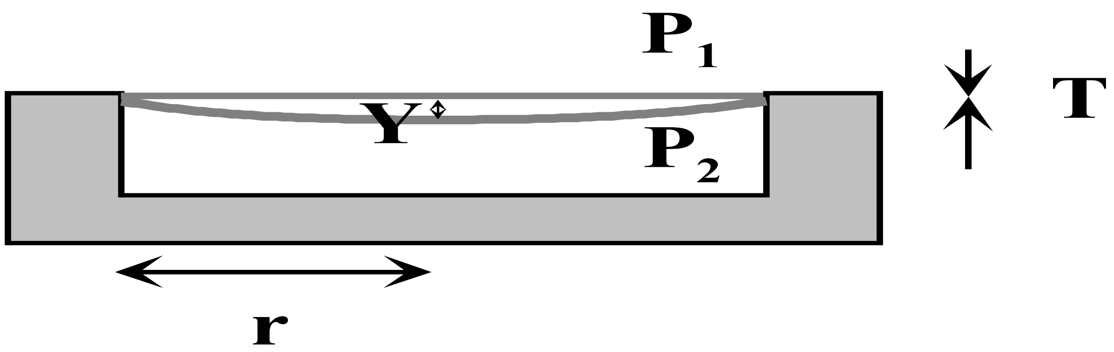
<u>Αισθητήρας πίεσης με διάφραγμα</u>

Ένας αισθητήρας πίεσης με πολύ καλή ακρίβεια είναι ο αισθητήρας πίεσης με διάφραγμα (μεμβράνη) από κατάλληλο υλικό. Βασική παράμετρος για την ανάπτυξη αυτού του αισθητήρα είναι η παραμόρφωση που υφίσταται η μεμβράνη όταν υφίσταται μία πίεση P. Για να πάρουμε μία μαθηματική προσέγγιση του τι συμβαίνει, ας θεωρήσουμε μία κυκλική μεμβράνη διαμέτρου 2r και πάχους T η οποία είναι σταθερά στερεωμένη σε ένα δίσκο και η οποία υφίσταται πιέσεις P_1 από την μία πλευρά και P_2 από την άλλη, με $P_1>P_2$. Λόγω της διαφοράς πίεσης, η μεμβράνη υφίσταται μία δύναμη που δίνεται από την εξίσωση:

$$F=(P_1-P_2)\pi r^2$$



Διάφραγμα υπό διαφορά πίεσης

Η δύναμη αυτή θα έχει φορά από την μεγαλύτερη πίεση προς τη μικρότερη και θα έχει σαν αποτέλεσμα την παραμόρφωση της μεμβράνης και την μετακίνηση του κέντρου της κατά Y. Έχει υπολογιστεί μαθηματικά ότι η μετατόπιση του κέντρου Y σχετίζεται με τα υπόλοιπα μεγέθη του προβλήματος μέσω μιας σχέσης:

$$\frac{\mathrm{Pr}^4}{\mathrm{ET}^4} = \frac{16}{3\left(1-\mathrm{v}^2\right)}\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{T}} + \frac{7 \quad \mathrm{v}}{3\left(1-\mathrm{v}\right)}\frac{\mathrm{Y}^3}{\mathrm{T}^3}$$

- **όπου $P=P_1-P_2$ και r, T ακτίνα και το πάχος της μεμβράνης αντίστοιχα**
- **E σταθερά του υλικού που ονομάζεται μέτρο του Young. Συσχετίζει μία μηχανική τάση σ με τη ποσοστιαία αλλαγή σε διάσταση ΔL/L που προκαλεί, μέσω της εξίσωσης σ/E=ΔL/L (το E δίνεται πάντοτε και έχει τυπικές τιμές περίπου 10^{11} N/m^2)**
- **v σταθερά του υλικού που ονομάζεται λόγος Poisson. Συσχετίζει την σχετική αλλαγή στη διατομή προς τη σχετική αλλαγή του μήκους κατά την εφαρμογή μηχανικής τάσης με** $v = \dfrac{dD/D}{dL/L}$ **(το v δίνεται πάντοτε και έχει τιμή 0.2-0.3 περίπου).**

Στην εξίσωση έχουμε δύο όρους που αφορούν την μετατόπιση του κέντρου, με τον πρώτο να σχετίζεται με κάμψη ενώ ο δεύτερος με τέντωμα. Η εξίσωση αυτή είναι μη γραμμική και λύνεται μόνο αναλυτικά. Αν όμως η μετατόπιση του κέντρου είναι αρκετά μικρή ώστε Y<<T, τότε ο τρίτης τάξης όρος είναι πολύ μικρός σε σχέση με τον πρώτης τάξης όρο και η εξίσωση περιορίζεται σε:

$$\frac{Pr^4}{ET^4} = \frac{16}{3\left(1 - v^2\right)} \frac{Y}{T}$$

Επομένως, κάτω από συνθήκες μικρής παραμόρφωσης, η εξίσωση που δίνει την μετατόπιση του κέντρου απλοποιείται σε:

$$Y = \frac{3\left(1 - v\right)^2}{16} \frac{r^4}{ET^3} P$$

Κάτω από συνθήκες μικρής παραμόρφωσης, η μετατόπιση του κέντρου είναι ανάλογη της πίεσης που την δημιουργεί, άρα έχουμε καλή γραμμικότητα.

Υπάρχουν διάφορα υλικά που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή μεμβράνης που θα χρησιμοποιηθεί σαν αισθητήρας πίεσης, με συχνά χρησιμοποιούμενα τα κεραμικά (E=80 GN/m^2 και v=0.2) και το πυρίτιο (E=190 GN/m^2 και v=0.25). Το πάχος είναι συνήθως της τάξης mm και η μεμβράνη πρέπει να είναι ομοιόμορφη και να έχει μηχανική/θερμική σταθερότητα.

Ο αισθητήρας πίεσης με διάφραγμα συνδυάζεται πολύ συχνά με αισθητήρα μετατόπισης τύπου πυκνωτή καθώς η τελική διάταξη που προκύπτει είναι πολύ μεγάλης ακρίβειας. Στην περίπτωση αυτή, η μεμβράνη αποτελεί τον ένα οπλισμό του πυκνωτή και η μετατόπιση λόγω πίεσης αλλάζει τη χωρητικότητα λόγω αλλαγής της απόστασης L μεταξύ των οπλισμών. Έχει υπολογιστεί ότι αν η αρχική χωρητικότητα είναι C, η αρχική απόσταση των οπλισμών L και αν υπάρχουν γραμμικές συνθήκες (μικρή μετατόπιση κέντρου), τότε η σχετική αλλαγή της χωρητικότητας του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\left(1 - v^2\right) r^4}{16ELT^3} P$$

όπου όλες οι παράμετροι είναι ίδιες με αυτές των προηγούμενων εξισώσεων. Για μεμβράνη πυριτίου με πάχος T=250 μm, ακτίνα r=1 cm, L=50 μm και πίεση P=2.5 kN/m^2, η σχετική αλλαγή της χωρητικότητας ενός πυκνωτή είναι 1%.

Ένας άλλος τρόπος για να μετρηθεί η αλλαγή στη κατάσταση της μεμβράνης και να προσδιοριστεί η πίεση, είναι η μέτρηση της μηχανικής τάσης που επάγει η πίεση (π.χ. με πιεζοαντίσταση). Η διαφορά πίεσης προκαλεί εμφάνιση μηχανικής τάσης σ πάνω στη μεμβράνη, με την τιμή της τάσης σε απόσταση x από το κέντρο της μεμβράνης να δίνεται από μία εξίσωση της μορφής:

$$\sigma(x) = \frac{3r^2}{8T^2} \left\{ (3 + v) \frac{x^2}{r^2} - (1 + v) \right\} P$$

όπου οι παράμετροι έχουν ήδη οριστεί. Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ότι η μέγιστη τάση εμφανίζεται στην περιφέρεια της μεμβράνης και έχει τιμή:

$$\sigma(r) = \frac{3r^2}{8T^2}\left\{(3+v)\frac{r^2}{r^2} - (1+v)\right\}P = \frac{6r^2P}{8T^2}$$

Αντίστοιχα, υπάρχουν σημεία στην επιφάνεια της μεμβράνης όπου η τάση είναι μηδέν. Αν τα σημεία αυτά απέχουν από το κέντρο x, τότε το x έχει τιμή:

$$\frac{3r^2}{8T^2}\left\{(3+v)\frac{x^2}{r^2} - (1+v)\right\}P = 0 \Rightarrow x = r\sqrt{\frac{1+v}{3+v}}$$

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα παραμόρφωσης σε πυρίτιο στο οποίο Ε=190 GN/m^2, v=0.25. Έστω ότι έχουμε κυκλική μεμβράνη με ακτίνα r=1 cm και πάχος T=100 μm, ενώ η μέγιστη πίεση που πρέπει να μετρηθεί είναι 100 kN/m^2 (=1 bar). Για την λύση του παραδείγματος, ας υποθέσουμε αρχικά ότι η λειτουργία αφορά την περιοχή μικρών παραμορφώσεων. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει η μετατόπιση δίνεται από:

$$Y = \frac{3\left(1-v^2\right)}{16}\frac{r^4}{ET^3}P = \frac{3(1-0.25^2)}{16}\frac{\left(10^{-2}\right)^4}{190\times10^9\times\left(10^{-4}\right)^3}10^5 = 900\mu m$$

Με την λύση αυτή βλέπουμε ότι λόγος Y/T έχει τιμή 9, δηλαδή δεν ισχύει η προϋπόθεση που απαιτεί η χρήση της απλής εξίσωσης. Επομένως, πρέπει να χρησιμοποιηθεί η πλήρης εξίσωση, η οποία λύνεται μόνο αναλυτικά και δίνει λύση Y=250 μm. Άρα απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή κατά τη λύση προβλήματος που αφορά αισθητήρα πίεση με διάφραγμα.

Ένας αισθητήρας πίεσης χωρητικού τύπου έχει σαν ένα οπλισμό κυκλική κεραμική μεμβράνη ($E=8\times10^{10}$ N/m^2, $v=0.2$) διαμέτρου D=1 cm και πάχους T=200 μm. Πόσο μετατοπίζεται το κέντρο της μεμβράνης για P=100 kN/m^2; Αν η αρχική χωρητικότητα ήταν C=100 pF, πόσο θα αλλάξει στο 1 kN/m^2; Πόση είναι η γραμμικότητα του αισθητήρα στα 100 kN/m^2; Τι θα αλλάξει αν αντί για κεραμικό έχω σίδηρο;

Για μικρές μετατοπίσεις του κέντρου θα έχω:

$$Y=\frac{3\left(1-v^2\right)}{16}\frac{r^4}{ET^3}P=\frac{3\left(1\text{-}0.2^2\right)}{16}\frac{\left(0.5\times10^{-2}\right)^4}{\left(8\times10^{10}\right)\times\left(200\times10^{-6}\right)^3}10^5=17.6\mu m$$

Βλέπουμε ότι Y/T=0.09, άρα έχω όντως μικρές μετατοπίσεις. Για να υπολογίσουμε το ΔC πρέπει να βρούμε την αρχική απόσταση των οπλισμών του πυκνωτή d. Αυτή θα βρεθεί από: $C=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 A}{L}\Rightarrow L=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0\pi r^2}{C}=\frac{\left(8.85\times10^{-12}\right)\times\pi\times\left(0.5\times10^{-2}\right)^2}{100\times10^{-12}}=6.95\mu m$

Τώρα βρίσκουμε την μεταβολή της χωρητικότητας:

$$\Delta C = \frac{\left(1-v^2\right)r^4 CP}{16ELT^3} = \frac{\left(1-0.2^2\right)\times\left(0.5\times10^{-2}\right)^4\times\left(100\times10^{-12}\right)\times10^3}{16\times\left(8\times10^{10}\right)\times\left(6.95\times10^{-6}\right)\times\left(200\times10^{-6}\right)^3} = 0.84\,pF$$

Σε σχέση με την γραμμικότητα του αισθητήρα στα 100 kN/m^2, αυτή θα δίνεται από τον λόγο του όρου τρίτης τάξης προς τον πρώτης τάξης όρο:

$$\frac{\frac{7-\mathrm{v}}{3(1-\mathrm{v})}\frac{\mathrm{Y}^3}{\mathrm{T}^3}}{\frac{16}{3\left(1-\mathrm{v}^2\right)}\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{T}}} = \frac{(7-v)(1+v)}{16}\left(\frac{Y}{T}\right)^2 = \frac{(7-0.2)(1+0.2)}{16}(0.09)^2 \approx 4\times10^{-3}$$

Δηλαδή, η γραμμικότητα σε πίεση 10^5 N/m^2 (1 bar) είναι 0.4%. Τέλος, αν χρησιμοποιηθεί σίδηρος αντί για κεραμικό, θα έχω μικρή διαφοροποίηση στη λειτουργία του αισθητήρα λόγω των διαφορετικών τιμών E και v.

Διαθέτουμε αισθητήρα πίεσης με διάφραγμα σε συνδυασμό με πιεζοηλεκτρικό κρύσταλλο. Οι διαστάσεις του διαφράγματος είναι: r=1 cm, T=400 μm, ενώ είναι κατασκευασμένος από πυρίτιο με v=0.25 και E=190 GN/m^2. Μέχρι ποια πίεση η γραμμικότητα του αισθητήρα είναι καλύτερη από 0.1%; Αν στο κέντρο της μεμβράνης έχουμε τοποθετήσει πιεζοηλεκτρικό κρύσταλλο με: d=1.1×10^{-10} Cb/V, ε_r=1200, E=8.3×10^{10} N/m^2, A=1 cm X 1 cm και πάχος L=1mm, ποια θα είναι η τάση εξόδου στη μέγιστη πίεση;

Για να έχουμε γραμμικότητα καλύτερη από 0.1% πρέπει για τη μετατόπιση του κέντρου Y να ισχύει:

$$\frac{7-\mathrm{v}}{3(1-\mathrm{v})}\frac{\mathrm{Y}^3}{\mathrm{T}^3} < 0.001\frac{16}{3\left(1-\mathrm{v}^2\right)}\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{T}} \Rightarrow$$

$$\frac{Y}{T} < \sqrt{0.001\frac{16(1-v)}{(7-v)\left(1-v^2\right)}} = 0.0435$$

Για αυτές τις συνθήκες θα ισχύει:

$$\frac{P_{max}r^4}{ET^4} = \frac{16}{3\left(1-v^2\right)}\frac{Y}{T} \Rightarrow$$

$$P_{max} = \frac{16ET^4}{3\left(1-v^2\right)r^4}\frac{Y}{T} = 120320N/m^2 \approx 1.2Atm$$

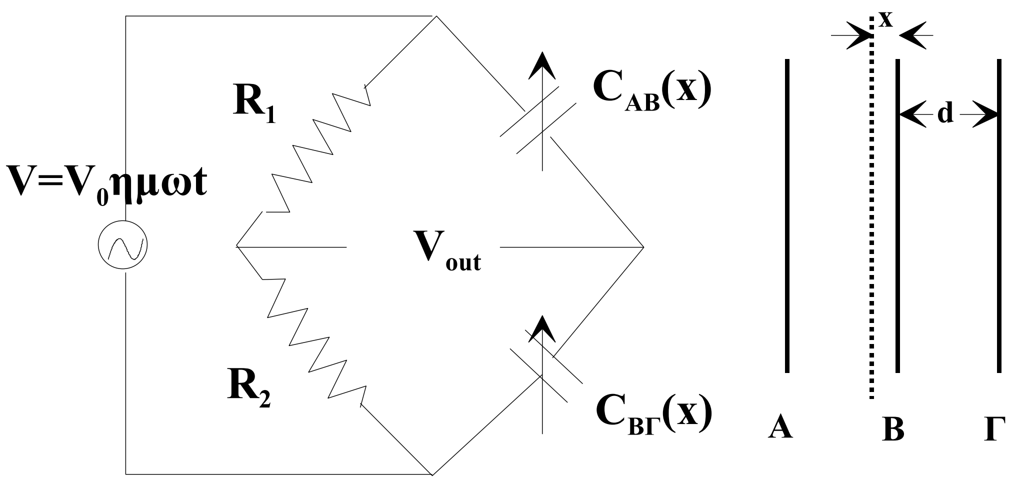
Η μηχανική τάση στο κέντρο θα είναι: $\sigma(r) = \frac{6r^2P}{8T^2} = 56.4MN/m^2$

Η μηχανική τάση αυτή θα προκαλεί μία αλλαγή ΔL στη διάσταση του κρυστάλλου που θα δίνεται από:

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = \frac{\sigma L}{E} = 3\times10^{-7}m$$

Επομένως, η τάση στον πιεζοηλεκτρικό κρύσταλλο θα βρεθεί από:

$$\frac{\Delta L}{V} = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{dE} \Rightarrow V = \frac{dE\Delta L}{\varepsilon_r\varepsilon_0} = 258V$$



Έστω χωρητικός αισθητήρας διαφορικής πίεσης με διάφραγμα που λειτουργεί σε συνδυασμό με γέφυρα Wheatstone όπως στο σχήμα. Βρείτε τη σχέση μεταξύ τάσης εξόδου και μετατόπισης x του διαφράγματος.

Γνωρίζουμε ότι:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Για μετατόπιση του διαφράγματος κατά x θα έχουμε:

$$C_{ab} = \varepsilon_0 \frac{A}{d - x}, \quad C_{bc} = \varepsilon_0 \frac{A}{d + x}$$

Επομένως, η εμπέδηση θα δίνεται από:

$$Z_{ab} = \frac{1}{j\omega C_{ab}}, \quad Z_{bc} = \frac{1}{j\omega C_{bc}} \Rightarrow Z_{ab} = \frac{d - x}{j\omega\varepsilon_0 A}, \quad Z_{bc} = \frac{d + x}{j\omega\varepsilon_0 A}$$

Από την γέφυρα θα έχουμε:

$$V_{out}(\omega) = V_{in}(\omega)\left[\frac{z_{bc}}{z_{bc} + z_{ab}} - \frac{R_2}{R_2 + R_1}\right] = V_{in}(\omega)\left[\frac{\frac{d+x}{j\omega\varepsilon_0 A}}{\frac{d+x}{j\omega\varepsilon_0 A} + \frac{d-x}{j\omega\varepsilon_0 A}} - \frac{R_2}{R_2 + R_1}\right]$$

Με απλοποίηση θα έχουμε:

$$V_{out}(\omega) = V_{in}(\omega)\left[\frac{d+x}{2d} - \frac{R_2}{R_2 + R_1}\right]$$

Αν R_1=R_2, θα ισχύει:

$$V_{out}(\omega) = V_{in}(\omega)\left[\frac{x}{2d}\right]$$

Εταιρεία κατασκευής αισθητήρων πίεσης θέλει να κατασκευάσει ένα αισθητήρα πίεσης με διάφραγμα σε συνδυασμό με πιεζοαντίσταση. Ο αισθητήρας πρέπει να λειτουργεί στην περιοχή 0-10 kN/m^2, να έχει γραμμικότητα καλύτερη από 2% έξοδο σε mV. Αν υπάρχουν διαθέσιμα: κεραμικό υλικό με μέτρο Young E=80 GN/m^2 και λόγο Poisson v=0.2, καθώς και κεραμική πιεζοαντίσταση με G=100, R=1 kΩ, τι μπορείτε να προτείνετε.

Πρέπει να βρούμε τι διαστάσεις θα πρέπει να έχει η (κυκλική) κεραμική μεμβράνη που θα χρησιμοποιήσουμε. Έστω ότι έχει ακτίνα r και πάχος T. Για γραμμικότητα καλύτερη από 0.2% πρέπει για τη μετατόπιση του κέντρου της Y να ισχύει:

$$\frac{7-\mathrm{v}}{3(1-\mathrm{v})}\frac{\mathrm{Y}^3}{\mathrm{T}^3}<0.002\frac{16}{3\left(1-\mathrm{v}^2\right)}\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{T}}\Rightarrow$$

$$\frac{Y}{T}<\sqrt{0.002\frac{16(1-v)}{(7-v)\left(1-v^2\right)}}=0.06$$

Δηλαδή, αν η μετατόπιση Y είναι μικρότερη από 0.06T, η γραμμικότητα είναι καλύτερη από 0.2%. Ταυτόχρονα όμως, στην προηγούμενη εξίσωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τον γραμμικό όρο, από τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε την ακτίνα της μεμβράνης r για συγκεκριμένες τιμές των Y, T. Αν διαλέξω Y/T=0.05 και πάχος μεμβράνης T=0.5 mm, τότε Y=25 μm και στην εξίσωση θα ισχύει:

$$\frac{\mathrm{Pr}^4}{\mathrm{ET}^4} = \frac{16}{3\left(1-\mathrm{v}^2\right)}\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{T}} \Rightarrow$$

$$r^4 = \frac{16EYT^3}{3\left(1-v^2\right)P} = 1.39\times10^{-7}m^4 \Rightarrow r = 1.93cm$$

Δηλαδή, αν διαλέξω μεμβράνη με r=1.93 cm και T=0.5 mm, τότε στη μέγιστη κλίμακα (10 kN/m^2), η γραμμικότητα θα είναι καλύτερη από 0.2%.

Σχετικά με την αναγνώριση της μεταβολής της κατάστασης της μεμβράνης υπό την επίδραση της πίεσης, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πιεζοαντίσταση, η οποία θα αντιληφθεί την μηχανική τάση που προκαλεί η πίεση. Για καλύτερα αποτελέσματα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πάνω στη μεμβράνη 4 πιεζοαντιστάσεις: μία σε θέση με μέγιστη τάση και 3 σε θέσεις με τάση μηδέν. Για να βρούμε τις σωστές θέσεις θα χρησιμοποιήσουμε την κατανομή της τάσης πάνω στη μεμβράνη σε σχέση με την απόσταση x από το κέντρο. Μέγιστη τάση έχουμε στην περιφέρεια της μεμβράνης, άρα εκεί θα βάλουμε την πιεζοαντίσταση που θα μετρά. Ταυτόχρονα, από θα βρούμε τις θέσεις με μηδενική τάση:

$$x = r\sqrt{\frac{1+v}{3+v}} = 1.93\sqrt{\frac{1+0.2}{3+0.2}} = 1.18cm$$

Δηλαδή, σε απόσταση 1.18 cm από το κέντρο της μεμβράνης η τάση είναι μηδέν. Επομένως, σε σημεία της περιφέρειας ενός κύκλου με ακτίνα 1.18 cm από το κέντρο μπορούμε να τοποθετήσουμε τις τρεις άλλες πιεζοαντιστάσεις.

Μπορούμε να υπολογίσουμε και την μέγιστη τάση στην μεμβράνη (στην περιφέρεια):

$$\sigma(r) = \frac{6r^2 P}{8T^2} = 11.17\frac{MN}{m^2}$$

Η μεταβολή της τιμής της αντίστασης της πιεζοαντίστασης υπό πίεση 10 kN/m^2 μπορεί τώρα να βρεθεί:

$$\frac{\Delta R}{R} = \sigma\frac{G}{E} \Rightarrow$$

$$\Delta R = \sigma R\frac{G}{E} = 11.17\times10^6\times10^3\,\frac{100}{80\times10^9} \approx 14\Omega$$

Αν σε γέφυρα που αρχικά είναι σε ισορροπία έχουμε μεταβολή μιας αντίστασης κατά ΔR η τάση εξόδου δίνεται από:

$$V_{out} = V_{in}\frac{\Delta R}{2R_0} = V_{in}\frac{14}{2000} = 0.007V_{in}$$

Επομένως, για V_{in}=10 V, έχουμε έξοδο 70 mV.

Συμπερασματικά: αν βάλουμε τις τρεις πιεζονατιστάσεις σε απόσταση 1.18 cm από το κέντρο, την τέταρτη στην περιφέρεια της μεμβράνης και τις συνδέσουμε σε γέφυρα με τάση εισόδου 10 V, για πιεση 10 kN/m^2 θα έχω έξοδο 70 mV.