Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα – Κεραίες

Πρότερες !!! Γνώσεις

- Στο πολύ παλιό καιρό έχουμε μάθει
- Το ηλεκτροστατικό πεδίο περιγράφεται μέσω της έντασης του **E** αλλά και του βαθμωτού δυναμικού V (το γνωστό) τα οποία συνδέονται με την σχέση $\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot V$
- Για μία τυχαία κατανομή φορτίου το δυναμικό σε ένα τυχαίο σημείο του χώρου μπορεί να υπολογιστεί αθροίζοντας την συνεισφορά κάθε (στοιχειώδους) φορτίου

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum \frac{q_i}{r_i} \quad ή \quad = \int_u \frac{\rho(\vec{r})du'}{4\pi\epsilon_o(\vec{R} - \vec{r})}$$

- ή λύνοντας τη Δ.Ε Laplace - Poisson με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες :

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

Εφαρμογή το ηλεκτρικό δίπολο

- Θα βρούμε το πεδίο που δημιουργεί ένα ηλεκτρικό δίπολο (ένα θετικό και ένα αρνητικό φορτίο που απέχουν απόσταση 2a) .. Σε αρκετά μ

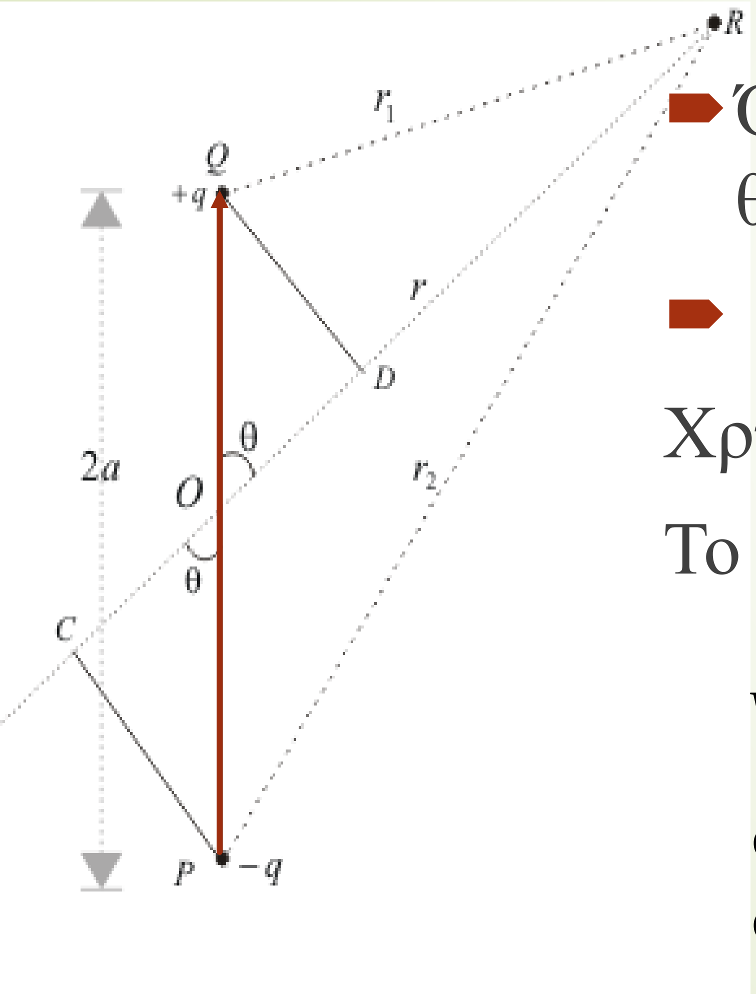


Figure 5

- Όπως φαίνεται και από το σχήμα το δυναμικό σε μια τυχαία θέση θα είναι
- $V=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_o}\left(\dfrac{q}{r_1}-\dfrac{q}{r_2}\right)$

Χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις $r_1=r-\alpha\cos\theta$ & $r_2=r+\alpha\cos\theta$

Το δυναμικό γίνεται:

$$V=\frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{2\alpha cos\theta}{r^2-\alpha^2cos^2\theta}\right) \quad \text{για } r>>\alpha \quad V=\frac{2q\alpha cos\theta}{2\pi\epsilon_o r^2}=\frac{pcos\theta}{4\pi\epsilon_o r^2}=\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\epsilon_o r^2}$$

αν $|p|=2q\alpha$ και $\vec{p}=2q\vec{\alpha}$ το διάνυσμα της διπολικής ροπής με φορά από το αρνητικό προς το θετικό φορτίο.

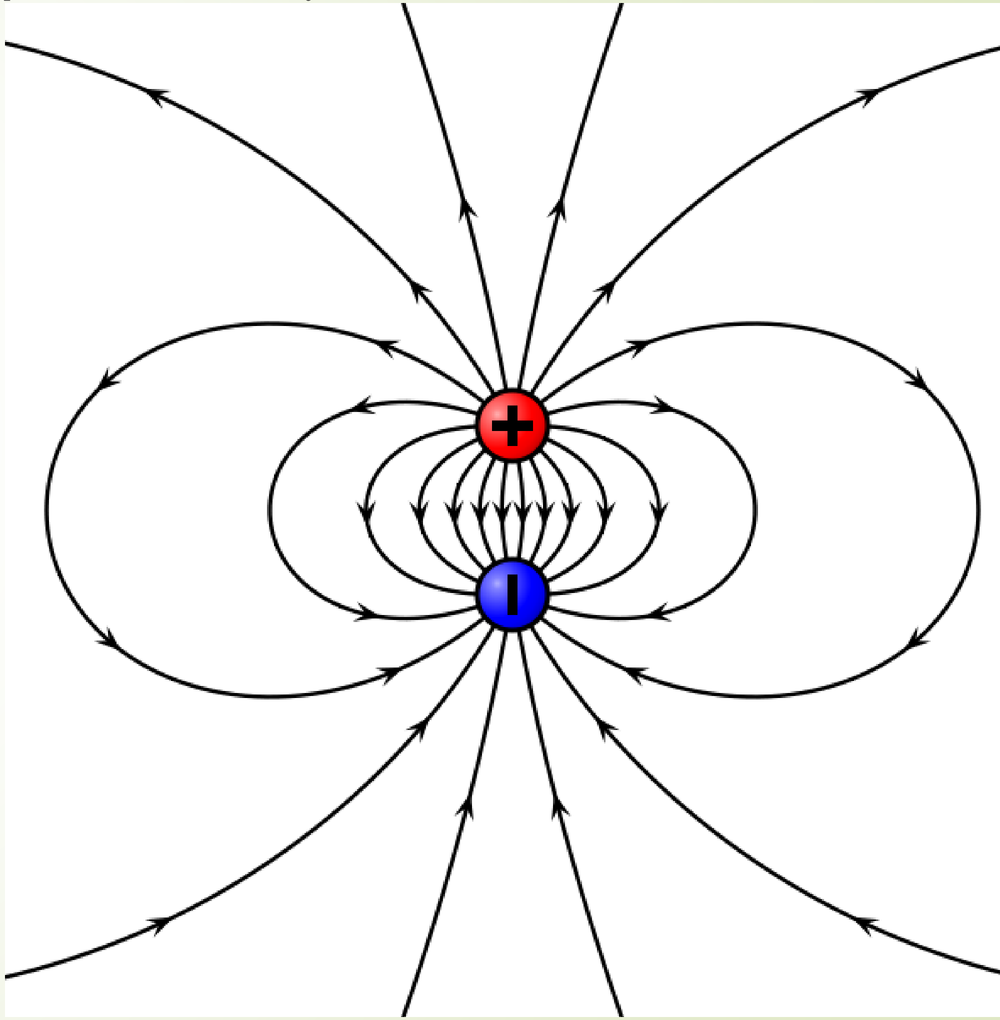
Το ηλεκτρικό πεδίο δίπολου

- Το ηλεκτρικό πεδίο που προκύπτει από την κλίση του δυναμικού V δίνεται από :

Για να την ένταση έχουμε $\vec{E} = -\nabla V$ δηλαδή

$$.....\vec{E} = \frac{|p|}{4\pi\epsilon_o r^3}(2cos\theta\ \hat{r} + sin\theta\ \hat{\theta})$$

- Και εμφανίζεται όπως στο σχήμα :



Βαθμωτό – Διανυσματικό δυναμικό

- Όπως στο ηλεκτρικό πεδίο ορίζουμε το βαθμωτό δυναμικό $\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot V$
- Στο μαγνητικό πεδίο ορίζουμε το διανυσματικό δυναμικό $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Του οποίου η περιστροφή είναι το μαγνητικό πεδίο.

Για τον προσδιορισμό του μαγνητικού πεδίου τυχαίων ρευμάτων χρησιμοποιούμε τον νόμο των Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint_C \frac{dl \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' = \frac{\mu_o}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

Άρα το διανυσματικό δυναμικό

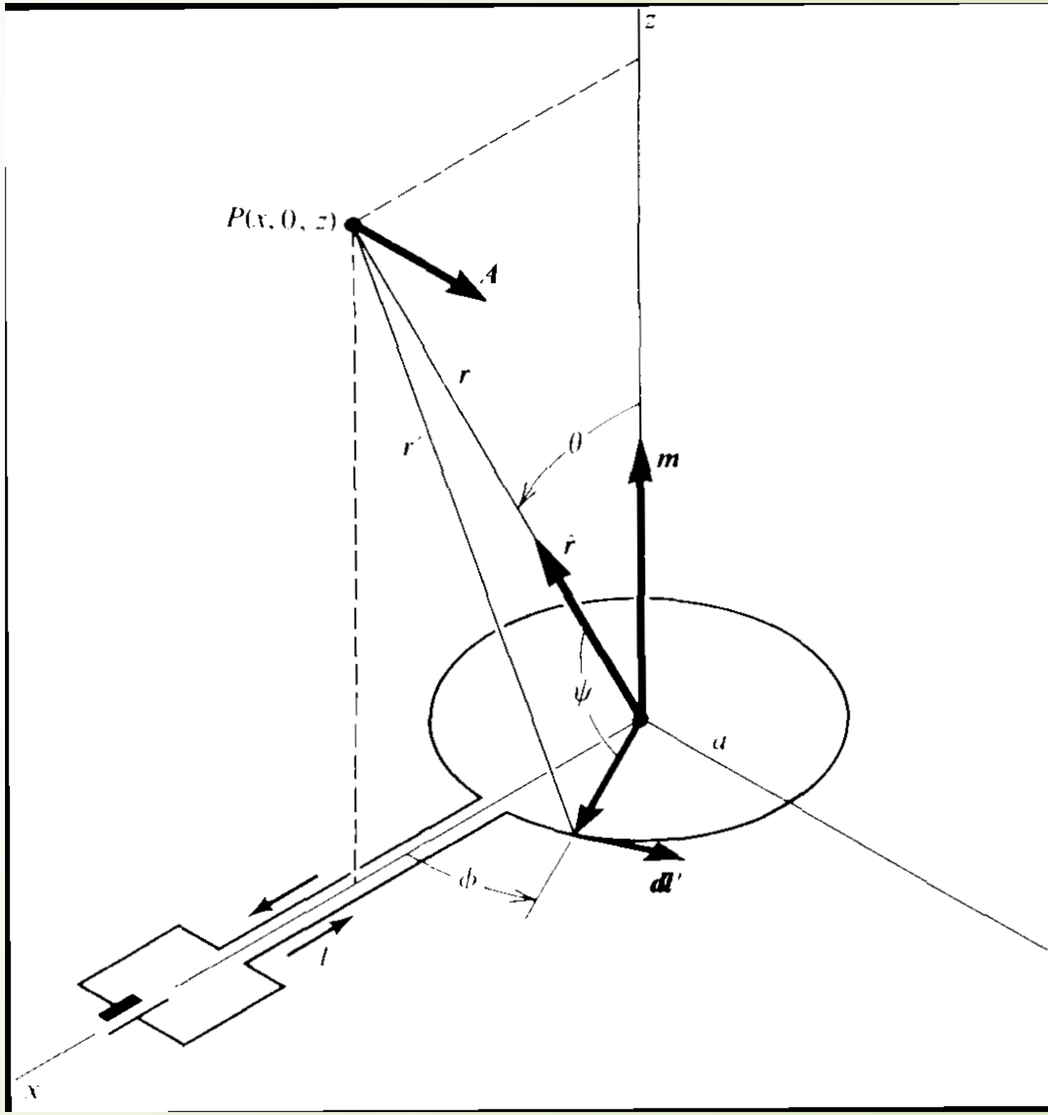
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' + \nabla \Psi(\vec{r}) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint_C \frac{dl'}{|r'|}$$

Πεδίο Μαγνητικού διπόλου

- Μαγνητικό δίπολο αποτελεί ένα κλειστό κυκλικό καλώδιο ακτίνας α που διαρρέεται από ρεύμα I.
- Σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\vec{A} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\alpha d\phi cos\phi}{r'}\hat{\phi}$$

- Τελικά κάνοντας τις ίδιες προσεγγίσεις (r>>α
- $A = \dfrac{\mu_o I \alpha^2 sin\theta}{4r^2}$ με $\vec{m} = \pi\alpha^2 I\hat{z}$
- . $\vec{A} = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\dfrac{\vec{m}\times\hat{r}}{r^2}$



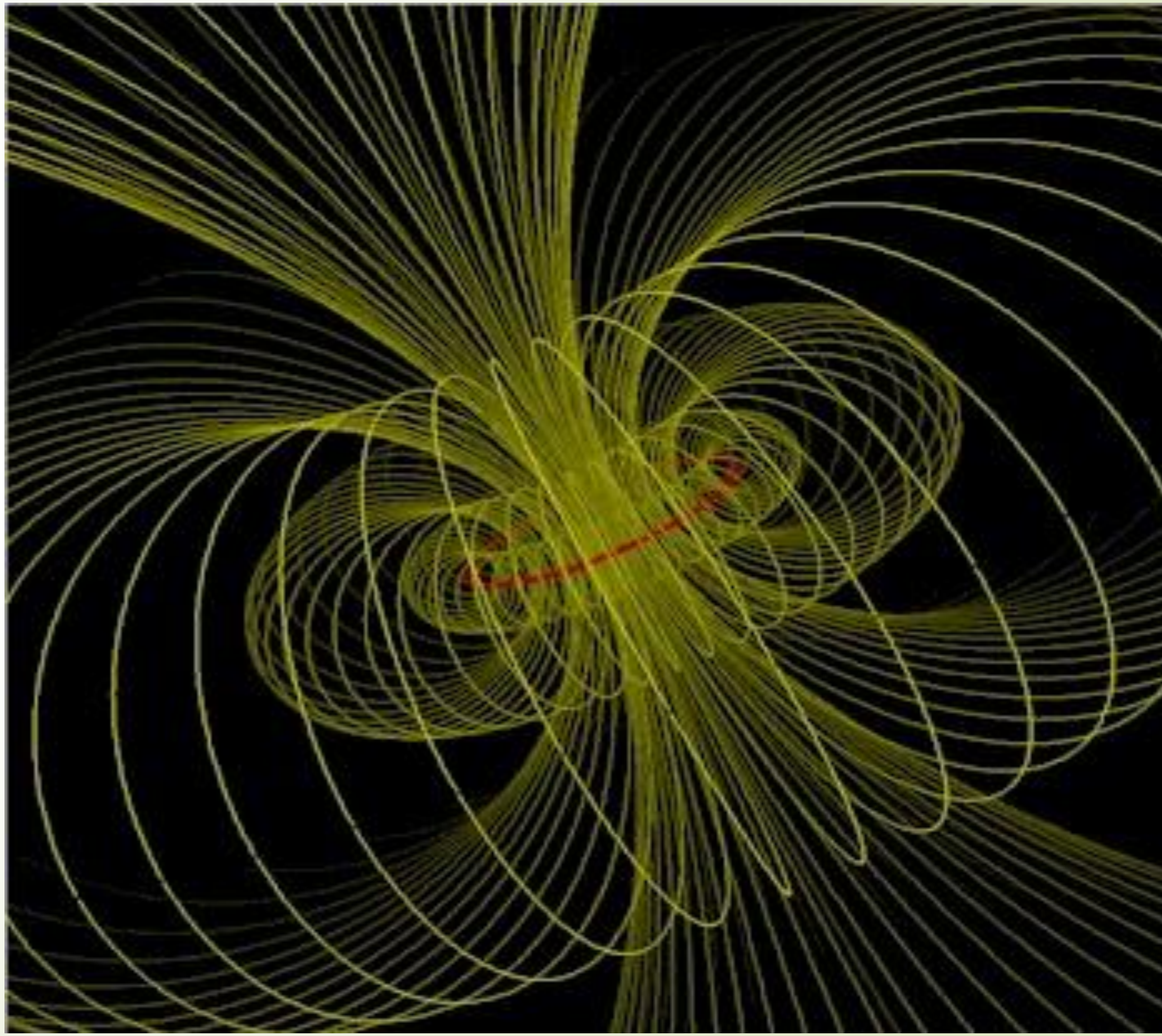
Στη γενική περίπτωση η

μαγνητική ροπή δίνεται: $\vec{m} = AI\hat{z}$

Μαγνητικό πεδίο διπόλου

- Και πάλι το μαγνητικό πεδίο (πυκνότητα μαγνητικής ροής)

$$\vec{B} = \frac{\mu_o m}{4\pi r^3}(2cos\theta\,\vec{r} + sin\theta\,\hat{\theta})$$



Από την Ηλεκτροστατική στα κύματα

- Είδαμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να περιγραφεί είτε από την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είτε από το δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο είτε από την έντασή του είτε από το διανυσματικό δυναμικό είναι δυνατόν να καταλήξουμε σε κυματικές εξισώσεις και για τα δυναμικά αυτά ?
- Από το νόμο Faraday έχουμε $\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ αν αντικαταστίσω το $\vec{B}$
.

$\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial(\nabla\times\vec{A})}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times\left(\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$ άρα η περιστροφή της $\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ είναι 0 και μπορούμε

να πούμε ότι αυτή ισούται με την κλίση μιας συνάρτησης V άρα $\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla V \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

- Από το νόμο Ampere έχουμε $\nabla\times\vec{H} = \vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ αν αντικαταστίσω το $\vec{H}$

$\nabla\times\nabla\times\vec{A} = -\mu\vec{J}+\mu\epsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A} = \mu\vec{J}+\mu\epsilon\dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \Rightarrow \boxed{\nabla^2\vec{A}-\mu\epsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}+\nabla(\nabla\cdot\vec{A}+\mu\epsilon\dfrac{\partial V}{\partial t})}$

- .Από το νόμο του Gauss $\nabla\cdot\vec{D} = \rho \Rightarrow \epsilon\nabla\cdot\vec{E} = \rho \Rightarrow -\nabla\cdot\left(\nabla V+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \dfrac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 V+\nabla\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\dfrac{\rho}{\epsilon}}$
- Αν επιλέξουμε $\nabla\vec{A} = -\mu\varepsilon\dfrac{\partial V}{\partial t}$ (συνθήκη Lorents) τότε

Κυματικές εξισώσεις δυναμικών

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}$$

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

- Αν σκεφτούμε λίγο πως εισαγάγαμε το δυναμικό V ? $\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ σε περίπτωση που $\vec{A} = 0$ $\vec{E} = -\nabla V$!!!! τι είναι δηλαδή η ποσότητα V μα το γνωστό μας ηλεκτροστατικό βαθμωτό δυναμικό !!!!!V
- Άρα καταλήξαμε σε 2 κυματικές εξισώσεις για τα δυναμικά μας τις οποίες αν λύσουμε προσδιορίζουμε πλήρως το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο για μία περιοχή του χώρου !!!!! Στην γενική τους μορφή (με τη χρήση Green functions)

$$V(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V_{vol}} \rho(x',y',z',t) \frac{e^{-jkR}}{R} d\tau'$$

$$\vec{A}(x,y,z,t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V_{vol}} \vec{J}(x',y',z',t) \frac{e^{-jkR}}{R} d\tau'$$

Γενική λύση των εξισώσεων του Maxwell – Συναρτήσεις δυναμικού

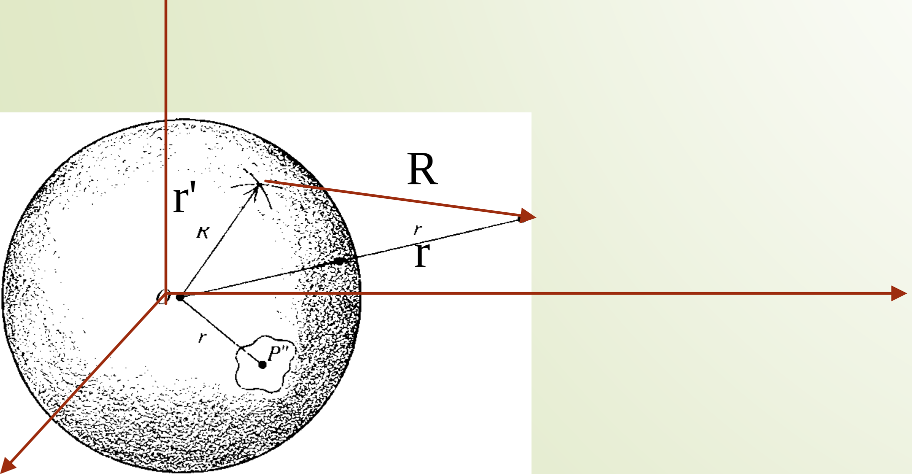
$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_{vol}} \rho(x',y',z',t)\frac{e^{-jkR}}{R}d\tau'$$

$$\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V_{vol}} \vec{J}(x',y',z',t)\frac{e^{-jkR}}{R}d\tau'$$

- Με $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ Είναι η απόσταση μεταξύ του σημείου:

$\vec{r} = xx + yy + z\hat{z}$ όπου υπολογίζονται τα δυναμικά και του σημείου: $\vec{r}\,' = x'x + y'y + z'\hat{z}$

που καθορίζει τη θέση του στοιχειώδους όγκου ***dτ’*** ο οποίος συνεισφέρει το στοιχειώδες φορτίο ή ρεύμα



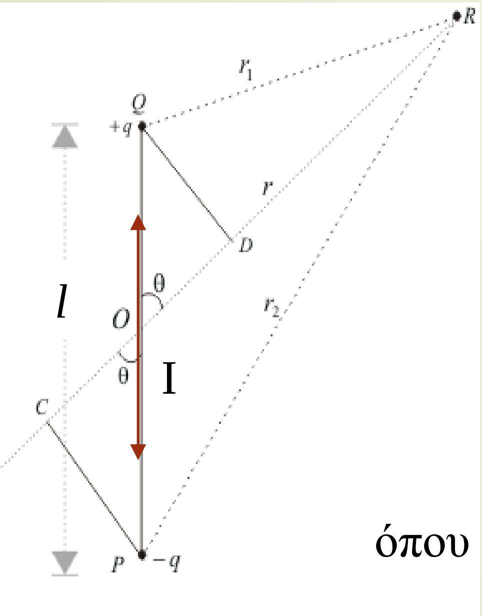
Καθυστερημένος Χρόνος

- Αν αλλάξει η κατανομή του φορτίου ή του ρεύματος αυτό δεν σημαίνει ότι αλλάζει ακαριαία και το παραγόμενο πεδίο.
- Στην φύση η μέγιστη ταχύτητα μετάδοσης μιας πληροφορίας είναι η ταχύτητα του φωτός. Το φως που βλέπουμε από ένα αστέρι είναι η εικόνα του πριν από αρκετά χρόνια όσα χρόνια κάνει το φως να φτάσει σε εμάς από το αστέρι αυτό.
- Για τον λόγο αυτό μπορούμε να πούμε ότι οι λύσεις τις εξίσωσης
- $\nabla^2 V - \mu_o \varepsilon_o \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$ είναι $V(x,y,z,\mathrm{t}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} \displaystyle\int_{V_{vol}} \dfrac{\rho(x',y',z',t-r/C)}{r} d\tau'$
- Δηλαδή σε μία κατανομή φορτίου η οποία υφίστατο σε χρόνο t-r/c δηλαδή σε χρόνο που χρειάστηκε το φως να πάει από την κατανομή στην θέση υπολογισμού του πεδίου.
- Ομοίως και για το διανυσματικό δυναμικό έχουμε

$$\vec{A}(x,y,z,t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V_{vol}} \frac{\vec{J}(x',y',z',t-\mathrm{r/c})}{r} d\tau'$$

Ηλεκτρικό Δίπολο με μεταβλητή Ηλεκτρική Ροπή

- Έστω δίπολο μήκους l με διπολική ροπή η οποία εξαρτάται από το χρόνο και μάλιστα $\vec{p} = Q_o l e^{j\omega t}\hat{z}$ δηλαδή το φορτίο αλλάζει πολικότητα ημιτονοειδώς
- Η ένταση του ρεύματος θα είναι $I(t) = \dfrac{dQ}{dt} = j\omega Q_o e^{j\omega t} = I_o e^{j\omega t}$
- Το βαθμωτό δυναμικό στην θέση **r** είναι $V = \dfrac{Q_o e^{j\omega(t-r_1/c)}}{4\pi\epsilon_o r_1} - \dfrac{Q_o e^{j\omega(t-r_2/c)}}{4\pi\epsilon_o r_2}$



Ορίζοντας $t_r = t - \frac{r}{c}$ & $\lambdabar = \frac{c}{\omega}$ $\frac{\ell^3}{r^3} << 1$ & $\frac{\ell^3}{\lambda^3} << 1$ και θεωρώντας $\ell << \lambda$ αν $\left(\frac{\ell}{r}\right)^3 << 1$

$$\boxed{V(\vec{r},t) = \frac{p_o}{4\pi\epsilon_o \lambdabar r}\sqrt{\frac{\lambdabar^2}{r^2}+1}\,\cos\theta\, e^{j\left(\omega t_r + \arctan\frac{r}{\lambdabar}\right)}}$$

και

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{j[\mathrm{p}]}{4\pi\epsilon_o c\lambdabar r}(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta})}$$

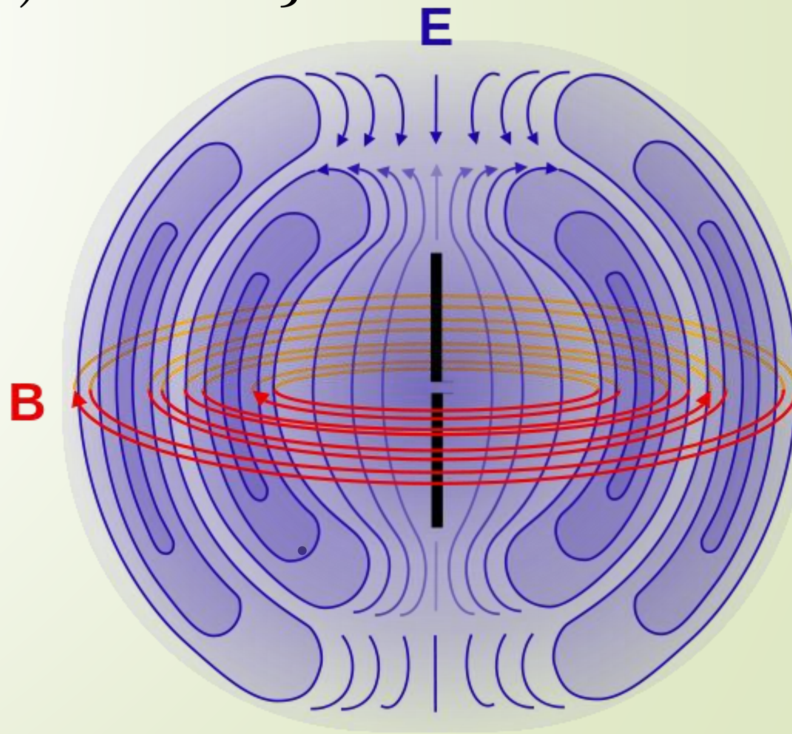
όπου $[p] = Q_o\, \ell e^{j\omega(t-\frac{r}{c})}$ και γενικά όποια ποσότητα είναι σε [] αναφέρεται σε καθυστερημένο χρόνο

Ένταση Ηλεκτρικού και Μαγνητικού Πεδίου

- Αν τώρα έχουμε τα δύο δυναμικά είναι «εύκολο» να βρούμε την ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου !!!!!!!!
- Και τελικά έχουμε τους πολύ απλούς τύπους $\vec{E} = -\nabla V$ & $\vec{H} = \frac{1}{\mu_o}\nabla \times \vec{A}$

$$\vec{E} = \frac{[p]}{4\pi\epsilon_o ƛ^2 r}\left\{2\left(\frac{ƛ^2}{r^2} + j\frac{ƛ}{r}\right)\cos\theta\ \hat{r} + \left(\frac{ƛ^2}{r^2} - 1 + j\frac{ƛ}{r}\right)\sin\theta\ \hat{\theta}\right\}$$

$$\vec{H} = \frac{c[p]}{4\pi ƛ^2 r}\left(-1 + j\frac{ƛ}{r}\right)\sin\theta\hat{\phi}$$



- Για μεγάλα λ (χαμηλές συχνότητες) το μαγνητικό πεδίο

Γίνεται $\vec{H} = \frac{j\omega[p]}{4\pi r^2}\sin\theta\hat{\phi}$ που είναι ο νόμος των Biot-Savart

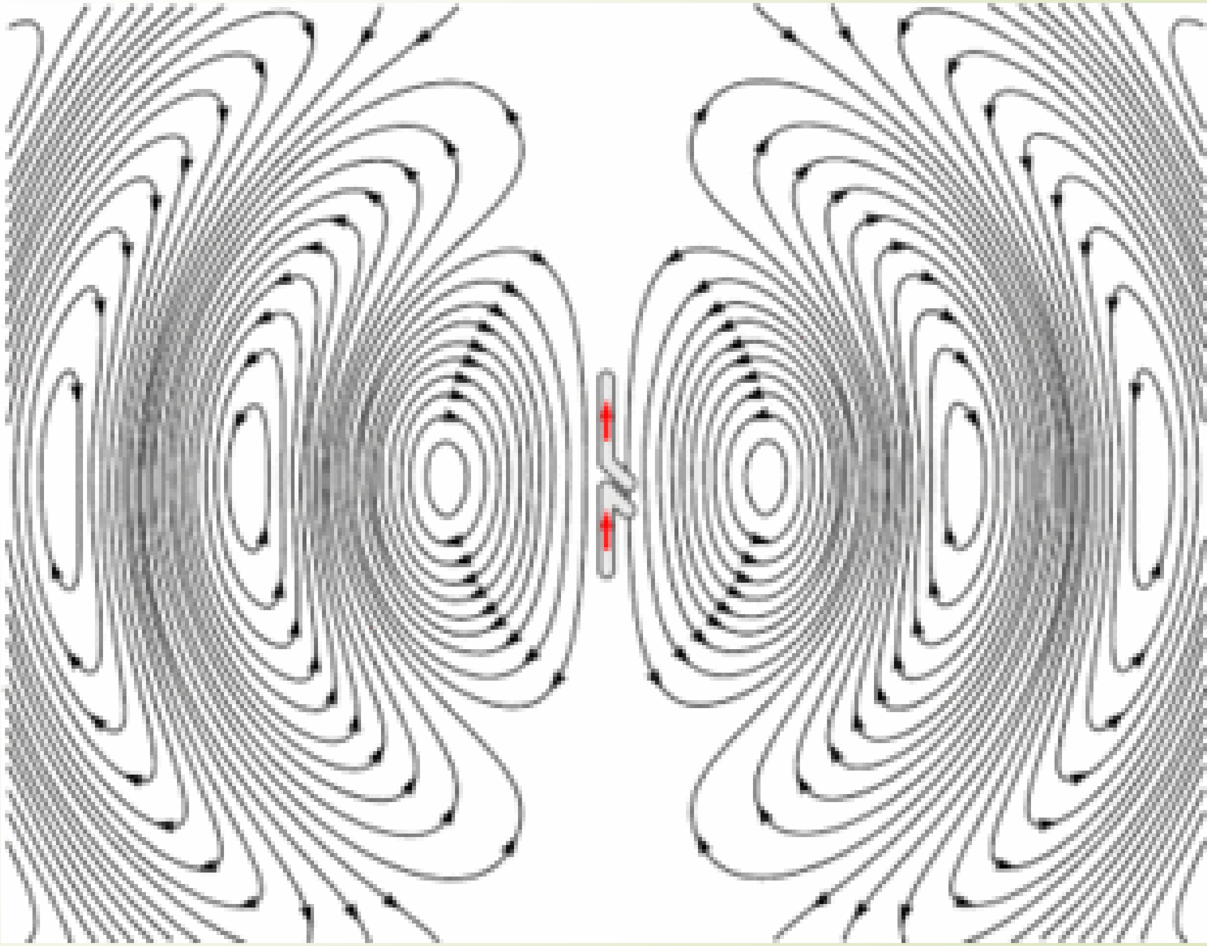
Ηλεκτρικό πεδίο κοντά και μακριά από στην πηγή

- Κοντά στην πηγή του διπόλου όπου δηλαδή r<<ƛ ή για πολύ μικρές συχνότητες $ƛ \to \infty$
- Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίο γίνεται
- $$\vec{E} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_o r^3}\left(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right)$$
- Ενώ μακριά

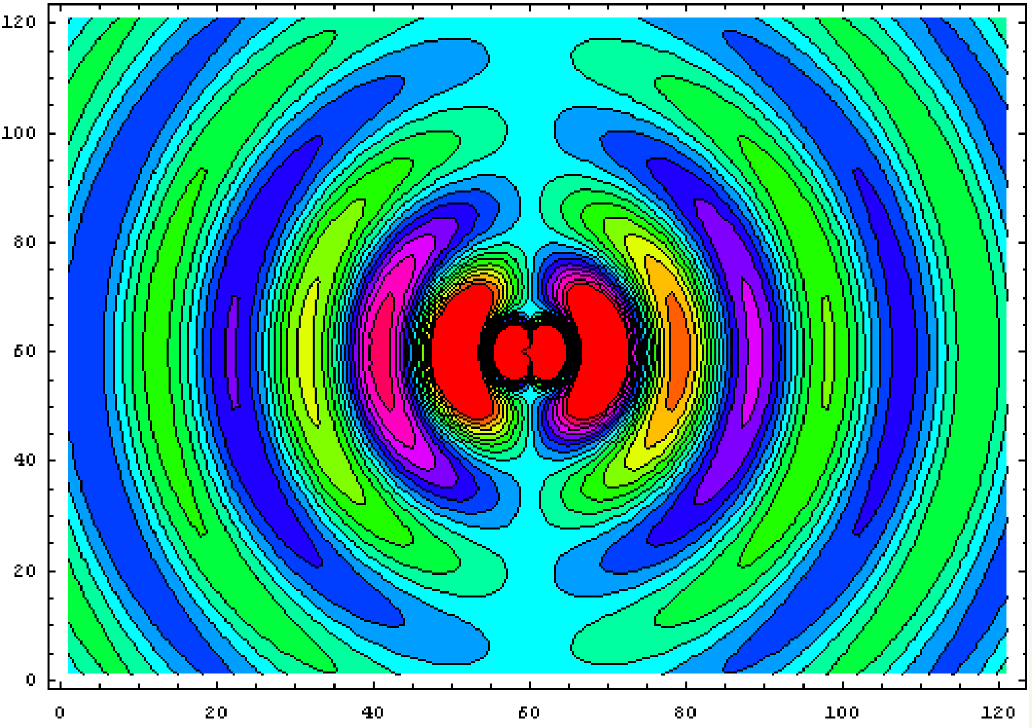
$$\vec{E} = -\frac{[p]}{4\pi\epsilon_o ƛ^2 r}\left(\sin\theta\,\hat{\theta}\right), \vec{H} = -\frac{C[p]}{4\pi ƛ^2 r}\left(\sin\theta\,\hat{\phi}\right),$$

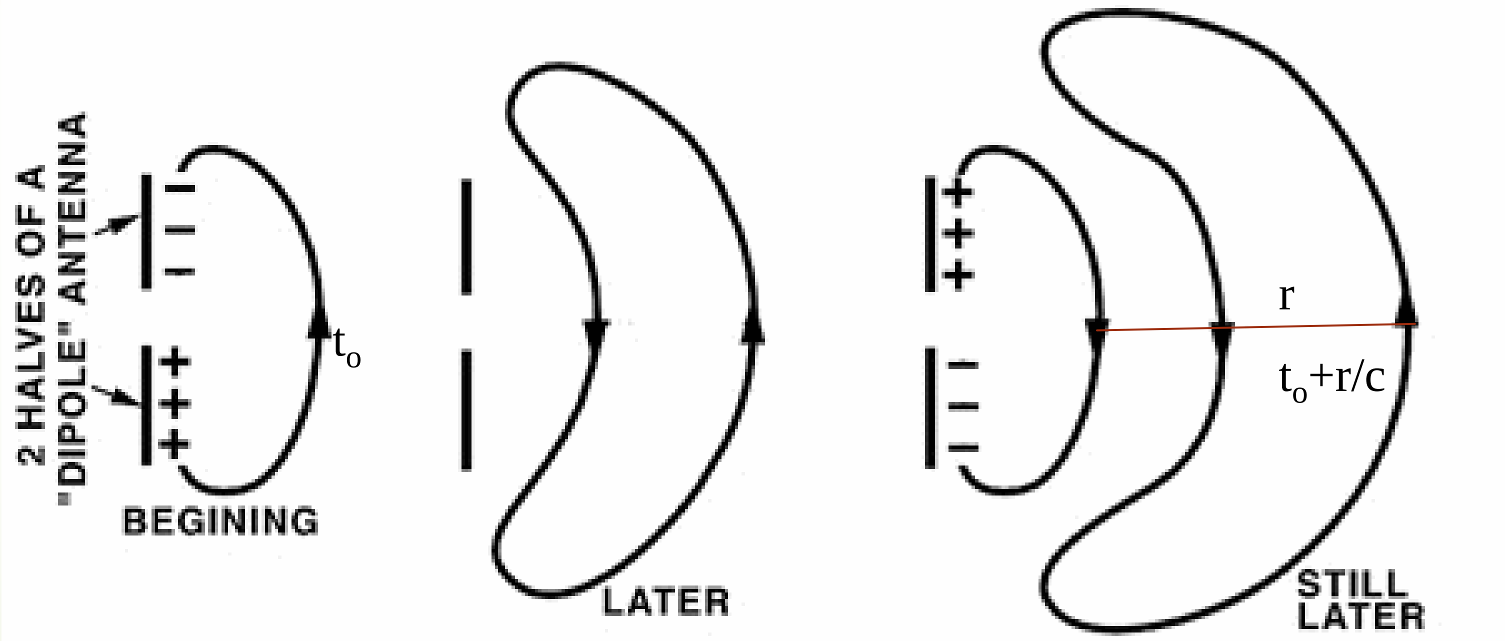
- Στην περίπτωση αυτή επιβιώνουν όροι

ανάλογοι του $1/\lambda^2$ ή $\sim f^2$



Ηλεκτρικό Διπόλου Μια εικόνα 1000 λέξεις





Φυσική Σημασία Χαρακτηριστικής Κυματικής Αντίστασης Μέσου

- Σε γραμμές μεταφοράς ορίζουμε ως χαρακτηριστική αντίσταση επαναληπτικού κυκλώματος ως

$Z_o = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$ Μέ Z=$R + j\omega L$ (Ω / m) με Z η εν σειρά αντίσταση ανά μονάδα μήκους, Y=G$+ j\omega C$ (S / m) με Y την εν παραλλήλο είσοδο ανά μονάδα μήκους

$Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$ αν τα ωμικά στοιχεία του κυκλώματος θεωρηθούν αμελητέα $Z_o = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}$

- Η διαπερατότητα (μ) είναι ισοδύναμη της επαγωγής και η διηλεκτρική σταθερά (ε) είναι το ισοδύναμο της χωρητικότητας στα ηλεκτρικά κυκλώματα.

- Αν θεωρήσουμε το κενό σαν γραμμή μεταφοράς τότε η χαρακτηριστική του αντίσταση θα είναι:

$$Z_o = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \text{ για το κενό } Z_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 377\ \Omega$$

Κυματική Αντίσταση (Εμπέδηση) μέσου διάδοσης

- Με τη λογική της θεωρίας πεδίου

Z$=\frac{V}{I}=\frac{\int \vec{E}\cdot d\hat{L}}{\int \vec{H}\cdot d\hat{L}}$ σε μία θεμελιώδη κυψελίδα σταθερού μήκους V$_{cell}=El$, $I_{cell}=Hl$

άρα Z$_{cell}=\frac{E}{H}$ για το στ. δίπολο Z$=\frac{\frac{[p]}{4\pi\epsilon_0ƛ^2r}sin\theta}{\frac{C[p]}{4\piƛ^2r}sin\theta}=\frac{1}{C\epsilon_0}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}=377\Omega$

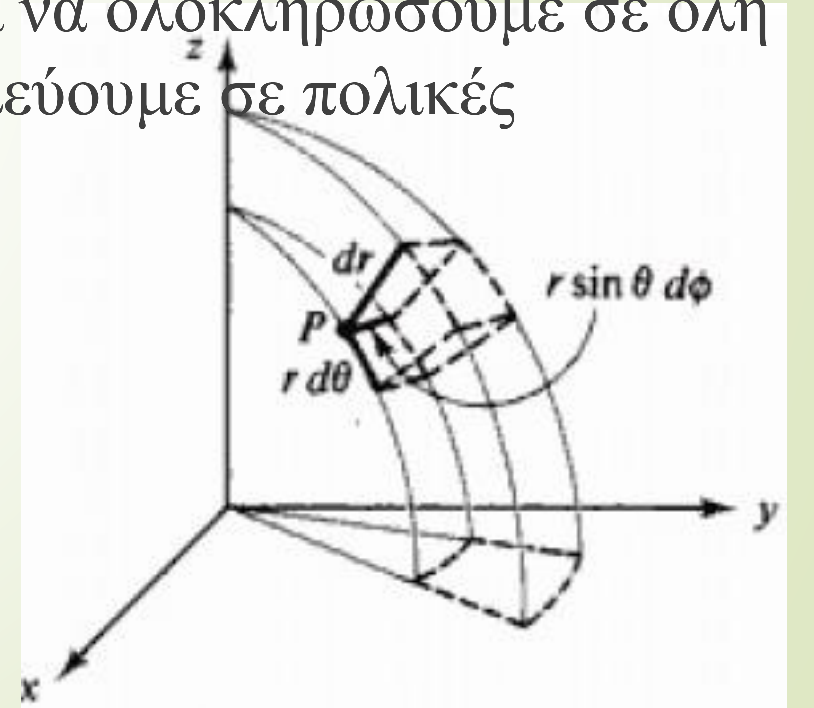
Ένταση ακτινοβολίας – διάνυσμα Pointing

- Όπως θυμόμαστε η ένταση της ακτινοβολίας εκφράζεται μέσω του διανύσματος pointing και μάλιστα η ολική ακτινοβολούμενη ισχύς είναι:

$$W_{rad} = \oint_{\triangle S} \vec{S} \bullet d\vec{s} = \frac{1}{2} \oint_{\triangle S} \mathrm{Re}(\vec{E} \times \vec{\mathrm{H}}^*) \bullet d\vec{s}$$

- Πολλές φορές το Διάνυσμα Pointing ονομάζεται και ένταση της ακτινοβολίας I(W/m^2)
- Για να βρούμε την συνολική ισχύ όπως φαίνεται θα πρέπει να ολοκληρώσουμε σε όλη την επιφάνεια στην προκυμμένη περίπτωση μιας και δουλεύουμε σε πολικές συντεταγμένες

$$d\vec{s} = \alpha_S ds = \alpha_r r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$



Στην περίπτωση του διπόλου

- Στην περίπτωσή μας και μάλιστα σε σημείο μακριά του δίπολου έχουμε
- Αφού έχουμε μόνο τις συνιστώσες r & θ για το Ηλεκτρικό πεδίο έχουμε
- $\hat{r}\times\hat{\phi}=-\hat{\theta}$ & $\hat{\theta}\times\hat{\phi}=\hat{r}$ άρα $\overrightarrow{S_C}=\frac{1}{2}Re(-E_r H_\phi^*\hat{\theta}+E_\theta H_\phi^*\hat{r})$
- Αν αντικαταστήσουμε έχουμε γενικά το αποτέλεσμα να είναι μιγαδικό όμως μόνο η ακτινική συνιστώσα συνεισφέρει στη συνολική ισχύ οπότε

$$\boxed{\overrightarrow{S_C}=\frac{\mu_o\pi^2}{2c}\frac{f^4p_m^2}{r^2}sin^2\theta\hat{r}=\frac{\mu_o}{8c}\frac{f^2I_m^2l^2}{r^2}sin^2\theta\hat{r} \quad \text{με } I_m\cdot l=\omega p_m=2\pi fp_m}$$

- Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ποσότητα έχουμε τελικά την ολική ισχύ που εκπέμπεται από τα δίπολο να είναι

$$\boxed{P_{rad}\cong 40I_m{}^2\frac{\ell^2}{\lambda^2}=20I^2\frac{\ell^2}{\lambda^2},=40\pi^2I^2\frac{\ell^2}{\lambda^2}Watt \quad (\mathrm{I}=\mathrm{I}_{rms})}$$

Παρατηρήσεις

- Η πυκνότητα τόσο του ηλεκτρικού όσο και το Μαγνητικού Πεδίου είναι ίσες (να γίνει σαν άσκηση).
- Σε μεγάλες αποστάσεις $r >> ƛ$ $\quad Z = \frac{E}{H} = \mu_o c = 377\Omega$
- Σε μεγάλες αποστάσεις η ακτινοβολούμενη ενέργεια είναι μόνο στην ακτινική συνιστώσα
- Η ένταση της ακτινοβολίας είναι ανάλογη του $1/r^2$
- Η ένταση της ακτινοβολίας είναι ανάλογη του $\sin^2\theta$ πράγμα που σημαίνει ότι στην κατεύθυνση $\theta=0$ (πόλους) η ακτινοβολία μηδενίζεται ενώ για $\theta=180^o$ (ισημερινό)
- Αν δούμε ξανά την ακτινοβολούμενη ισχύ $\boxed{P_{rad} \cong 20 \frac{\ell^2}{ƛ^2} I^2}$ μας θυμίζει τίποτα ?
- Τον νόμο του joule $\boxed{P = RI^2}$ άρα "καταχρηστικά" θα μπορούσαμε μα ορίσουμε σαν αντίσταση της ακτινοβολία την ποσότητα $\boxed{R \cong 20 \frac{\ell^2}{ƛ^2}}$
-

Από τις κεραίες στον γαλανό ουρανό

- Στην ατμόσφαιρα όταν προσπίπτει ηλιακή ακτινοβολία σε σωματίδια μικρότερα του μήκους κύματος τότε αυτά δρουν σαν διπολικές κεραίες και επανεκπέμπου την προσπίπτουσα ακτινοβολία
- Η ένταση τις ακτινοβολίας που εκπέμπεται είναι $$\mathrm{I}_{rad} = \frac{\mu_o \pi^2}{2\lambda^4 c} \frac{p_m^2}{r^2} \sin^2\theta \hat{r}$$
- Άρα η ακτινοβολία που σκεδάζεται περισσότερο θα είναι αυτή με το μικρότερο μήκος κύματος (μπλε) σε σχέση με τα μεγαλύτερα έτσι όπου και να κοιτάξουμε βλέπουμε το σκεδαζόμενο φως (μπλε χρώμα)
- Αν το φως αναγκαστεί να περάσει από ένα παχύτερο στρώμα (ανατολή δύση του ήλιου ή κάτι άλλο τότε απομακρύνεται ένα μεγάλο ποσοστό από τα μικρά και μεγάλα μήκη κύματος και γι’ αυτό βλέπουμε το ήλιο ποιο κόκκινο .
- Το παραπάνω φαινόμενο λέγεται σκέδαση Rayleigh