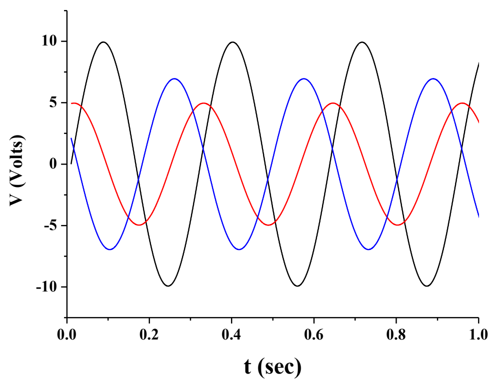
<u>Εναλλασσόμενο και μιγαδικοί</u>

1 Γενικά

Σε κυκλώματα DC, οι ηλεκτρικές μεγέθη εξαρτώνται αποκλειστικά από τις ωμικές αντιστάσεις, φυσικά μετά την ολοκλήρωση πιθανών μεταβατικών φαινομένων λόγω παρουσίας πηνίων και πυκνωτών, και δεν υφίστανται διαφορές φάσης μεταξύ ρεύματος και τάσης. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τον χειρισμό των DC ηλεκτρικών ποσοτήτων ως μονόμετρων ποσοτήτων, οπότε για τις σχετικές πράξεις είναι αρκετή η απλή αριθμητική. Σε αντίθεση, στα κυκλώματα AC, ο ρόλος των πηνίων και των πυκνωτών είναι πιο ουσιαστικός καθώς και τα ηλεκτρικά μεγέθη επηρεάζουν και προκαλούν διαφορές φάσεις μεταξύ ρευμάτων και τάσεων. Επομένως, ο χειρισμός των ηλεκτρικών μεγεθών σε κυκλώματα AC είναι πιο περίπλοκη και υπάρχουν τρεις δυνατότητες για την περιγραφή τους. Η πρώτη είναι η ημιτονοειδής, η δεύτερη αφορά περιστρεφόμενα διανύσματα, ενώ η τρίτη βασίζεται στους μιγαδικούς αριθμούς

2 Ημιτονοειδής αναπαράσταση

Οι βασικές συνθήκες που ισχύουν σε ένα εναλλασσόμενο ρεύμα είναι: (α) η τιμή του ρεύματος (ή της τάσης) μεταβάλλεται με το χρόνο παίρνοντας θετικές και αρνητικές τιμές, (β) η εξέλιξη των τιμών είναι περιοδική με περίοδο T και (γ) το ολοκλήρωμα των βασικών μεγεθών σε μία περίοδο είναι μηδέν. Με βάση αυτές τις συνθήκες, η βασική και κλασσική αναπαράσταση των ηλεκτρικών μεγεθών στα AC κυκλώματα είναι η ημιτονοειδής, δηλαδή τα μεγέθη έχουν την μαθηματική μορφή $I=I_0ημ(ωt+φ)$, όπου:



Σχήμα 1 Τριγωνομετρική αναπαράσταση εναλλασσόμενων μεγεθών

I_0 είναι το μέγιστο πλάτος του ρεύματος

I είναι η στιγμιαία τιμή του ρεύματος σε χρόνο t

ω είναι η κυκλική συχνότητα ($ω=2π/T$, με $T=1/f$ όπου f είναι η συχνότητα)

φ είναι η αρχική φάση

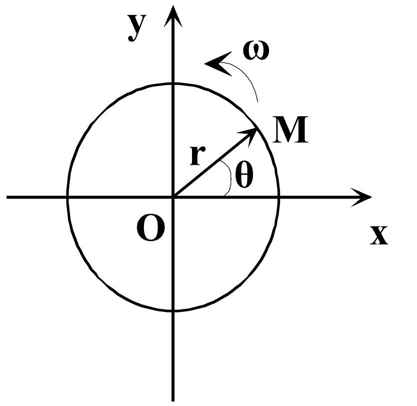
$ωt+φ$ είναι η φάση κατά την χρονική στιγμή t

Σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να επισημανθεί εδώ ότι δεν υπάρχει κάποια διαφορά αν για την περιγραφή χρησιμοποιηθεί ημίτονο ή συνημίτονο, καθώς οι δυο συναρτήσεις απλά διαφέρουν κατά μία αρχική φάση π/2.

Όταν χρησιμοποιείται ημιτονοειδής αναπαράσταση, οι πράξεις μεταξύ των ηλεκτρικών μεγεθών βασίζεται στην τριγωνομετρία, αλλά δεν είναι πάντα εύκολες. Παράλληλα όμως, η γραφική αναπαράσταση των μεγεθών είναι μάλλον προβληματική, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1, όπου έχουν σχεδιαστεί τρεις τάσεις οι: V_1=10ημ(20t), V_2=5ημ(20t-π/6) και V_3=7ημ(20t-π/3).

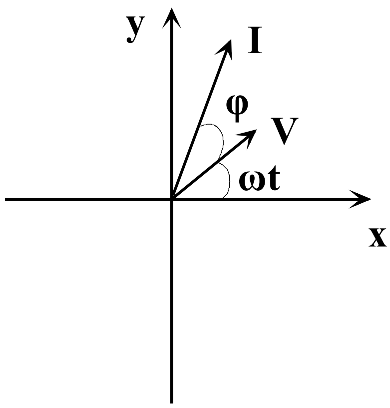
9.3 Αναπαράσταση με περιστρεφόμενα διανύσματα

Ένας ευκολότερος τρόπος να διαχειριστούμε εναλλασσόμενα μεγέθη είναι τα περιστρεφόμενα διανύσματα. Έστω οριζόντιο σύστημα αξόνων και ένα διάνυσμα OM με μήκος r το οποίο περιστρέφεται αριστερόστροφα με γωνιακή ταχύτητα ω. Σε κάποια χρονική στιγμή t, το διάνυσμα σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x. Τότε, οι x, y προβολές του διανύσματος θα δίνονται από τις σχέσεις: x=rσυνθ και y=rημθ. Αν κατά την χρονική στιγμή t=0 το διάνυσμα ξεκίνησε από τον άξονα x, τότε για κάθε χρονική στιγμή t, η γωνία θ θα δίνεται από την σχέση θ=ωt. Άρα, οι προβολές του διανύσματος θα είναι: x=rσυνωt και y=rημωt. Αντίστοιχα, αν κατά την χρονική στιγμή t=0 το διάνυσμα σχημάτιζε γωνία φ με τον άξονα x, τότε θα ισχύει: x=rσυν(ωt+φ) και y=rημ(ωt+φ).



Σχήμα 2 Περιστρεφόμενο διάνυσμα

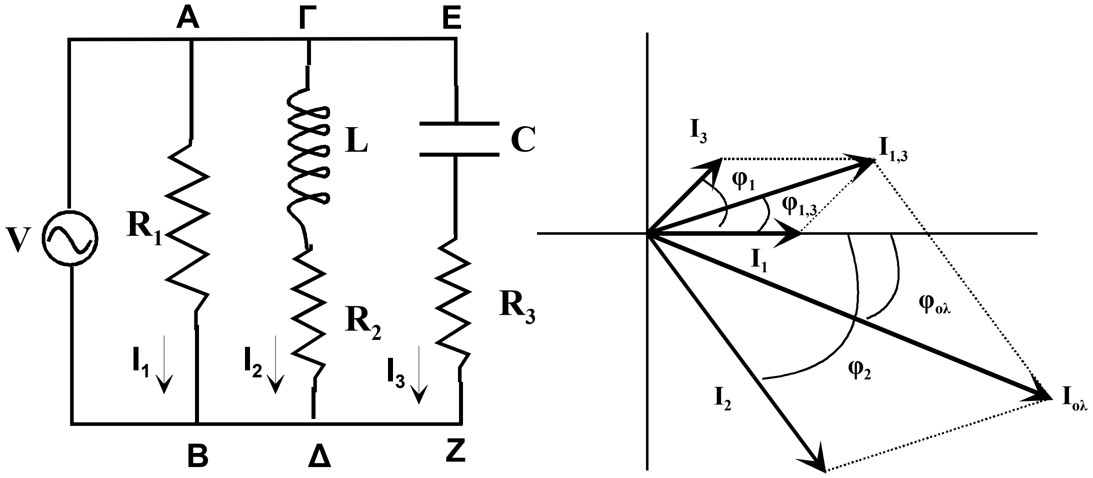
Βλέπουμε δηλαδή ότι οι προβολές ενός διανύσματος που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι ημιτονοειδείς συναρτήσεις και μοιάζουν με τις συναρτήσεις που περιγράφουν εναλλασσόμενα ηλεκτρικά μεγέθη. Με βάση αυτή την παρατήρηση, μπορούμε να περιγράψουμε το εναλλασσόμενο ρεύμα με περιστρεφόμενα διανύσματα. Μάλιστα, δεν είναι απαραίτητο να παρουσιάζεται όλη η χρονική εξέλιξη των μεγεθών καθώς, αν όλα τα μεγέθη περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, σε κάθε χρονική στιγμή t, θα έχουν



Σχήμα 3 Αναπαράσταση ρεύματος τάσης

μεταξύ τους την ίδια διαφορά φάσης με αυτή του είχαν κατά την χρονική στιγμή t=0. Σαν παράδειγμα, αν έχω σε ένα κύκλωμα χωρητική συμπεριφορά, το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά φ και τα δύο ηλεκτρικά μεγέθη αναπαρίστανται όπως στο σχήμα 3 με $V=V_0\eta\mu(\omega t)$, $I=I_0\eta\mu(\omega t+\varphi)$.

Με την προσέγγιση των περιστρεφόμενων διανυσμάτων είναι εύκολη η μαθηματική

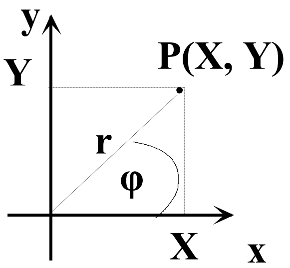


Σχήμα 4. Κύκλωμα με συνδυασμό σε σειρά και παράλληλης σύνδεσης

επεξεργασία προβλημάτων αλλά και η γραφική αναπαράσταση των μεγεθών. Σε κάθε περίπτωση, η μαθηματική επεξεργασία απαιτεί διανυσματική ανάλυση με χρήση νόμων συνημίτονου (για εύρεση του πλάτους) και ημιτόνου (για εύρεση της φάσης). Βέβαια, σε πολύπλοκα κυκλώματα, η γραφική αναπαράσταση και κατ' επέκταση η μαθηματική επίλυση του προβλήματος μπορεί να γίνει ιδιαίτερα πολύπλοκη. Έστω για παράδειγμα το κύκλωμα του σχήματος 4, όπου $R_1=10\Omega$, $R_2=3\Omega$, $R_3=10\Omega$, L=10mH, C=250μF και V=70ημ(400t). Για την εύρεση του συνολικού ρεύματος ($I_{o\lambda}$, $\varphi_{o\lambda}$), πρέπει αρχικά να υπολογιστούν κατά μέτρο και φάση τα ρεύματα I_1, I_2, I_3, τα οποία αντιστοιχούν σε συνδέσεις σε σειρά. Στη συνέχεια, προστίθεται τα I_1, I_3 για να δώσουν το $I_{1,3}$ και το $\varphi_{1,3}$ (με $I_{1,3}=\sqrt{I_1^2+I_3^2+2I_1I_3\sigma\upsilon\nu\varphi_1}$ και $\eta\mu\varphi_{1,3}=\left(I_3/I_{1,3}\right)\eta\mu\varphi_1$). Τέλος, προστίθενται με αντίστοιχο τρόπο τα I_2, $I_{1,3}$ για να δώσουν το $I_{o\lambda}$ και το $\varphi_{o\lambda}$. Είναι εμφανές ότι η διαδικασία απαιτεί πολλές πράξεις και μεγάλη προσοχή.

9.4 Βασικές έννοιες των μιγαδικών αριθμών

Είναι γνωστό ότι οι πραγματικοί αριθμοί X θεωρούνται σημεία σε μία ευθεία, έστω οριζόντια. Αν προσθέσουμε και μία κατακόρυφη ευθεία και σε κάθε σημείο της αντιστοιχήσουμε ένα φανταστικό αριθμό jY (όπου $j=\sqrt{-1}$ και Y πραγματικός αριθμός), τότε κάθε σημείο του επιπέδου θα έχει προβολή στον άξονα x πραγματικό



Σχήμα 5 Αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού

αριθμό, ενώ στον άξονα y φανταστικό. Δηλαδή, κάθε σημείο του επιπέδου θα δίνεται από τις συντεταγμένες (X,Y) και θα αντιστοιχεί σε ένα μιγαδικό αριθμό της μορφής Z=X+jY, με X την προβολή στον άξονα x και Y στον άξονα y. Η μορφή Z=X+jY ονομάζεται καρτεσιανή μορφή, ενώ παράλληλα ισχύουν (σχήμα 5):

$r=\sqrt{X^2+Y^2}$, εφφ=Y/X, Z=X+jY=rσυνφ+jrημφ=$re^{j\varphi}$, όπου r είναι το μέτρο του μιγαδικού αριθμού και φ το όρισμα του, το οποίο δεν είναι μοναδικό καθώς κάθε γωνία φ+2kπ (όπου k ακέραιος) αντιστοιχεί στο ίδιο σημείο. Η μορφή z= rσυνφ+jrημφ ονομάζεται συνημιτονοειδής, ενώ η μορφή $re^{j\varphi}$ εκθετική ή πολική.

Μερικά χρήσιμα στοιχεία για τους μιγαδικούς, που αφορούν την χρήση τους για την περιγραφή εναλλασσομένων ηλεκτρικών μεγεθών είναι:

Α) Για πρόσθεση ή αφαίρεση μιγαδικών αριθμών χρησιμοποιούμε την καρτεσιανή μορφή. Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

$$Z_1 \pm Z_2 = (X_1 \pm X_2) + j(Y_1 \pm Y_2)$$

Β) Για πολλαπλασιασμό και διαίρεση χρησιμοποιούμε την πολική μορφή. Ισχύει:

$$Z_1 Z_2 = (r_1 r_2) e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Γ) Στο παραπάνω πλαίσιο είναι χρήσιμο να θυμάται κάποιος ποιος μετατρέπεται η μία μορφή στην άλλη:

Καρτεσιανή →Πολική		**Πολική → Καρτεσιανή**	
Z=X+jY	$r=\sqrt{X^2+Y^2}$ εφφ=Y/X	$re^{j\varphi}$	Z= (rσυνφ)+j(rημφ)

Ας δούμε και μερικά παραδείγματα:

i) Να γίνει μετατροπή από πολική σε καρτεσιανή μορφή των $50\angle 53.1$, $100\angle -120$.

$$50\angle 53.1 = 50(\text{συν}53.1 + j\text{ημ}53.1) = 50(0.6 + j0.8) = 30 + j40$$

$$100\angle -120 = 100(\text{συν}(-120) + j\text{ημ}(-120)) = 100(-0.5 - j0.866) = -50 - j86.6$$

ii) Να γίνει μετατροπή από καρτεσιανή σε πολική μορφή των 4+j3, -10+j20.

$r=\sqrt{4^2+3^2}=5$, εφφ=Y/X=3/4=0.75 άρα 4+j3= $5e^{j36.9}$

$$r = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22.4, \text{ εφφ}=-20/10=-2$$

Όμως, εφαπτομένη -2 έχουν οι γωνίες -63.4° και 116.6°. Από αυτές, μόνο η 116.6° έχει θετική Υ και αρνητική Χ συνιστώσα (στη γωνία -63.4° , τα πρόσημα είναι ανάποδα). Άρα -10+j20= $22.4e^{j116.6}$

iii) Να γίνει ο πολλαπλασιασμός των 4+j3, -10+j20.

Χρησιμοποιώ τις πολικές μορφές που βρήκα προηγουμένως και έχω

$$(4+j3)(-10+j20)=(5e^{j36.9})(22.4e^{j116.6})=(5*22.4)\, e^{j(36.9+116.6)}=112\, e^{j153.5}$$

<u>5 Χρήση των μιγαδικών αριθμών στο εναλλασσόμενο</u>

Κατά την αναπαράσταση των εναλλασσομένων μεγεθών με περιστρεφόμενα διανύσματα, η άκρη ενός διανύσματος για την χρονική στιγμή t=0 αντιστοιχεί σε ένα σημείο στο επίπεδο άρα και σε ένα μιγαδικό αριθμό. Αυτό ισχύει για κάθε ηλεκτρικό μέγεθος σε ένα πρόβλημα, άρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μιγαδικούς αριθμούς για να περιγράψουμε τα εναλλασσόμενα μεγέθη. Βέβαια, οι μιγαδικοί αριθμοί είναι απλά ένα μαθηματικό εργαλείο, και μάλιστα πολύ πιο απλό από τους τριγωνομετρικούς όρους και την διανυσματική ανάλυση. Σε κάθε περίπτωση όμως, θα πρέπει να θυμόμαστε τους παρακάτω κανόνες:

(α) Οι ωμικές αντιστάσεις αντιστοιχούν σε πραγματικούς αριθμούς

(β) Οι επαγωγικές και οι χωρητικές αντιστάσεις αντιστοιχούν σε φανταστικούς αριθμούς. Μάλιστα, η επαγωγική αντίσταση θεωρείται θετική, ενώ η χωρητική αρνητική.

(γ) Ο μιγαδικός αριθμός αντιστοιχεί στην σύνθετη αντίσταση ή εμπέδηση. Δηλαδή ισχύει: $Z=R+j(X_L-X_C)$

(δ) Με αυτή την προσέγγιση, και η ισχύς θα είναι μιγαδική και θα ισχύει: S=P+jQ, όπου S είναι η φαινόμενη ισχύς, P η ενεργός και Q η άεργος.

(ε) Για να πάμε από την τριγωνομετρική στην πολική μορφή κάνουμε αντικατάσταση

$$I=I_0 ημ(ωt+φ) \rightarrow I=I_0 e^{j(ωt+φ)}$$

Μία επιπλέον μορφή που χρησιμοποιείται ιδιαίτερα στην ηλεκτρολογία είναι ο φάσορας που βασίζεται στην πολική μορφή και δίνεται από $r\angle\varphi$, όπου φ είναι η φάση, όμως σαν r πρέπει να χρησιμοποιήσουμε όχι το μέτρο αλλά την ενεργό τιμή του ηλεκτρικού μεγέθους.

Μερικά παραδείγματα

i) Έστω R=10 Ω, X_L=20 Ω και X_C=10 Ω. Να βρεθεί η εμπέδηση:

$$Z=10+j(20-10)=10+j10=14.14\angle 45$$

ii) Αν στην προηγούμενη σύνθετη αντίσταση εφαρμόσω τάση $220\angle 0$, πόσο θα είναι το ρεύμα και η ισχύς;

$$\mathrm{I} = \frac{220\angle 0}{14.14\angle 45} = 15.56\angle -45$$

$$\mathrm{P} = (220\angle 0)\times(15.56\angle -45) = 3422\angle -45$$

iii) Αν χρησιμοποιήσω μιγαδικούς για την επίλυση του κυκλώματος του Σχήματος 4, τότε θα έχω:

$V_{\varepsilon\nu} = 49.5e^{j0}$ και:

Αφού $X_L=\omega L=400\times 10\times 10^{-3}=4\Omega$ και $X_C=(\omega C)^{-1}=(400\times 250\times 10^{-6})^{-1}=10\Omega$

Τότε: $z_{AB} = 10$, $z_{\Gamma\Delta} = 3 + j4$ και $z_{EZ} = 10 - j10$ ή $z_{AB} = 10e^{j0}$, $z_{\Gamma\Delta} = 5e^{j53}$, $z_{EZ} = 14.14e^{-j45}$

Άρα τα ρεύματα είναι:

$$I_{AB,\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{z_{AB}} = \frac{49.5e^{j0}}{10e^{j0}} = 4.95e^{j0} \text{ ή } I_{AB,\varepsilon\nu} = 4.95 + j0$$

$$I_{\Gamma\Delta,\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{z_{\Gamma\Delta}} = \frac{49.5e^{j0}}{5e^{j53}} = 9.9e^{-j53} \text{ ή } I_{\Gamma\Delta,\varepsilon\nu} = 5.958 - j7.906$$

$$I_{EZ,\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{z_{EZ}} = \frac{49.5e^{j0}}{14.14e^{-j45}} = 3.5e^{j45} \text{ ή } I_{EZ,\varepsilon\nu} = 2.376 + j2.376$$

Το ολικό ρεύμα είναι:

$$\mathrm{I}_{o\lambda,\varepsilon\nu} = (4.95 + 5.958 + 2.376) - j(0 + 7.906 - 2.376) = 13.644 - j5.17$$

ή $I_{o\lambda,\varepsilon\nu} = 14.17e^{-j14.54}$