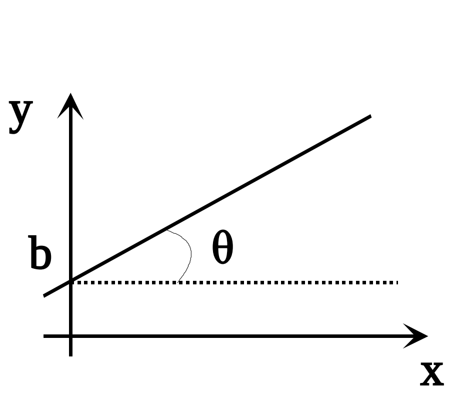
Ευαισθησία και γραμμικότητα αισθητήρα

Ένα βασικό χαρακτηριστικό κάθε αισθητήρα είναι η σχέση που συνδέει το σήμα εξόδου με το σήμα εισόδου. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να εκφραστεί αυτή η σχέση, είτε σε μορφή καμπύλης είτε σε μορφή μαθηματικής συνάρτησης. Επιπλέον, η σχέση μπορεί να είναι θεωρητική, δηλαδή να στηρίζεται στις αρχές λειτουργίας του αισθητήρα, είτε πειραματική όπως η μετρούμενη καμπύλη βαθμονόμησης. Σε κάθε περίπτωση θα ισχύει μία σχέση y=f(x) όπου x είναι η είσοδος του αισθητήρα και y η έξοδος του. Η συνάρτηση f μπορεί να έχει οποιαδήποτε μορφή και εξαρτάται από την αρχή λειτουργίας του αισθητήρα.

Γενικά, η απλούστερη μορφή μιας συνάρτησης είναι προφανώς η f=a όπου a είναι μία σταθερή ποσότητα. Όμως, αυτή η περίπτωση δεν μπορεί να αφορά ένα αισθητήρα, καθώς ο αισθητήρας αυτός δεν θα μπορεί να μετρήσει μεταβολές ενός οποιουδήποτε μεγέθους x.



Επομένως, η απλούστερη συνάρτηση (που μπορούμε να συναντήσει κάποιος σε ένα αισθητήρα) είναι η γραμμική:

$$y=ax+b$$

- **Στην περίπτωση αυτή, το b αντιπροσωπεύει μία σταθερή απόκλιση στις μετρήσεις (ονομάζεται offset) καθώς χωρίς είσοδο, ο αισθητήρας δίνει έξοδο b.**

- **Αντίστοιχα, το a σχετίζεται με την κλιση της καμπύλης της συνάρτησης. Όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1, η κλίση της συνάρτησης είναι εφθ (όπου θ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία y=ax+b με τον άξονα x), που είναι ίση με το a.**

- **Παράλληλα όμως, το a μας δίνει την ευαισθησία του αισθητήρα S η οποία ορίζεται γενικά ως η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης που περιγράφει την λειτουργία του αισθητήρα:**

$$S = \frac{dy}{dx} = a$$

- **Δηλαδή βλέπουμε ότι σε αισθητήρα του οποίου η συνάρτηση λειτουργίας είναι γραμμική, η ευαισθησία είναι σταθερή σε όλη την περιοχή λειτουργίας. Η σταθερή αυτή ευαισθησία σε γραμμικούς αισθητήρες σε συνδυασμό με την απλότητα της λειτουργίας τους οδηγεί στην ανάγκη χρήσης αισθητήρων με πολύ καλή γραμμικότητα.**

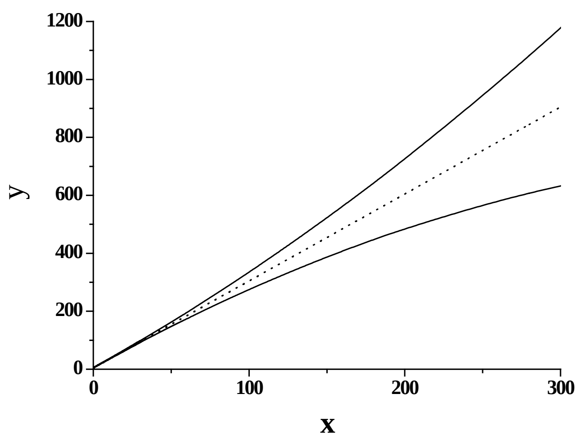
Σαν επόμενο βήμα ας θεωρήσουμε ένα αισθητήρα του οποίου η συνάρτηση λειτουργίας δίνεται από μία σχέση της μορφής:

$$y = nx^2 + ax + b$$

Και σε αυτή τη περίπτωση, το b δίνει το offset της λειτουργίας, το a σχετίζεται με γραμμική συμπεριφορά αλλά τώρα υπάρχει και το n που μας δίνει μία απόκλιση από την γραμμικότητα (συνήθως n<<a). Η μορφή αυτή της συνάρτησης λειτουργίας έχει σαν άμεσο επακόλουθο ότι η ευαισθησία του αισθητήρα δεν είναι πλέον σταθερή σε όλη τη περιοχή λειτουργίας του αλλά εξαρτάται από την είσοδο x καθώς:

$$S = \frac{dy}{dx} = nx + a$$

Μάλιστα, ανάλογα με το πρόσημο του n, η ευαισθησία αυξάνεται ή μειώνεται με την αύξηση του x. Στην περίπτωση της συνάρτησης (1.3) λοιπόν υπάρχει μη γραμμικότητα στον αισθητήρα που σχετίζεται με τον δεύτερης τάξης όρο. Τότε, η γραμμικότητα του αισθητήρα ορίζεται ως το πηλίκο του μη γραμμικού όρου προς τον γραμμικό όρο και εκφράζεται επί τοις εκατό:



$$\text{γραμμικότητα} = \frac{nx^2}{ax}$$

- **Δηλαδή, η γραμμικότητα που ορίσαμε μας δίνει το ποσοστό της μη γραμμικότητας στο τελικό αποτέλεσμα. Σαν παράδειγμα, γραμμικότητα καλύτερη από 1% σημαίνει ότι ο δεύτερης τάξης όρος είναι τουλάχιστον 100 φορές μικρότερος από τον πρώτης τάξης όρο.**
- **Η επίδραση της μη γραμμικότητας στη λειτουργία εξαρτάται από το πρόσημο του n. Για να το δούμε αυτό καλύτερα, ας εξετάσουμε τις καμπύλες του σχήματος 1.2, όπου η διακεκομένη γραμμή αντιστοιχεί στη γραμμική συνάρτηση y=3x+5. Για τη συνάρτηση (1.3) και n=-0.003 (κάτω γραμμή στο σχήμα 1.2), το y τείνει να γίνει σταθερό σε μεγάλες τιμές του x. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται κορεσμός (saturation) και συνήθως οφείλεται σε αδυναμία του αισθητήρα να μετρήσει πλέον.**
- **Αντίστοιχα, για n=0.003 (πάνω γραμμή στο σχήμα 1.2), το y τείνει να έχει μεγαλύτερες τιμές από ότι θα αναμενόταν σε μεγάλες τιμές του x. Η κατάσταση αυτή συνήθως οφείλεται σε επίδραση όρων ανώτερης τάξης. Και στις δύο περιπτώσεις η λειτουργία του αισθητήρα πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή (αν δεν μπορεί να αποφευχθεί).Τέλος, αν η συνάρτηση λειτουργίας έχει και όρους μεγαλύτερης τάξης από δεύτερη, συνήθως αυτοί οι όροι είναι σχετικά μικροί (αρκετά μικρότεροι από το δεύτερης τάξης όρο) και δεν χρειάζονται.**

- **Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση που η συνάρτηση λειτουργίας ενός αισθητήρα είναι σχετικά περίπλοκη και δεν μπορεί να αναλυθεί σε όρους με δυνάμεις του x (σαν παράδειγμα η συνάρτηση y=x/(x+a)); Σίγουρα σε ένα τέτοιο αισθητήρα μπορεί κάποιος να υπολογίσει την ευαισθησία, καθώς αυτή δίνεται ως η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης (σαν παράδειγμα, στην προηγούμενη συνάρτηση, η ευαισθησία είναι $S=a/(x+a)^2$). Βέβαια, αφού η συνάρτηση δεν είναι γραμμική, η ευαισθησία θα είναι συνάρτηση της εισόδου x. Μπορεί όμως να γίνει μία πρόβλεψη σχετικά με την γραμμικότητα;**
- **Στα πλαίσια μιας προσεγγιστικής απάντησης στις ερωτήσεις αυτές και με στόχο την πρόβλεψη λειτουργίας, μπορεί κάποιος να αναπτύξει τη συνάρτηση σε σειρά Taylor για μικρές μεταβολές γύρω από μία δεδομένη τιμή x_0. Στην περίπτωση αυτή, το ανάπτυγμα της συνάρτησης θα δίνεται από:**

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} + ...$$

όπου ο πρώτος όρος σχετίζεται με το offset, ο δεύτερος με την ευαισθησία και ο τρίτος με την μη γραμμική απόκλιση, πάντα βέβαια για μικρές αλλαγές γύρω από το σημείο x_0. Με βάση αυτή την προσέγγιση, η προηγούμενη συνάρτηση που εξετάζαμε (y=x/(x+a)) γράφεται για μικρές αλλαγές γύρω από x=0:

$$y = \frac{x}{a} - \frac{2x^2}{a^2}$$

Βλέπουμε επομένως ότι για τη συνάρτηση y=x/(x+a), η ευαισθησία και η γραμμικότητα είναι αντιστρόφως ανάλογες του a, ενώ το offset είναι μηδέν κοντά στο x=0.

- **Με βάση τους ορισμούς της ευαισθησίας και της γραμμικότητας και την ανάλυση που κάναμε, μπορούμε είτε να προσδιορίσουμε την περιοχή τιμών εισόδου για τις οποίες ένας αισθητήρας έχει μία συγκεκριμένη επιθυμητή απόδοση ή να κατασκευάσουμε ένα αισθητήρα ο οποίες θα έχει τις επιθυμητές ιδιότητες σε μία δεδομένη περιοχή τιμών.**

Παράδειγμα:

Η μεταβολή της αντίστασης με την θερμοκρασία ενός θερμομέτρου αντίστασης από λευκόχρυσο δίνεται από τη σχέση:

$$R_{\theta}=100\times(1+0.00398\times\Theta-0.588\times10^{-6}\times\Theta^{2})\ \Omega$$

όπου Θ η θερμοκρασία σε °C και R_{θ} η αντίσταση σε θερμοκρασία Θ °C. Να βρεθεί: η ευαισθησία του θερμομέτρου στους 200 °C, 600 °C και 1000 °C και σε ποια θερμοκρασία υπάρχει 10% γραμμικότητα.

Λύση:

Είναι γνωστό ότι η ευαισθησία δίνεται από την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης λειτουργίας. Επομένως, αν λάβουμε υπόψη την συνάρτηση $R_{\theta}=f(\Theta)$, η ευαισθησία θα δίνεται από:

$$S=\frac{dR_{\Theta}}{d\Theta}=0.398-1.176\times10^{-4}\Theta\ \Omega/°C$$

Έτσι έχουμε: για 200 °C, S=0.374 Ω/°C; για 600 °C, S=0.327 Ω/°C; για 1000 °C, S=0.280 Ω/°C.

Σχετικά τώρα με την 10% απόκλιση από τη γραμμικότητα (αισθητήρας με 10% γραμμικότητα), αυτή θα ισχύει σε θερμοκρασία Θ τέτοια ώστε:

$$\frac{0.588\times10^{-4}\Theta^{2}}{0.398\Theta}=0.1\Rightarrow\Theta=677°\,C$$