Κεφάλαιο 13ο

Μέτρηση ενεργούς (πραγματικής) ισχύος

13.1 Ορισμός ενεργούς ισχύος

Σε ένα κύκλωμα, το γινόμενο p(t)=v(t)i(t) ορίζει την στιγμιαία ισχύ του κυκλώματος, όπου τα v(t) και i(t) δίνουν τις στιγμιαίες τιμές της τάσης και του ρεύματος αντίστοιχα. Για συνεχή ρεύματα, οι τιμές της τάσης και του ρεύματος παραμένουν σταθερές με το χρόνο, οπότε η ισχύς είναι σταθερή και δίνεται από P=VI (ή $P=I^2R=V^2/R$). Για εναλλασσόμενα ρεύματα όμως, οι τιμές της τάσης και του ρεύματος άρα και της ισχύος μεταβάλλονται συνεχώς. Επομένως, η στιγμιαία ισχύς δεν έχει νόημα στο εναλλασσόμενο και πρέπει να οριστεί η μέση τιμή της ισχύος $\overline{P}$, που δίνεται από:

$$\overline{P} = \overline{v(t)i(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(t)i(t)d(\omega t) \qquad (13.1)$$

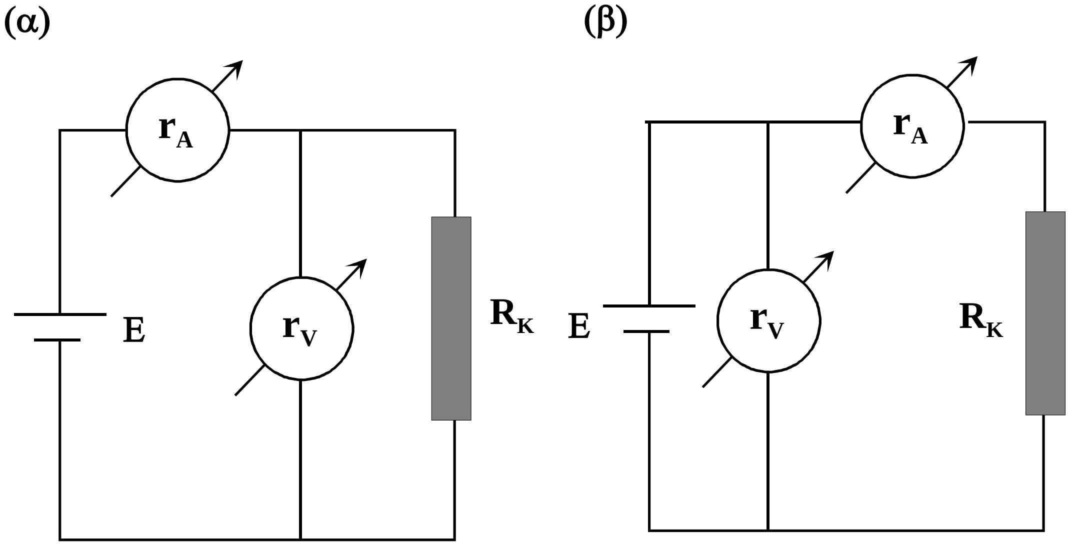
Αν θεωρήσουμε ότι η τάση και το ρεύμα περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής $v(t) = \sqrt{2}V_{\varepsilon\nu}\eta\mu(\omega t)$ και $i(t) = \sqrt{2}I_{\varepsilon\nu}\eta\mu(\omega t - \varphi)$ αντίστοιχα, η μέση τιμή της ισχύος υπολογίζεται σε:

$$\begin{aligned}
\overline{P} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(t)i(t)d(\omega t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{2}V_{\varepsilon\nu}\eta\mu\omega t\right)\left(\sqrt{2}I_{\varepsilon\nu}\eta\mu(\omega t - \varphi)\right)d(\omega t) = \\
&= \frac{V_{\varepsilon\nu}I_{\varepsilon\nu}}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\varphi - \sigma\upsilon\nu(2\omega t - \varphi)\right]d(\omega t) = \\
&= \frac{V_{\varepsilon\nu}I_{\varepsilon\nu}}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu\varphi\, d(\omega t) - \int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu(2\omega t - \varphi)d(\omega t)\right] = \\
&= \frac{V_{\varepsilon\nu}I_{\varepsilon\nu}\sigma\upsilon\nu\varphi}{2\pi}\left(\omega t\Big|_0^{2\pi}\right) = V_{\varepsilon\nu}I_{\varepsilon\nu}\sigma\upsilon\nu\varphi
\end{aligned} \qquad (13.2)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η μέση ισχύς στο εναλλασσόμενο δίνεται από το γινόμενο των ενεργών τιμών της τάσης και του ρεύματος επί το συνημίτονο της διαφοράς φάσης μεταξύ τους. Η ισχύς αυτή είναι η χρήσιμη ισχύς που ονομάζεται και πραγματική ισχύς ή ενεργός ισχύς και έχει μονάδες W. Ο ορισμός της σχέσης 13.2 δείχνει ότι για καθαρό ωμικό καταναλωτή (συνφ=1), η ισχύς περιγράφεται με την ίδια εξίσωση όπως το συνεχές (P=VI). Αντίστοιχα, για καθαρούς (ιδανικούς) επαγωγικούς ή χωρητικούς καταναλωτές (συνφ=0) η μέση ισχύς είναι μηδέν. Φυσικά αυτό δεν σημαίνει ότι τα πηνία και οι πυκνωτές δεν καταναλώνουν κάποια ισχύ αλλά ότι η ισχύ έχει κάποια άλλη μορφή (άεργος ισχύς) όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

13.2 Μέθοδοι μέτρησης ενεργούς ισχύος

13.2.1 Με βολτόμετρο και αμπερόμετρο (DC και AC σε ωμικό καταναλωτή).



Σχήμα 13.1 Μέτρηση ισχύος στο συνεχές ή στο εναλλασσόμενο για ωμικό καταναλωτή

Για συνεχές ρεύμα ή ωμικό καταναλωτή στο εναλλασσόμενο, η ισχύς μπορεί να μετρηθεί απλά με τη χρήση ενός αμπερομέτρου και ενός βολτομέτρου (σχήμα 13.1), όπου η ισχύς δίνεται από το γινόμενο των ενδείξεων των δύο οργάνων. Η μέτρηση όμως μπορεί να επηρεαστεί από τις συνδέσεις καθώς υπάρχουν δύο εφικτές συνδεσμολογίες: α) το βολτόμετρο συνδέεται στην αντίσταση (σχήμα 13.1α) και β) το αμπερόμετρο συνδέεται στην αντίσταση (σχήμα 13.1β). Στην περίπτωση (α), το αποτέλεσμα επηρεάζεται από την ισχύ που καταναλώνει το βολτόμετρο ενώ στην περίπτωση (β) από την ισχύ στο αμπερόμετρο. Αναλυτικότερα:

α) Στην πρώτη περίπτωση, η τάση που βλέπει το βολτόμετρο είναι ίση με την τάση του καταναλωτή $V=V_K$, ενώ το αμπερόμετρο μετρά το ρεύμα του καταναλωτή αλλά και το ρεύμα στο βολτόμετρο $I=I_K+V_K/r_V$. Επομένως η μετρούμενη ισχύς είναι:

$$P = VI = V_K\left(I_K + {V_K}/{r_V}\right) = V_K I_K + {V_K^2}/{r_V} \qquad (13.3)$$

Δηλαδή, για να έχουμε σωστό αποτέλεσμα στην περίπτωση που το βολτόμετρο συνδέεται επάνω στον καταναλωτή, θα πρέπει να αφαιρέσουμε από την ένδειξη την κατανάλωση ισχύος στην εσωτερική αντίσταση του βολτομέτρου. Αν δεν γίνει αυτό θα έχουμε λάθος αποτέλεσμα και το σχετικό σφάλμα της μέτρησης θα δίνεται από:

$$\frac{\Delta P}{P} = \left|\frac{P_{\pi\rho\alpha\gamma} - P_{\varepsilon\nu\delta}}{P_{\pi\rho\alpha\gamma}}\right| = \left|\frac{V_K I_K - \left(V_K I_K + V_K^2/r_V\right)}{V_K I_K}\right| = \frac{V_K}{I_K r_V} \qquad (13.4)$$

Επομένως, κατά τη μέτρηση της ισχύος, η σύνδεση του βολτομέτρου στον καταναλωτή συνίσταται για μεγάλα ρεύματα και μικρές τάσεις.

β) Στην δεύτερη περίπτωση, το ρεύμα που βλέπει το αμπερόμετρο είναι ίσο με το ρεύμα του καταναλωτή $I=I_K$, ενώ το βολτόμετρο μετρά την τάση του καταναλωτή αλλά και την πτώση τάσης στο αμπερόμετρο $V=V_K+I_K r_A$. Επομένως η μετρούμενη ισχύς είναι:

$$P = VI = I_K\left(V_K + I_K r_A\right) = V_K I_K + I_K^2 r_A \qquad (13.5)$$

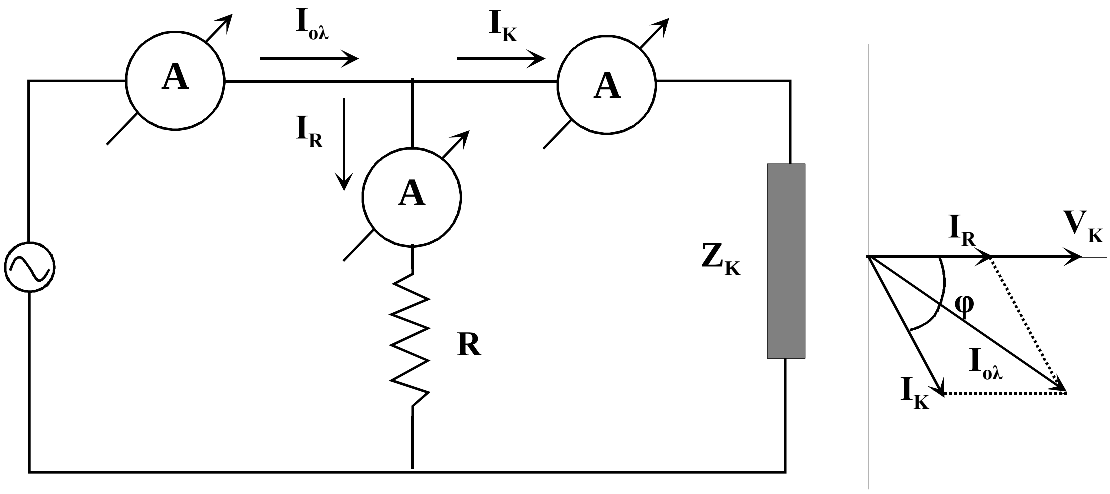
Δηλαδή, για να έχουμε σωστό αποτέλεσμα στην περίπτωση που το αμπερόμετρο συνδέεται επάνω στον καταναλωτή, θα πρέπει να αφαιρέσουμε από την ένδειξη την κατανάλωση ισχύος στην εσωτερική αντίσταση του αμπερομέτρου. Αν δεν γίνει αυτό θα έχουμε λάθος αποτέλεσμα και το σχετικό σφάλμα της μέτρησης θα δίνεται από:

$$\frac{\Delta P}{P} = \left|\frac{P_{\pi\rho\alpha\gamma} - P_{\varepsilon\nu\delta}}{P_{\pi\rho\alpha\gamma}}\right| = \left|\frac{V_K I_K - \left(V_K I_K + I_K^2 r_A\right)}{V_K I_K}\right| = \frac{I_K r_A}{V_K} \qquad (13.6)$$

Επομένως, κατά τη μέτρηση της ισχύος, η σύνδεση του αμπερομέτρου στον καταναλωτή συνίσταται για μικρά ρεύματα και μεγάλες τάσεις.

13.2.2 Με τρία αμπερόμετρα

Για εναλλασσόμενα ρεύματα και πραγματικούς καταναλωτές, μία απλή μέθοδος



Σχήμα 13.2 Μέτρηση της ενεργούς ισχύος με τρία αμπερόμετρα

μέτρησης της ισχύος είναι η σύγκριση της απόκρισης του καταναλωτή με αυτή μίας ωμικής αντίστασης R (σχήμα 13.2). Η σύγκριση, για ωμική αντίσταση συνδεμένη παράλληλα στον καταναλωτή, μπορεί να γίνει με τη χρήση τριών αμπερομέτρων τα οποία μετρούν τα ρεύματα στον καταναλωτή I_K, στην ωμική αντίσταση I_R και το ολικό ρεύμα $I_{ολ}$. Στο σχήμα 13.2 δεξιά φαίνεται το διανυσματικό διάγραμμα των τριών ρευμάτων όπου έχει υποτεθεί ότι ο καταναλωτής εμφανίζει επαγωγική συμπεριφορά. Από το διάγραμμα αυτό προκύπτει ότι:

$$I_{ολ}^2 = I_K^2 + I_R^2 + 2I_K I_R συνφ \Rightarrow 2I_K I_R συνφ = I_{ολ}^2 - I_K^2 - I_R^2 \qquad (13.7)$$

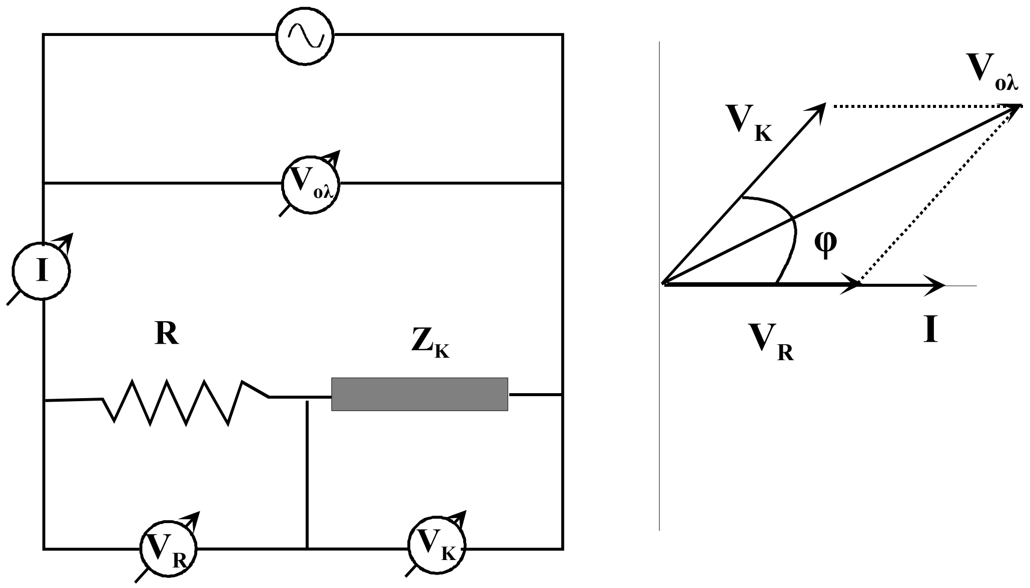
Όμως, $V_K=V_R=I_R R$ και $P=V_K I_K συνφ$. Επομένως, $P=RI_K I_R συνφ$ και η σχέση (13.7) γράφεται ως:

$$P = {}^{R}\!/_{2}\left(I_{ολ}^2 - I_K^2 - I_R^2\right) \qquad (13.8)$$

Δηλαδή, η ενεργός ισχύς μπορεί να υπολογιστεί από τις ενδείξεις των τριών αμπερομέτρων και την τιμή της ωμικής αντίστασης.

13.2.3 Με τρία βολτόμετρα

Μία άλλη προσέγγιση για τον υπολογισμό της ενεργούς ισχύος καταναλωτή μέσω



Σχήμα 13.3 Μέτρηση της ενεργούς ισχύος με τρία βολτόμετρα

σύγκρισης της απόκρισης του με αυτή ωμικής αντίστασης R είναι η χρήση τριών βολτομέτρων (με την ωμική αντίσταση συνδεμένη σε σειρά στον καταναλωτή) όπως φαίνεται στο σχήμα 13.3. Τα βολτόμετρα μετρούν τις τάσεις στον καταναλωτή V_K, στην ωμική αντίσταση V_R και την ολική τάση $V_{ολ}$. Στο σχήμα 13.2 δεξιά φαίνεται το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων όπου έχει υποτεθεί ότι ο καταναλωτής εμφανίζει επαγωγική συμπεριφορά. Από το διάγραμμα αυτό προκύπτει ότι:

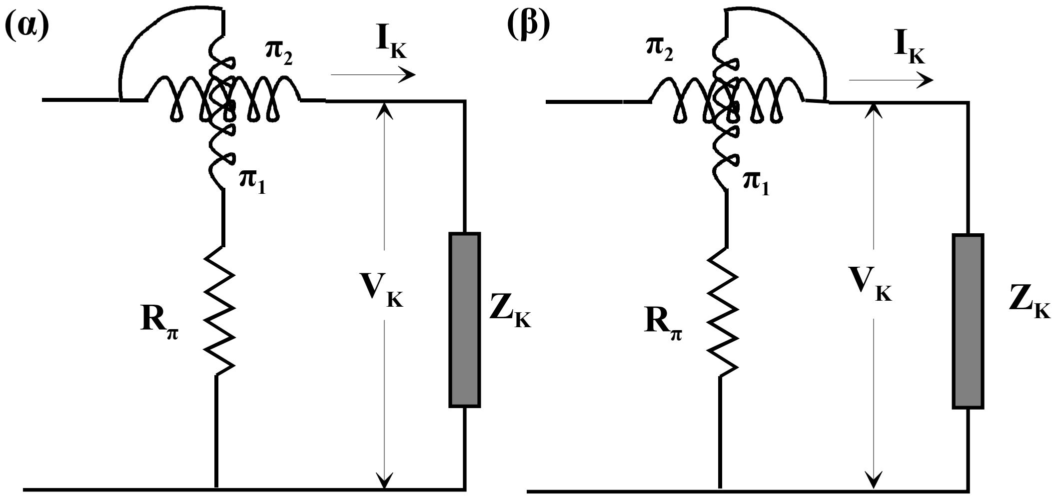
$$V_{ολ}^2 = V_K^2 + V_R^2 + 2V_K V_R συνφ \Rightarrow 2V_K V_R συνφ = V_{ολ}^2 - V_K^2 - V_R^2 \qquad (13.9)$$

Όμως, $I_K=I_R=V_R/R$ και $P=V_K I_K συνφ$. Επομένως, $P=(1/R)V_K V_R συνφ$ και η σχέση (13.9) γράφεται ως:

$$P = {}^{1}\!/_{2R}\left(V_{ολ}^2 - V_K^2 - V_R^2\right) \qquad (13.10)$$

Δηλαδή, η ενεργός ισχύς μπορεί να υπολογιστεί από τις ενδείξεις των τριών βολτομέτρων και την τιμή της ωμικής αντίστασης.

13.2.4 Με βατόμετρο.



Σχήμα 13.4 Συνδεσμολογία βατομέτρου για την μέτρηση της ενεργούς ισχύος

Ο βασικότερος τρόπος μέτρησης ενεργούς ισχύος είναι με τη χρήση βατομέτρου. Η λειτουργία του βατόμετρο βασίζεται στα ηλεκτροδυναμικά όργανα (κεφάλαιο 4) που όπως φαίνεται στο σχήμα 13.4 αποτελείται από δύο πηνία, ένα ακίνητο π_2 που συνδέεται σε σειρά με τον καταναλωτή (πηνίο ρεύματος) και ένα κινούμενο π_1 μαζί με ωμική αντίσταση R_π συνδεμένο παράλληλα στον καταναλωτή (πηνίο τάσης). Κάτω από αυτές τις συνθήκες, η ένδειξη του οργάνου είναι απ΄ ευθείας ανάλογη της ενεργούς ισχύος όπως ήδη αποδείξαμε (σχέση 4.6).

Η ακρίβεια της μέτρησης της ενεργούς ισχύος εξαρτάται από την συνδεσμολογία του οργάνου στο κύκλωμα. Υπάρχουν δύο εφικτές συνδεσμολογίες: α) το πηνίο ρεύματος συνδέεται απ’ ευθείας στον καταναλωτή (σχήμα 13.4α) και β) το πηνίο τάσης συνδέεται απ’ ευθείας στον καταναλωτή (σχήμα 13.4β). Στην περίπτωση (α), το αποτέλεσμα επηρεάζεται από την ισχύ που καταναλώνει το πηνίο ρεύματος ενώ στην περίπτωση (β) από την ισχύ στο πηνίο τάσης. Αναλυτικότερα:

α) Στην πρώτη περίπτωση, το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο ρεύματος π_2 είναι ίσο με το ρεύμα του καταναλωτή $I_2=I_K$, ενώ η τάση στα άκρα του πηνίου τάσης π_1 περιλαμβάνει και την πτώση τάση στο πηνίο ρεύματος $V_1=V_K+I_Kr_2$. Επομένως η μετρούμενη ισχύς είναι:

$$P = I_2 V_1 \text{συνφ} = V_K I_K \text{συνφ} + I_K^2 r_2 \qquad (13.11)$$

Δηλαδή, για να έχουμε σωστό αποτέλεσμα όταν το πηνίο ρεύματος συνδέεται απ’ ευθείας στον καταναλωτή, θα πρέπει να αφαιρέσουμε από την ένδειξη την κατανάλωση ισχύος στο πηνίο ρεύματος. Αν δεν γίνει αυτό θα έχουμε λάθος αποτέλεσμα και το σχετικό σφάλμα της μέτρησης θα δίνεται από:

$$\frac{\Delta P}{P} = \left|\frac{P_{\pi\rho\alpha\gamma} - P_{\varepsilon\nu\delta}}{P_{\pi\rho\alpha\gamma}}\right| = \left|\frac{V_K I_K \sigma\upsilon\nu\varphi - \left(V_K I_K \sigma\upsilon\nu\varphi + I_K^2 r_A\right)}{V_K I_K \sigma\upsilon\nu\varphi}\right| = \frac{I_K r_A}{V_K \sigma\upsilon\nu\varphi} \qquad (13.12)$$

Επομένως, κατά τη μέτρηση της ισχύος, η σύνδεση του πηνίου ρεύματος στον καταναλωτή συνίσταται για μικρά ρεύματα και μεγάλες τάσεις. Ιδιαίτερη όμως προσοχή απαιτεί το συνφ καθώς μία μικρή τιμή του μπορεί να εισάγει μεγάλο σχετικό σφάλμα.

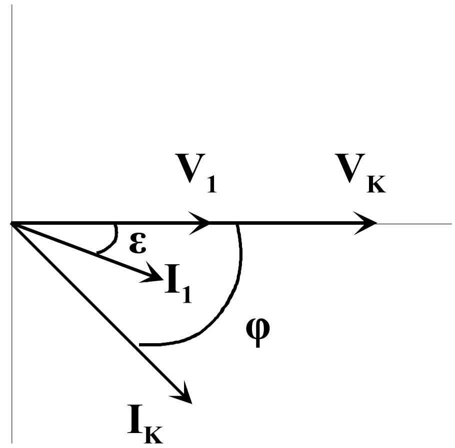
β) Στην δεύτερη περίπτωση, το πηνίο τάσης βλέπει την τάση στα άκρα του καταναλωτή $V_1=V_K$, ενώ το ρεύμα του πηνίου ρεύματος περιλαμβάνει και το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο τάσης $I_2=I_K+V_K/(r_1+R_\Pi)$. Επομένως η μετρούμενη ισχύς είναι:

$$P = I_2 V_1 \sigma\upsilon\nu\varphi = V_K I_K \sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{V_K^2}{r_1 + R_\Pi} \qquad (13.13)$$

Δηλαδή, για να έχουμε σωστό αποτέλεσμα στην περίπτωση που το πηνίο τάσης συνδέεται απ' ευθείας στον καταναλωτή, θα πρέπει να αφαιρέσουμε από την ένδειξη την κατανάλωση ισχύος στο πηνίο τάσης. Αν δεν γίνει αυτό θα έχουμε λάθος αποτέλεσμα και το σχετικό σφάλμα της μέτρησης θα δίνεται από:

$$\frac{\Delta P}{P} = \left|\frac{P_{\pi\rho\alpha\gamma} - P_{\varepsilon\nu\delta}}{P_{\pi\rho\alpha\gamma}}\right| = \left|\frac{V_K I_K \sigma\upsilon\nu\varphi - \left(V_K I_K \sigma\upsilon\nu\varphi + \dfrac{V_K^2}{r_1 + R_\Pi}\right)}{V_K I_K \sigma\upsilon\nu\varphi}\right| = \frac{V_K}{I_K\left(r_1 + R_\Pi\right)\sigma\upsilon\nu\varphi} \qquad (13.14)$$

Επομένως, κατά τη μέτρηση της ισχύος με βατόμετρο, η σύνδεση του πηνίου τάσης στον καταναλωτή συνίσταται για μεγάλα ρεύματα και μικρές τάσεις. Ιδιαίτερη όμως προσοχή απαιτεί ξανά το συνφ καθώς μία μικρή τιμή του μπορεί να εισάγει μεγάλο σχετικό σφάλμα.



Σχήμα 13.5 Διάγραμμα φάσεων σε βατόμετρο

Τέλος, ένα θέμα που απαιτεί ιδιαίτερη συζήτηση είναι η ανάγκη της αντίστασης R_Π. Η αντίσταση αυτή επιλέγεται να έχει μεγάλη τιμή και ειδικότερα η τιμή της να εκπληρώνει την συνθήκη $R_\Pi >> \omega L_1$, όπου L_1 η αυτεπαγωγή του πηνίου τάσης. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, το ρεύμα I_1 και η τάση V_1 στον κλάδο του πηνίου τάσης θα είναι συμφασικά και το βατόμετρο θα μετρά σωστά. Σε διαφορετική περίπτωση όμως, αν υπάρχει διαφορά φάσης ε μεταξύ των I_1 και V_1 (σχήμα 13.5) λόγω επαγωγικής αντίστασης στο κλάδο του πηνίου τάσης, τότε η ένδειξη του βατομέτρου θα είναι (σχέση 4.5):

$$\mathrm{P} \propto \mathrm{I}_1 \mathrm{I}_2 \sigma\upsilon\nu(\varphi - \varepsilon) \qquad (13.15)$$

Όπως βλέπουμε, η ισχύς που θα μετράμε θα είναι μεγαλύτερη από την πραγματική. Επομένως, για να μετρά σωστά το βατόμετρο πρέπει στον κλάδο του πηνίου τάσης να κυριαρχεί η ωμική αντίσταση.

13.3 Παράδειγμα

Έστω βατόμετρο με αντίσταση πηνίου ρεύματος r_2=10 Ω και αντίσταση γραμμής τάσης r_1+$R_Π$=2 kΩ με το οποίο θέλουμε να μετρήσουμε την ισχύ σε ωμικό καταναλωτή R_K=50 Ω συνδεδεμένο στα 220V/50Hz. Αν χρησιμοποιηθούν οι δύο συνδεσμολογίες του σχήματος 13.4, να βρεθεί σε κάθε περίπτωση η ένδειξη του βατομέτρου και η ισχύς του καταναλωτή.

Ονομάζουμε I_K, V_K το ρεύμα και την τάση του καταναλωτή, I_E, V_E τα αντίστοιχα του πηνίου έντασης και I_T, V_T του πηνίου τάσης και έχουμε:

Α) περίπτωση (α)

$$\mathrm{I_T} = \frac{220}{2\times 10^3} = 0.11\mathrm{A} \qquad \mathrm{I_K} = \mathrm{I_E} = \frac{220}{50+10} = 3.67\mathrm{A}$$

$$\mathrm{V_T} = 220\mathrm{V} \qquad \mathrm{V_K} = \mathrm{V_T} - \mathrm{I_K} r_2 = 220 - 3.67\times 10 = 183.3\mathrm{V}$$

Επομένως:

Βατόμετρο: $\mathrm{P_B} = \mathrm{V_T I_K} = 220\times 3.67 = 807.4\mathrm{W}$

Καταναλωτής: $\mathrm{P_K} = \mathrm{V_K I_K} = 183.3\times 3.67 = 672.7\mathrm{W}$

Β) περίπτωση (β)

$$\mathrm{I_E} = \mathrm{I_{o\lambda}} = \frac{\mathrm{V_{o\lambda}}}{\dfrac{(r_1 + \mathrm{R_\Pi})\mathrm{R_K}}{(r_1 + \mathrm{R_\Pi}) + \mathrm{R_K}} + r_2} = \frac{220}{58.8} = 3.74\mathrm{A}$$

$$\mathrm{V_K} = \mathrm{V_T} = \mathrm{V} - \mathrm{I}_{o\lambda} r_2 = 220 - 3.74\times 10 = 182.6\mathrm{V}$$

Επομένως:

Βατόμετρο: $\mathrm{P_B} = \mathrm{V_T I_E} = 182.6\times 3.74 = 683\mathrm{W}$

Καταναλωτής: $\mathrm{P_K} = \mathrm{V_K I_K} = {V_K^2}/{r_K} = 182.6^2/50 = 667\mathrm{W}$