η ολική χωρητικότητα δίνεται από τη σχέση:

$$C_{ολ} = C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_N \qquad (11.3)$$

11.2 Κύκλωμα R-C στο συνεχές.

Η παρουσία χωρητικότητας σε ένα κύκλωμα συνεχούς έχει επίσης σαν αποτέλεσμα την εξάρτηση των ηλεκτρικών μεγεθών από το χρόνο. Σαν παράδειγμα, σε κύκλωμα με χωρητικότητα C, ωμική αντίσταση R και πηγή E, το ρεύμα τείνει να μηδενιστεί ακολουθώντας μία εξίσωση της μορφής:

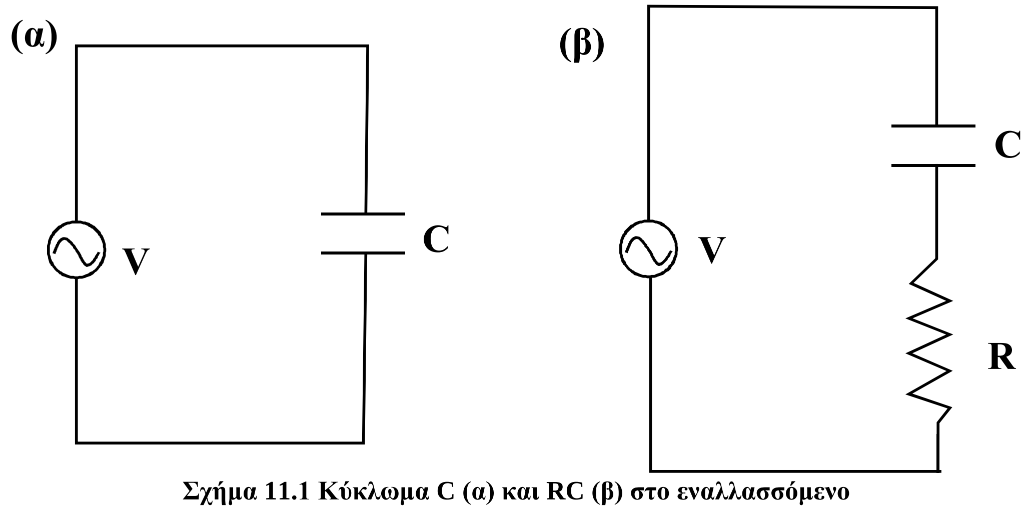
$$i = \frac{E}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \qquad (11.4)$$

Επομένως, η χωρητικότητα σε κύκλωμα συνεχούς έχει σαν αποτέλεσμα το ρεύμα να τείνει να μηδενιστεί, με τη διαδικασία να εξαρτάται από το γινόμενο RC. Δηλαδή ο πυκνωτής στο συνεχές λειτουργεί σαν διακόπτης.

Η συμπεριφορά στο συνεχές ενός κυκλώματος CL (ή RCL) είναι τελείως διαφορετική από το RC καθώς σε αυτό έχουμε μία ταλάντωση. Αν υποθέσουμε ότι ο πυκνωτής είναι αρχικά φορτισμένος, στη συνέχεια εκφορτίζεται μέσω του πηνίου. Λόγω της αυτεπαγωγής του πηνίου L το ρεύμα αυξάνει σταδιακά μέχρι μία μέγιστη τιμή I_m, οπότε ο πυκνωτής έχει εκφορτιστεί. Όμως λόγω του ρεύματος I_m ο πυκνωτής ξαναφορτίζεται αλλά αυτή τη φορά με αντίθετη πολικότητα (συνέπεια του κανόνα Lenz), δηλαδή μέγιστη τάση $-V_m$ και φορτίο -Q αντίστοιχα. Στη συνέχεια, ο πυκνωτής εκφορτίζεται ξανά αλλά αυτή τη φορά λόγω του φορτίου -Q, το ρεύμα που δημιουργείται στο πηνίο θα έχει αντίθετη φορά $-I_m$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται για αρκετό χρόνο σαν μία επανάληψη εναλλαγής φορτίου-ρεύματος. Αν μάλιστα δεν υπάρχουν απώλειες (ωμικές αντιστάσεις) στο κύκλωμα, η επανάληψη των διαδικασιών θα συνεχίζεται έπ' άπειρον. Η συμπεριφορά αυτή είναι μία ηλεκτρική ταλάντωση.

11.3 Κύκλωμα R-C στο εναλλασσόμενο.

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια την συμπεριφορά στο εναλλασσόμενο ενός κυκλώματος που περιέχει πυκνωτή. Αρχικά, ας δούμε την περίπτωση ενός



Σχήμα 11.1 Κύκλωμα C (α) και RC (β) στο εναλλασσόμενο

κυκλώματος που περιλαμβάνει μόνο ένα ιδανικό πυκνωτή C και μία πηγή τροφοδοσίας $V=V_0e^{j\omega t}$ (σχήμα 11.1α). Εφαρμόζοντας τον νόμο τάσεων Kirchhoff στο κύκλωμα του σχήματος 11.1α έχουμε:

$$V_0e^{j\omega t}-\frac{q}{C}=0 \qquad (11.5)$$

Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I=Ae^{j\omega t}$ (όπου η πληροφορία φάσης περιέχεται στο Α), το Α υπολογίζεται από την εξίσωση (11.5):

$$V_0e^{j\omega t}-\frac{1}{C}\int Ae^{j\omega t}dt=0\Rightarrow V_0e^{j\omega t}-\frac{1}{j\omega C}Ae^{j\omega t}=0\Rightarrow A=j\omega CV_0 \qquad (11.6)$$

Δηλαδή το ρεύμα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$I=j\omega CV_0e^{j\omega t}=\omega CV_0e^{j\omega t+\pi/2} \qquad (11.7)$$

Από την εξίσωση (11.7) φαίνεται ότι το ρεύμα προηγείται κατά π/2 της τάσης. Επίσης η ποσότητα 1/ωC παρουσιάζει ρόλο αντίστοιχο της αντίστασης και ονομάζεται χωρητική αντίσταση που στη μιγαδική μορφή δίνεται από $x_C=-j(1/\omega C)$. Όμως η συμπεριφορά αυτή εμφανίζεται μόνο στο εναλλασσόμενο καθώς στο συνεχές (ω=0) η τιμή της χωρητικής αντίστασης είναι άπειρη και ο πυκνωτής, όπως ήδη αναφέρθηκε, λειτουργεί σαν διακόπτης.

Στη συνέχεια ας θεωρήσουμε ότι στο κύκλωμα υπάρχει και ωμική αντίσταση R (σχήμα 11.1β), οπότε εφαρμόζοντας τον νόμο τάσεων Kirchhoff έχουμε:

$$V_0e^{j\omega t}-\frac{q}{C}=iR \qquad (11.8)$$

Αν υποθέσουμε ξανά ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I=Ae^{j\omega t}$, το Α μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση (11.8):

$$V_0e^{j\omega t}-\frac{1}{C}\int Ae^{j\omega t}dt=iR\Rightarrow V_0e^{j\omega t}-\frac{1}{j\omega C}Ae^{j\omega t}=ARe^{j\omega t}\Rightarrow A=\frac{V_0}{R-j\,{}^{1}\!/_{\omega C}} \qquad (11.9)$$

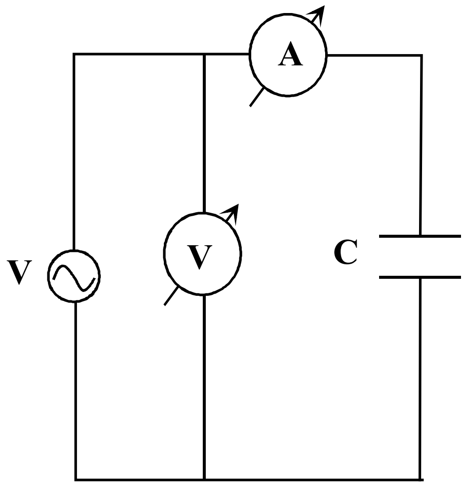
Δηλαδή το ρεύμα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$I=\frac{V_0}{R-j\,{}^{1}\!/_{\omega C}}e^{j\omega t}=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left({}^{1}\!/_{\omega C}\right)^2}}e^{j\omega t+\varphi} \qquad (11.10)$$

όπου φ είναι γωνία τέτοια ώστε εφφ=1/(ωCR). Από την εξίσωση (11.10) φαίνεται ότι στο κύκλωμα RC, η εμπέδηση του κυκλώματος είναι συνδυασμός της ωμικής και της χωρητικής αντίστασης και δίνεται από τη σχέση $\sqrt{R^2+\left({}^{1}\!/_{\omega C}\right)^2}$ (η μιγαδική μορφή είναι z_C=R-j/ωC), ενώ το ρεύμα προηγείται σε σχέση με τη τάση κατά γωνία φ, με εφφ=1/(ωCR).

11.4 Μέτρηση της χωρητικότητας.

11.4.1 Με βολτόμετρο και αμπερόμετρο.



Σχήμα 11.2 Μέτρηση χωρητικότητας με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

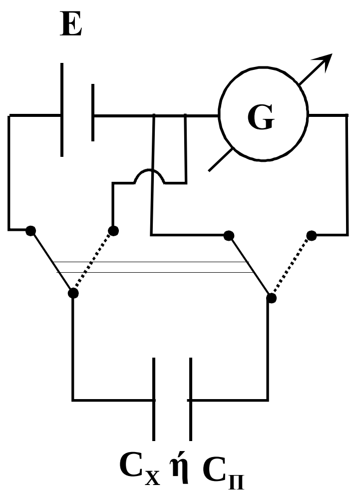
Η μέτρηση μιας χωρητικότητας μπορεί απλά να επιτευχθεί με αμπερόμετρο και βολτόμετρο με την προϋπόθεση ότι είναι γνωστή η συχνότητα του εναλλασσομένου. Έστω άγνωστος πυκνωτής C του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε τα χαρακτηριστικά (σχήμα 8.2). Από το νόμο Ohm θα ισχύει:

$$X_C = \frac{V}{I} \Rightarrow \frac{1}{\omega C} = \frac{V}{I} \Rightarrow C = \frac{I}{\omega V} \quad (11.11)$$

Δηλαδή, η χωρητικότητα υπολογίζεται απ' ευθείας από τις ενδείξεις των οργάνων.

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται κυρίως βιομηχανικά για πυκνωτές με μεγάλη χωρητικότητα.

11.4.2 Με σύγκριση



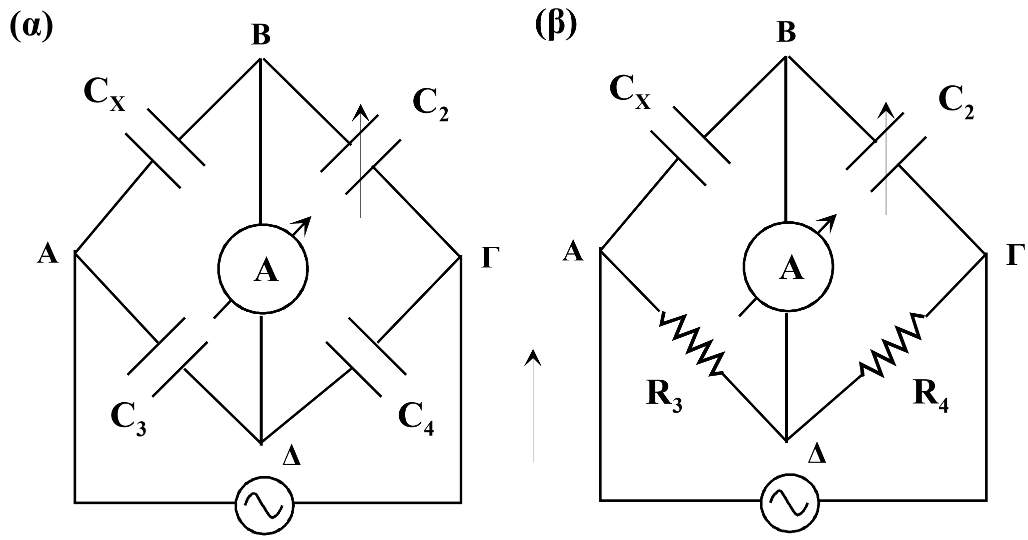
Σχήμα 11.3. Υπολογισμός χωρητικότητας με σύγκριση

Μία άλλη μέθοδος μέτρησης της χωρητικότητας είναι η σύγκριση της εκφόρτισης του άγνωστου πυκνωτή C_X σε σχέση με αυτήν γνωστού πρότυπου πυκνωτή C_Π (σχήμα 11.3). Η διάταξη περιλαμβάνει πηγή, γαλβανόμετρο και μεταγωγέα. Αρχικά συνδέεται στο κύκλωμα ο γνωστός πυκνωτής και με τη βοήθεια της πηγής E φορτίζεται, με το φορτίο να δίνεται από $Q_\Pi=C_\Pi E$. Με την εκφόρτιση, η βελόνα του γαλβανομέτρου θα αποκλίνει κατά θ_Π όπου $Q_\Pi=K\theta_\Pi$. Αντίστοιχα, όταν συνδεθεί ο άγνωστος πυκνωτής θα ισχύουν: $Q_X=C_XE$ και $Q_X=K\theta_X$. Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\frac{Q_X}{Q_\Pi} = \frac{C_X}{C_\Pi} = \frac{\theta_X}{\theta_\Pi} \Rightarrow C_X = C_\Pi \frac{\theta_X}{\theta_\Pi} \qquad (11.12)$$

Επομένως, η άγνωστη χωρητικότητα μπορεί να υπολογιστεί σαν συνάρτηση της γνωστής και των αποκλίσεων του γαλβανομέτρου.

11.4.3 Με γέφυρα



Σχήμα 11.4 Μέτρηση χωρητικότητας με γέφυρα

Η γέφυρα Wheatstone αποτελεί την πιο ευαίσθητη μέθοδο μέτρησης χωρητικότητας. Για την περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούμε εναλλασσόμενη πηγή τέσσερις πυκνωτές εκ των οποίων ο ένας είναι μεταβλητός (σχήμα 11.4α) και η ισορροπία προσδιορίζεται με την βοήθεια ακουστικού. Στην περίπτωση ισορροπίας, θα ισχύουν: $I_{AB}=I_{B\Gamma}$, $I_{A\Delta}=I_{\Delta\Gamma}$, $V_{AB}=V_{A\Delta}$, $V_{\Gamma B}=V_{\Gamma\Delta}$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει:

$$\frac{V_{AB}}{V_{B\Gamma}} = \frac{V_{A\Delta}}{V_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow \frac{I_{AB}Z_X}{I_{B\Gamma}Z_3} = \frac{I_{A\Delta}Z_2}{I_{\Gamma\Delta}Z_4} \Rightarrow \frac{-j/\omega C_X}{-j/\omega C_3} = \frac{-j/\omega C_2}{-j/\omega C_4} \Rightarrow$$
$$C_X = C_2 \frac{C_3}{C_4} \qquad (11.13)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η χωρητικότητα του άγνωστου πυκνωτή μπορεί να βρεθεί σαν συνδυασμός των τριών άλλων χωρητικοτήτων όταν η γέφυρα είναι σε ισορροπία. Η γέφυρα μπορεί να λειτουργήσει και αν αντί των πυκνωτών C_3 και C_4 χρησιμοποιηθούν αντιστάσεις R_3 και R_4 (σχήμα 11.4β). Τότε, σε ισορροπία θα ισχύει:

$$C_X = C_2 \frac{R_4}{R_3} \qquad (11.14)$$

11.5 Παραδείγματα.

1) Αν σε ένα κύκλωμα η τάση και το ρεύμα δίνονται από τις σχέσεις:

$$V=311\eta\mu(2500t+170°),\ I=15.5\eta\mu(2500t-145°)$$

να βρείτε τα στοιχεία του κυκλώματος.

Αρχικά θα βρούμε το είδος του κυκλώματος από την διαφορά φάσης τάσης ρεύματος. Έχουμε $\Delta\varphi=\varphi_V-\varphi_I=170°-(-145°)=315°=360°-45°$, άρα $\Delta\varphi=-45°$. Δηλαδή το ρεύμα προηγείται της τάσης και το κύκλωμα είναι RC. Η εμπέδηση του θα είναι:

$$z=\frac{V_0}{I_0}=\frac{311}{15.5}=20\Omega$$

Τα R, C μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις:

$$R=z\sigma\upsilon\nu\varphi=20\sigma\upsilon\nu\left(-45^\circ\right)=14.14\Omega$$

$$C=\frac{1}{\omega\sqrt{z^2-R^2}}=\frac{1}{2500\sqrt{20^2-14.14^2}}=28\mu F$$

2) Σε κύκλωμα RC έχουμε R=20Ω, C=5 μF και φ=-80°. Να βρεθεί το ω.

Ισχύει εφφ=-1/ωCR. Άρα:

$$\omega=-\frac{1}{CR\varepsilon\varphi\varphi}=-\frac{1}{5\times10^{-6}\times20\times\varepsilon\varphi\left(-80^\circ\right)}=1763\,{}^{rad}\!/_{sec}$$