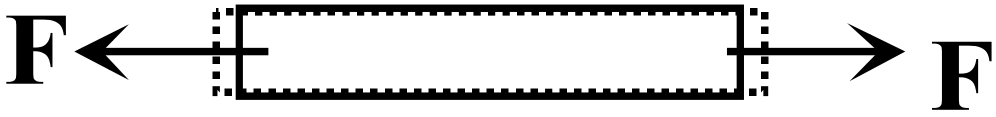
<u>Πιεζοαντίσταση</u>



Μεταλλικό σύρμα που υφίσταται εφελκυσμό

Με τον όρο πιεζοαντίσταση αναφερόμαστε σε διάταξη η οποία όταν υφίσταται εφελκυσμό ή συμπίεση, μεταβάλλει την αντίσταση της. Στην απλούστερη εκδοχή της, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μεταλλικό σύρμα ειδικής αντίστασης ρ, μήκους L, και διάμετρο διατομής D (με επιφάνεια διατομής A), το οποίο υφίσταται εφελκυσμό με δυνάμεις F. Είναι γνωστό από τη φυσική ότι το σύρμα αυτό έχει αρχική (πριν τον εφελκυσμό) αντίσταση:

$$\mathrm{R} = \rho \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{A}} = \frac{4\rho L}{\pi \mathrm{D}^2}$$

Σαν αποτέλεσμα του εφελκυσμού θα έχουμε: αύξηση του μήκους κατά dL, ελάττωση της διατομής κατά dD ενώ μπορεί να αλλάξει και η ειδική του αγωγιμότητα του σύρματος κατά dρ. Δηλαδή, θα αλλάξει η αντίσταση του σύρματος κατά dR τέτοιο ώστε:

$$dR = \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial R}{\partial L} dL + \frac{\partial R}{\partial D} dD$$

Επομένως:

$$dR = \frac{4L}{\pi D^2} d\rho + \frac{4\rho}{\pi D^2} dL - \frac{8\rho L}{\pi D^3} dD \Rightarrow$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - \frac{2dD}{D}$$

Ορίζουμε σαν συντελεστή πιεζοαντίστασης G την ποσότητα: $G = \dfrac{dR/R}{dL/L}$

Ο συντελεστής G μας δίνει ουσιαστικά την ποσοστιαία μεταβολή της αντίστασης σε σχέση με την ποσοστιαία μεταβολή του μήκους. Ταυτόχρονα, ας θυμηθούμε τον ορισμό του λόγος Poisson v του υλικού που δίνεται από: $v = -\frac{dD/D}{dL/L}$

Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις, ο συντελεστής πιεζοαντίστασης G δίνεται από μία σχέση της μορφής:

$$G = \frac{dR/R}{dL/L} = 1 + 2v + \frac{d\rho/\rho}{dL/L}$$

Είναι γνωστό ότι ο λόγος Poisson έχει τιμή της τάξης 0.2-0.3 με αποτέλεσμα ο συντελεστής πιεζοαντίστασης G για μέταλλα να έχει τιμές από 2 έως 4. Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί στα εργαστήρια πιεζοαντιστάσεις από πυρίτιο με προσμίξεις οι οποίες έχουν τιμή G περίπου 200.

Σχετικά τώρα με την εξάρτηση της ποσοστιαίας μεταβολής της αντίστασης από τη δύναμη εφελκυσμού F, αυτή μπορεί να βρεθεί αν λάβουμε υπόψη ότι:

α) η δύναμη F συνδέεται με την μηχανική τάση σ με τη σχέση F=σA

β) η μηχανική τάση σ συνδέεται με την ποσοστιαία μεταβολή του μήκους dL/L με τη σχέση σ=E(dL/L) όπου E είναι το μέτρο του Young

γ) από τον ορισμό του G όπου έχουμε ότι G(dL/L)=dR/R

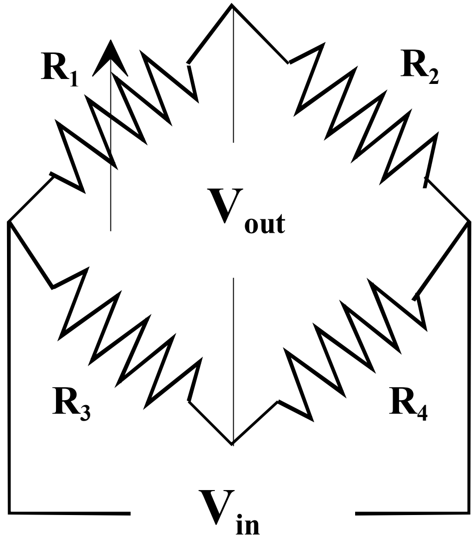
Με βάση τα παραπάνω βρίσκεται ότι:

$$\frac{dR}{R}=\frac{FG}{EA}=\sigma\frac{G}{E}$$

Επομένως, η ποσοστιαία μεταβολή της αντίστασης είναι ανάλογη της εφαρμοζόμενη δύναμης και του συντελεστή μεταβολής πιεζοαντίστασης G και αντιστρόφως ανάλογη της διατομής και του μέτρου του Young.

Δηλαδή, η μεγάλη ευαισθησία σε πιεζοαντίσταση απαιτεί υλικό με μικρή διάμετρο, μικρό μέτρο Young και μεγάλο συντελεστή G.

Πολύ συχνά στη πράξη εμφανίζονται τιμές της ποσοστιαίας μεταβολής της αντίστασης της τάξης 0.001%-1%. Η μέτρηση μιας τέτοιας μεταβολής απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή και σχεδόν πάντοτε γίνεται με γέφυρα. Επίσης, οι πιεζοναντιστάσεις παρουσιάζουν πολύ καλή απόκριση και σε στατικές αλλά και σε δυναμικές μετρήσεις μέχρι μερικά kHz. Όμως, απαιτείται προσοχή στην ισχύ που καταναλώνουν καθώς υπάρχει η περίπτωση μεταβολής της αντίστασης λόγω θέρμανσης.



Ο καλύτερος τρόπος για να μετατραπεί η μεταβολή της αντίστασης σε μεταβολή τάση, ειδικά στην περίπτωση πολύ μικρών αλλαγών στην τιμή της αντίστασης, είναι η χρήση γέφυρας Wheatstone. Ας υποθέσουμε ότι στη διπλανή γέφυρα η αντίσταση R_1 είναι μία πιεζοαντίσταση και έστω ότι μετά την εφαρμογή τάσης εφελκυσμού, η αντίσταση μεταβάλλεται κατά ΔR_1, οπότε και η τάση V_{out} μεταβάλλεται κατά ΔV. Αρχικά θα ισχύει:

$$V_{out} = V_{in}\left\{\frac{R_1}{R_1+R_2} - \frac{R_3}{R_3+R_4}\right\}$$

Μετά την εφαρμογή της τάσης εφελκυσμού θα ισχύει:

$$V_{out} + \Delta V = V_{in}\left\{\frac{R_1 + \Delta R_1}{R_1 + \Delta R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4}\right\}$$

Από τις δύο προηγούμενες εξισώσεις θα έχουμε:

$$\Delta V = V_{in}\left\{\frac{R_1 + \Delta R_1}{R_1 + \Delta R_1 + R_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right\}$$

Αν υποθέσουμε ότι $\Delta R_1 << R_1$, R_2, τότε $R_1+R_2+\Delta R1 \approx R_1+R_2$, οπότε θα έχουμε:

$$\Delta V = V_{in}\left\{\frac{\Delta R_1}{R_1 + R_2}\right\}$$

Ας δούμε ένα πιο συγκεκριμένο παράδειγμα:

Σε μία γέφυρα Wheatstone έχω $R_1=R_2=R_3=R_4=200\ \Omega$ με την R_1 να είναι πιεζοαντίσταση με συντελεστή G=1.9. Αν η πιεζοαντίσταση υφίσταται μία τάση εφελκυσμού (ΔL/L) 400 με, να βρεθεί το ΔR_1 και το ΔV για V_{in}=4V.

Ισχύει:

$$G=\frac{\Delta R/R}{\Delta L/L}\Rightarrow\frac{\Delta R}{R}=G\frac{\Delta L}{L}=G\varepsilon=1.9\times400\times10^{-6}=7.6\times10^{-4}$$

Επομένως, $\Delta R_1=R_1\times7.6\times10^{-4}=0.15\ \Omega$

Αντίστοιχα:

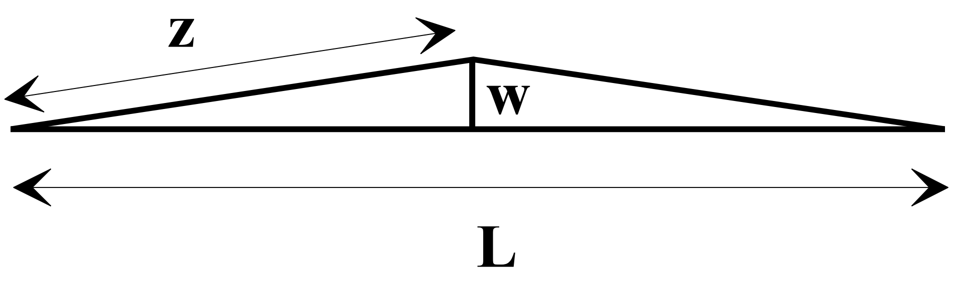
$$\Delta V=V_{in}\left\{\frac{\Delta R_1}{R_1+R_2}\right\}=4\frac{0.15}{400}=1.5\mathrm{mV}$$

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα:

Α) Εταιρεία παραγωγής ρακετών τένις, με στόχο την μέτρηση της μηχανικής τάσης που ασκεί το μπαλάκι σε ένα κτύπημα, αντικατέστησε στις ρακέτες μία χορδή μήκους L=25 cm με πιεζοαντίσταση που έχει συντελεστή G=5, μέτρο Young E=80 GN/m^2 και ωμική αντίσταση R=1000 Ω. Αν σε ένα κτύπημα η αντίσταση μεταβληθεί κατά ΔR=16 Ω, πόσο έχει μετατοπιστεί το κέντρο της πιεζονατίστασης από το επίπεδο της ρακέτας; Πόση είναι η μηχανική τάση που προκάλεσε αυτή την μεταβολή;

Έχουμε:

$$G=\frac{\Delta R/R}{\Delta L/L}\Rightarrow\frac{\Delta L}{L}=\frac{\Delta R/R}{G}=\frac{16/1000}{5}=0.0032$$



Έχουμε δηλαδή μία ποσοστιαία αλλαγή στο μήκος της πιεζοαντίστασης 0.32%. Αφού το αρχικό μήκος ήταν L=25 cm, η αλλαγή στο μήκος μετά τον εφελκυσμό είναι: $\Delta L = 0.0032 \times 25 = 0.8 cm$

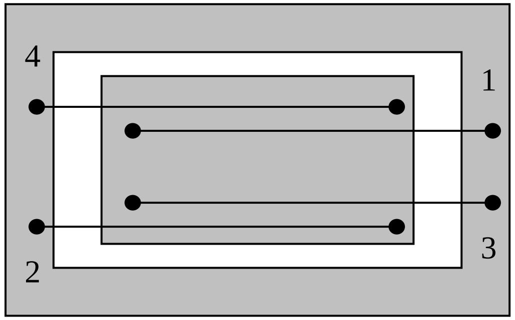
Όμως, με βάση το παραπάνω σχήμα, 2z=L′=L+ΔL=25.8 cm, άρα z=12.54 cm.

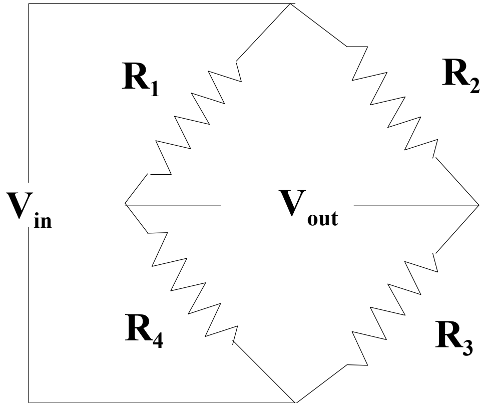
Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι η μετατόπιση του κέντρου w είναι:

$$w = \sqrt{z^2 - (L/2)^2} = \sqrt{12.54^2 - 12.5^2} = 1 cm$$

Σε σχέση με την μηχανική τάση σ που προκαλεί αυτές τις αλλαγές, αυτή μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση (7.7):

$$\frac{\Delta R}{R} = \sigma \frac{G}{E} \Rightarrow \sigma = \frac{(\Delta R/R)E}{G} = \frac{(16/1000) \times 80 \times 10^9}{5} = 0.256 \frac{GN}{m^2}$$





Στην ελεύθερη πιεζοαντίσταση του σχήματος να βρεθεί η σχέση μεταξύ V_{out} και V_{in} για δύναμη με διεύθυνση προς αριστερά.

Αρχικά θα ισχύει:

$$V_0 = V_{in}\left[\frac{R_1}{R_1 + R_4} - \frac{R_2}{R_2 + R_3}\right]$$

Μετά την εφαρμογή της δύναμης θα ισχύει:

$$V_0 + \Delta V = V_{in}\left[\frac{R_1 + \Delta R_1}{R_1 + \Delta R_1 + R_4 - \Delta R_4} - \frac{R_2 - \Delta R_2}{R_2 - \Delta R_2 + R_3 + \Delta R_3}\right]$$

Άρα θα ισχύει συνολικά:

$$\Delta V = V_{in}\left[\frac{R_1 + \Delta R_1}{R_1 + \Delta R_1 + R_4 - \Delta R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_4}\right] + V_{in}\left[\frac{R_2}{R_2 + R_3} - \frac{R_2 - \Delta R_2}{R_2 - \Delta R_2 + R_3 + \Delta R_3}\right]$$

Μετά από πράξεις θα έχουμε:

$$\Delta V = V_{in}\left[\frac{R_1 \Delta R_4 + R_4 \Delta R_1}{(R_1 + R_4)^2} + \frac{R_2 \Delta R_3 + R_3 \Delta R_2}{(R_2 + R_3)^2}\right]$$

Αν αρχικά ίσχυε $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$, τότε το αποτέλεσμα θα είναι:

$$\Delta V = \frac{V_{in}}{R}\left[\Delta R_1 + \Delta R_2 + \Delta R_3 + \Delta R_4\right] = 4\frac{V_{in}\Delta R}{R}$$

Σε πιεζοαντίσταση με διατομή 1 mm^2, μήκος L=1 cm, συντελεστή πιεζονατίστασης G=3, ωμική αντίσταση R=1 KΩ και μέτρο του Young E=5×10^9 N/m^2 ασκείται διαμήκης δύναμη 10 N. Ποια θα είναι η αλλαγή του μήκους της και της ωμικής της αντίστασης. Αν η πιεζοαντίσταση είναι συνδεμένη σε γέφυρα που είναι αρχικά σε ισορροπία και τροφοδοτείται με 10 V, πόση αλλαγή στην τάση θα προκαλέσει αυτή η δύναμη;

Για την μεταβολή του μήκους θα ισχύει:

$$\Delta L = \frac{FL}{EA} = \frac{10\times10^{-2}}{\left(5\times10^{9}\right)\times10^{-6}} = 2\times10^{-5}\,\mathrm{m} = 20\mu\mathrm{m}$$

Αντίστοιχα, για την μεταβολή της αντίστασης θα ισχύει:

$$\frac{\Delta R}{R}=\frac{FG}{EA}\Rightarrow \Delta R=\frac{FGR}{EA}=\frac{10\times 3\times 10^{3}}{5\times 10^{9}\times 10^{-6}}=6\Omega$$

Αν στη γέφυρα είχαμε αρχικά ισορροπία, μετά την εφαρμογή της δύναμης θα ισχύει:

$$\Delta \mathrm{V}=\mathrm{V}_{\mathrm{in}}\left\{\frac{\Delta \mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2}\right\}=10\left\{\frac{6}{2000}\right\}=30mV$$